



**MONDRAGON
UNIBERTSITATEA**

GOI ESKOLA
POLITEKNIKOA

ESCUELA
POLITÉCNICA
SUPERIOR

Tesis doctoral

Análisis dinámico de sistemas estructurales con
amortiguamiento viscoelástico

Fernando Cortés Martínez, 2006

Departamento de Ingeniería Mecánica

MONDRAGON
GOI ESKOLA POLITEKNIKOA
BIBLIOTECA

24 MAR 2009

SARRERA

M0080566

MGEP

00 100 013



A mis padres

Resumen

En la presente memoria de tesis se resume la investigación llevada a cabo sobre la reducción de la vibración estructural, concretamente en sistemas en los que se emplean técnicas de amortiguación pasiva mediante recubrimientos superficiales con materiales viscoelásticos. En este contexto, se han desarrollado una serie de procedimientos numéricos con los que se pretende simplificar la labor de los ingenieros que se enfrentan al reto de mejorar las prestaciones de sus productos en cuanto a la duración de vida de los componentes, a la disminución de la radiación acústica, al aumento del confort, o al incremento de la seguridad.

En efecto, las propiedades de los materiales viscoelásticos son fuertemente dependientes de la temperatura y de la frecuencia, lo que implica un importante inconveniente a la hora de emplear tanto técnicas de caracterización experimental como de simulación numérica. De hecho, los programas comerciales de elementos finitos que se encuentran ampliamente difundidos en el ámbito industrial, no tienen implementados algoritmos capaces de tratar eficazmente el tratamiento viscoelástico.

Por ejemplo, el uso de modelos de material con derivadas fraccionarias es la forma más eficiente con la que hoy en día se puede modelar el comportamiento viscoelástico. Pero se trata de una disciplina emergente, que por supuesto no es considerada por los programas comerciales de elementos finitos, ni ha logrado en la actualidad el grado de madurez suficiente para que pueda ser empleada en aplicaciones prácticas de ingeniería.

Por lo tanto, en este trabajo se han generado, desarrollado y aplicado modelos y métodos numéricos para el análisis dinámico de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico, tanto para el dominio del tiempo como para el de la frecuencia, incluyendo modelos homogeneizados para vigas estructurales con recubrimiento viscoelástico. También se ha propuesto una técnica experimental que facilita la identificación de las propiedades mecánicas de los materiales viscoelásticos.

Laburpena

Doktorego-tesi honen memorian egiturazko dardaren murrizketaren analisi-rako erreminta numerikoen garapenari buruzko ikerketa laburbiltzen da, material biskoelastikoekin lorturiko azal-estalduren bidezko moteltze pasibo teknikak erabiltzen diren sistemetan, hain zuzen ere. Hari honetan, ingeniarien lana sinplifikatu nahi da beraien produktuen ezaugarriak hobetzeko erronkari aurre egiteko, osagaien bizitzaren iraupenari, erradiazio akustikoaren murrizketari, konfortaren handitzeari edo segurtasun handitzeari dagokionean.

Material biskoelastikoen ezaugarriak temperatura eta maiztasunaren oso menpekoak dira. Honek guztiak, eragozpen handia suposatzen du karakterizazio esperimentalen teknikak eta simulazio numerikoaren erremintak erabiltzerakoan. Izan ere, eremu industrialean oso hedatuak dauden elementu finituen programa komertzialek ez dute inplementatuta tratamendu biskoelastikoa, era eraginkor batez, tratatzeko gai diren algoritmorik.

Adibidez, gaur egun jarrera biskoelastikoa karakterizatzeko erarik eraginkorra zatidun deribatuen bidezko material-ereduen erabilera da. Baina jakintzagai berria da, elementu finituen programa komertzialek kontuan hartzen ez dutena eta, gaur egun ingeniartzako aplikazio praktikoetan aplikatu ahal izateko heldutasun-maila nahikoa lortu ez duena.

Beraz, ikerketa honetan moteltze biskoelastikoa duten egiturazko sistemetako analisi dinamikorako eredu eta metodo numerikoak garatu eta aplikatu dira. Aldi berean material biskoelastikoen ezaugarri mekanikoen ezagutza errazten duen teknika esperimental bat proposatu da. Metodo numerikoei dagokienez, hauek iragankorreko analisi dinamikorako eta frekuentzialerako ere garatu dira, habeentzako eta estaldura biskoelastikoak dituzten egiturazko xafrentzako modelo homogenotuak barne.

Abstract

This dissertation reports the study carried out for the structural vibration reduction, concretely in systems in which passive damping technologies are applied by means of surface treatments with viscoelastic materials. In this context, numerical procedures have been developed aimed at simplifying the labour of the engineers for improving the performances of their products regarding the life cycle behaviour, the reduction of the acoustic radiation, the comfort enhancement, and the augmentation of the security.

Effectively, the properties of viscoelastic materials are strongly dependent on temperature and frequency, implying an important disadvantage for the experimental characterisation and for the numerical simulation. In fact, the standard finite element programs, which are widely employed in industrial applications, have not implemented efficient algorithms for the analysis of the viscoelastically damped structures.

For example, nowadays the fractional derivative models are the most efficient manner for the representation of the viscoelastic behaviour. But this discipline is at the very beginning, which is neither considered in standard finite element, nor is sufficiently developed for engineering practical applications.

Thus, in this investigation numerical methods and models have been developed and applied for the dynamic analysis of viscoelastically damped structural systems, in the time and frequency domains, including homogenised models for structural beams with surface damping treatments. Also, an experimental technique has been proposed for the identification of the mechanical properties of viscoelastic materials.

Agradecimientos

Deseo agradecer a todas aquellas personas e instituciones que han colaborado, de una u otra forma, a la culminación de la presente tesis.

A mi directora de tesis María Jesús Elejabarrieta, por conducir este trabajo, por su paciencia y por su rigor.

A mi cuñada Julieta, por haberme sacado de las tinieblas de la gramática inglesa. A Modesto, por todo el inglés que he aprendido de él, y por haber corregido tantos artículos. Y también a Ángel, Unai e Iñaki, por la mano echada en la lectura de algunos de ellos.

A Berridi y a Gorka, por su ayuda en la preparación del soporte de las probetas.

A Mondragon Goi Eskola Politeknikoa en general, y al Departamento de Ingeniería Mecánica en particular, por permitirme realizar la tesis con la liberación y financiación correspondientes. A MCC, por su compromiso con la financiación de tesis doctorales. A Ikerlan, por haber prestado el vibrómetro láser. A Soundown Corporation, por la provisión del material viscoelástico.

A mis compañeros de trabajo, por facilitar las cosas, especialmente a Jon, Iñigo, Mikel, Ester, Dani, y sobre todo, a Amaia. Y a los que estuvieron entre nosotros: Mónica, Esti, Aitor, Antxon y Alaitz.

A mis amigos, especialmente a Virginia; y a Aran, Juanan, Kelu, Josean, Nanny, Igor, Aitor, Félix, Susana y Raúl.

Y a mi familia.

Índice

Resumen	V
Laburpena.....	VII
Abstract.....	IX
Agradecimientos	XI
Lista de tablas	XVII
Lista de figuras	XIX
Nomenclatura	XXIII
1 Introducción	1
1.1 Enmarque de la tesis	2
1.2 Estado del arte.....	8
1.2.1 Modelos de material.....	8
1.2.1.1 Modelos diferenciales.....	9
1.2.1.2 Modelos hereditarios	11
1.2.1.3 Modelos fraccionarios	14
1.2.2 Técnicas experimentales.....	18
1.2.2.1 Ensayos en vibraciones libres	19
1.2.2.2 Ensayos en vibraciones forzadas sin resonancia.....	21
1.2.2.3 Ensayos en vibraciones forzadas con resonancia.....	23
1.2.3 Modelos homogeneizados	25
1.2.3.1 Modelos FLD	26
1.2.3.2 Modelos CLD	27
1.2.4 Modelos y métodos numéricos.....	30
1.2.4.1 Introducción.....	30
1.2.4.2 Modelos de amortiguamiento	32
1.2.4.3 Métodos numéricos para el modelo FD	36
1.2.4.4 El problema de los valores propios complejos	41
1.3 Objetivos de la investigación.....	47
1.3.1 Análisis del estado del arte	47

1.3.2	Objetivos	49
1.3.3	Organización de la memoria de tesis	50
2	Técnicas de caracterización.....	53
2.1	Introducción	54
2.2	Caracterización experimental.....	56
2.2.1	Materiales y probetas	56
2.2.2	Técnica experimental	57
2.2.3	Procedimiento numérico.....	61
2.2.4	Resultados y discusión.....	65
2.2.4.1	Resultados de las probetas SS	65
2.2.4.2	Resultados de las probetas AFLD	66
2.2.4.3	Resultados de las probetas SFLD	70
2.3	Ajuste de modelos	72
2.4	Análisis de un nuevo modelo hereditario	76
2.5	Conclusiones	80
3	Análisis dinámico transitorio	83
3.1	Introducción	84
3.2	Formulación de elementos finitos	85
3.3	Integración numérica	90
3.3.1	Formulación explícita.....	91
3.3.2	Formulaciones implícitas.....	93
3.4	Aplicación numérica	97
3.4.1	Comparación con la formulación de Padovan.....	98
3.4.2	Comparación entre los dos esquemas implícitos	102
3.4.3	Integración explícita.....	104
3.4.4	Truncamiento de los coeficientes de Grünwald	106
3.4.5	Influencia del parámetro β	107
3.5	Conclusiones	108

4	Análisis en frecuencia	111
4.1	Introducción	112
4.2	Derivadas de autovalores y autovectores.....	114
4.2.1	Sistemas de primer orden.....	114
4.2.2	Sistemas de segundo orden.....	117
4.3	Extracción de autovalores y autovectores	119
4.3.1	Sistemas de primer orden.....	120
4.3.2	Sistemas de segundo orden.....	124
4.4	Respuesta en frecuencia	129
4.4.1	Sistemas de primer orden.....	130
4.4.2	Sistemas de segundo orden.....	131
4.5	Aplicación numérica.....	133
4.5.1	Extracción de autovalores y autovectores	134
4.5.2	Respuesta a la excitación por la base.....	138
4.6	Conclusiones.....	141
5	Homogeneización de vigas	143
5.1	Introducción	144
5.2	Formulación para el análisis transitorio	145
5.2.1	Desarrollo de la formulación homogeneizada	146
5.2.2	Integración numérica	151
5.2.3	Aplicación numérica.....	153
5.2.3.1	Respuesta a una fuerza escalón	155
5.2.3.2	Respuesta impulsiva.....	155
5.3	Formulación en frecuencia para vigas gruesas.....	156
5.3.1	Modelo homogeneizado	157
5.3.2	Aplicación numérica.....	162
5.3.2.1	Extracción de los valores propios	164
5.3.2.2	Función de respuesta en frecuencia.....	166
5.4	Conclusiones.....	168

6 Conclusiones	171
6.1 Aportaciones más relevantes.....	172
6.2 Líneas futuras.....	175
Anexos.....	179
A Fórmulas del Capítulo 3.....	181
B Matrices de los elementos finitos de los modelos 2D.....	183
C Algoritmos para el problema de los valores propios en sistemas de primer orden.....	189
D Algoritmos para el problema de los valores propios en sistemas de segundo orden.....	197
E Rigidez de flexión homogeneizada	203
Referencias	209

Lista de tablas

Tabla 1.1	Modelos diferenciales clásicos	10
Tabla 1.2	Diferentes funciones de relajación.....	13
Tabla 2.1	Propiedades de las probetas SS	57
Tabla 2.2	Propiedades de las probetas AFLD	58
Tabla 2.3	Propiedades de las probetas SFLD	59
Tabla 2.4	Resultados de las probetas SS	65
Tabla 2.5	Resultados de las probetas AFLD	67
Tabla 2.6	Resultados de las probetas SFLD	71
Tabla 2.7	Parámetros de los modelos Zener y FD ajustando el valor absoluto del módulo complejo	73
Tabla 2.8	Parámetros de los modelos teóricos ajustando la parte imaginaria del módulo complejo.....	75
Tabla 2.9	Módulo de almacenamiento y factor de pérdida de probetas de hormigón polímero.....	79
Tabla 2.10	Parámetros del nuevo modelo hereditario ajustado a los datos experimentales	79
Tabla 3.1	Diferencias finitas centrales para un sistema del tipo $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$	92
Tabla 3.2	Esquema de Newmark para un sistema de segundo orden $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$	95

Tabla 4.1	Tiempo computacional en función de los GDL del sistema según diferentes métodos	135
Tabla 4.2	Resultados modales según diferentes métodos para amortiguamiento constante	136
Tabla 4.3	Resultados modales según diferentes métodos iterativos para amortiguamiento variable	137
Tabla 5.1	Resultados modales de la viga FLD para tres espesores: $H_v = 2, 6$ y 10 mm	165

Lista de figuras

- Figura 1.1 Evolución del módulo complejo de un material viscoelástico en función de (a) la temperatura y de (b) la frecuencia 5
- Figura 1.2 Representación del módulo complejo en función de la frecuencia para un modelo FD: (a) de cuatro parámetros según dos valores extremos del parámetro α ; y (b) de cinco parámetros para $\alpha = 0.9$ y dos órdenes diferentes del parámetro β 16
- Figura 1.3 Configuración para los ensayos en oscilaciones libres: (a) tracción y (b) torsión 20
- Figura 1.4 Respuesta transitoria de un sistema con un grado de libertad para la identificación del módulo complejo mediante la técnica del decremento logarítmico 21
- Figura 1.5 Respuesta ante una fuerza armónica: (a) ciclo de histéresis y (b) evolución de la tensión y de la deformación 22
- Figura 1.6 Módulo de la función de respuesta en frecuencia para la identificación del módulo complejo mediante la técnica HPB 23
- Figura 1.7 Probetas (a) asimétrica, (b) simétrica y (c) sándwich 24
- Figura 1.8 Configuraciones para los tratamientos superficiales viscoelásticos: (a) FLD asimétrica, (b) FLD simétrica, y (c) CLD ... 25
- Figura 1.9 Representación del modelo GHM 34
- Figura 2.1 Sección transversal de una viga FLD (a) asimétrica y (b) simétrica 55
- Figura 2.2 Cadena de medida: (a) excitador electrodinámico, (b) probeta, (c) vibrómetro láser, (d) acelerómetro, (e) analizador de espectros, y (f) ordenador personal 60

- Figura 2.3 Fotografía del sistema de medida60
- Figura 2.4 Sistema de un grado de libertad de masa m con amortiguador viscoelástico y excitado por la base61
- Figura 2.5. Diferencia (%) entre el ancho de banda Δr y el factor de pérdida η 63
- Figura 2.6 Anchos de banda del primer modo para probetas de diferente longitud: (a.1) AFLD-10-180-1 y (a.2) AFLD-10-250-1; resonancias para la probeta AFLD-10-250-1: modos (b.1) primero y (b.2) tercero; primer pico de resonancia para probetas de diferente espesor de capa base: (c.1) AFLD-10-250-2 y (c.2) AFLD-15-250-268
- Figura 2.7 Anchos de banda del primer modo para probetas de similares características pero diferente configuración: (a) AFLD-10-200-1 y (b) SFLD-10-200-170
- Figura 2.8 Comparación entre los resultados experimentales y los modelos teóricos ajustando el valor absoluto del módulo complejo: (a) módulo de almacenamiento E_v y (b) factor de pérdida η_v 74
- Figura 2.9 Comparación entre los resultados experimentales y los modelos teóricos ajustando la parte imaginaria del módulo complejo: (a) módulo de almacenamiento E_v y (b) módulo de pérdida E_v'' 75
- Figura 2.10 Relajación de la tensión según los modelos hiperbólico, exponencial y nuevo77
- Figura 2.11 Factor de pérdida del nuevo modelo en función de la frecuencia78
- Figura 2.12 Comparación entre los datos experimentales y el ajuste del nuevo modelo: (a) módulo E y (b) factor de pérdida η 80

Figura 3.1	Fuerzas nodales en la intercara	89
Figura 3.2	Modelo EF para una viga en voladizo con tratamiento superficial viscoelástico	98
Figura 3.3	Desplazamiento del extremo libre de la viga en voladizo ante una fuerza escalón obtenido por los esquemas implícitos de Padovan y el nuevo M-K-F : (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$	100
Figura 3.4	Respuesta impulsiva del extremo libre de la viga en voladizo obtenida mediante los esquemas implícitos de Padovan y el nuevo M-K-F para dos niveles de amortiguamiento: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$	101
Figura 3.5	Respuesta forzada usando los esquemas implícitos M-K-F y M-C-K-F para dos tiempos de integración Δt diferentes, y para dos niveles de amortiguamiento: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$	102
Figura 3.6	Respuesta impulsiva usando los esquemas implícitos M-K-F y M-C-K-F para el caso más amortiguado, $\alpha = \beta = 0.5$, y con un paso de integración $\Delta t = 10^{-3}$ s	103
Figura 3.7	Respuesta forzada obtenida por las formulaciones M-K-F implícita y explícita para dos niveles de amortiguamiento diferentes: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$	105
Figura 3.8	Respuesta forzada empleando la historia completa y truncada para calcular las derivadas fraccionarias en el esquema M-K-F : (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$	107
Figura 3.9	Respuesta forzada usando el esquema explícito M-K-F con el material viscoelástico caracterizado mediante modelos FD de cuatro y cinco parámetros	108

Figura 4.1	Modelo de viga en voladizo con recubrimiento FLD excitada por la base	134
Figura 4.2	Tres primeras MCF de la respuesta sísmica de la viga en voladizo	140
Figura 4.3	Respuesta sísmica de la probeta AFLD-10-180-1 obtenida empírica y numéricamente: método directo, superposición de tres y de todas las MCF	140
Figura 5.1	Momentos internos en una viga FLD para las configuraciones (a) asimétrica y (b) simétrica	147
Figura 5.2	Viga FLD en voladizo sometida a una carga en su extremo libre	154
Figura 5.3	Respuesta forzada de la viga FLD obtenida mediante el modelo 2D y el 1D.....	155
Figura 5.4	Respuesta impulsiva de la viga FLD obtenida mediante el modelo 2D y el 1D.....	156
Figura 5.5	Modelo 2D para la viga FLD en voladizo	163
Figura 5.6	Módulo de la FRF del extremo libre de la viga en voladizo para tres espesores de capa amortiguadora: (a) $H_v = 2\text{ mm}$, (b) $H_v = 6\text{ mm}$ y (c) $H_v = 10\text{ mm}$	167

Nomenclatura

Símbolos

- a_1, a_2 Coeficientes del modelo de Rayleigh.
- a_i Coeficiente i -ésimo del modelo de Caughey.
- a_p Coeficiente p -ésimo de los modelos diferenciales.
- A Área de la sección transversal de una barra,
amplitud del pico de resonancia.
- A_{j+1} Coeficientes de Grünwald-Letnikov.
- b Anchura de una viga.
- b_q Coeficientes de los modelos diferenciales.
- \mathbf{b}_r Vector del método FAN.
- B Rigidez de flexión de la sección transversal de una viga.
- B_{eq} Rigidez de flexión equivalente de una viga compuesta.
- B_K Rigidez de flexión equivalente contemplando la cortadura.
- B_1 Parámetro del modelo WLF.
- \mathbf{B} Matriz de las derivadas de las funciones de interpolación.
- c Parámetro del amortiguamiento viscoso.
- c_r Escalar del método de Nelson,
amortiguamiento modal.
- \mathbf{c}_r Vector del método de Fox y Kapoor.
- C Rigidez torsional de una barra.
- \mathbf{C} Matriz de amortiguamiento viscoso.
- $\bar{\mathbf{C}}$ Matriz de amortiguamiento viscoso equivalente.
- C_n Coeficiente del modo n -ésimo para una viga en voladizo.
- C_1 Parámetro del modelo WLF.
- \mathbf{C} Tensor elástico.
- d_r Escalar del método de Nelson.
- D Relación entre densidades para una viga compuesta.
- \mathbf{D} Matriz de elasticidad.
- e Base de los logaritmos neperianos.

E	Módulo de Young.
E_r	Energía de deformación del modo r -ésimo.
E_0	Módulo estático.
E_∞	Módulo asintótico.
E^*	Módulo complejo.
E', E	Módulo de almacenamiento.
E''	Módulo de pérdida.
f	Frecuencia.
f_0	Frecuencia a la que finaliza la zona gomosa.
f_n	Frecuencia de resonancia n -ésima.
$f_{\text{máx}}$	Frecuencia máxima en el estudio experimental.
f_s	Frecuencia de transición.
$f(t)$	Función genérica dependiente del tiempo.
$f(x, t)$	Densidad de fuerza transversal.
\mathbf{f}_r	Vector para calcular las derivadas de autovalores y autovectores.
$\mathbf{f}(P, t)$	Campo vectorial de las fuerzas de volumen.
$F(t)$	Fuerza puntual.
\mathbf{F}	Vector de fuerzas nodales.
$\bar{\mathbf{F}}$	Vector de fuerzas nodales equivalentes.
\mathbf{F}^*	Vector de fuerzas nodales equivalentes de Padovan, vector de la amplitud compleja de las fuerzas nodales.
$g(t)$	Función de amortiguamiento normalizada.
G	Módulo de rigidez de cortadura.
$G(t)$	Función de relajación.
$\mathbf{G}_v(t)$	Matriz de amortiguamiento no viscoso.
G_r	Módulo de relajación.
G_u	Módulo asintótico.
H	Espesor.
$H(\omega)$	Función de respuesta en frecuencia.
H_n	Posición del plano neutro de una viga.
$H(t)$	Función de Heaviside.
\mathbf{H}	Matriz de amortiguamiento estructural.
i	Unidad imaginaria.

$i_{\text{máx}}$	Parámetro del modelo de Caughey, parámetro del modelo GHM, parámetro del modelo ADF, número máximo de elementos finitos.
I	Momento cuadrático de la sección transversal de una viga.
$j_{\text{máx}}$	Número máximo de iteraciones en el método iterativo.
J_0	Momento de inercia.
$J(t)$	Función de fluencia.
k	Rigidez.
k_r	Rigidez modal.
K	Rigidez transversal.
K_{eq}	Rigidez transversal equivalente.
K	Matriz de rigidez.
\bar{K}	Matriz de rigidez equivalente.
K^*	Matriz de rigidez equivalente de Padovan.
$l_{\text{máx}}$	Parámetro de los modelos fraccionarios.
ℓ_i	Longitud del elemento finito i -ésimo.
L	Longitud.
m	Masa, número de modos en sistemas con amortiguamiento no viscoso.
$m_{\text{máx}}$	Parámetro de los modelos fraccionarios.
m_r	Masa modal.
M	Relación de módulos en una viga compuesta.
M_f	Momento flector.
M	Matriz de masa.
\bar{M}	Matriz de masa equivalente.
n	Número de oscilaciones en el método del decremento logarítmico, tamaño de un sistema matricial, orden entero de derivación n -ésimo.
N	Número de datos en la discretización de Grünwald-Letnikov, tamaño de la base modal para el método de Bajer, Belsky y Zeng.
N	Matriz de las funciones de interpolación.

p	Orden de derivación entero, número de modos con amortiguamiento supercrítico.
$p_{\text{máx}}$	Parámetro de los modelos diferenciales.
P	Punto material genérico de coordenadas (x, y, z) .
q	Orden de derivación entero.
$q_{\text{máx}}$	Parámetro de los modelos diferenciales, número máximo de incrementos para los métodos incrementales.
q_r	Desplazamiento modal.
\mathbf{q}_r	Vector de desplazamiento modales.
Q	Momento de primer orden.
r	Frecuencia reducida o normalizada respecto la frecuencia propia.
r_1, r_2	Frecuencias reducidas para el método HPB.
r_n	Relación de distancias.
r_I	Relación de momentos cuadráticos.
Δr	Intervalo de frecuencias reducidas para el método HPB.
\mathbf{R}^*	Vector de la amplitud compleja de las reacciones nodales.
s	Variable de Laplace.
$s_{\text{máx}}$	Número máximo de datos experimentales.
s_r	Autovalor r -ésimo en un sistema de segundo orden.
$s(t)$	Desplazamiento del movimiento sísmico de la base.
S	Área de la sección transversal de una viga.
S^*	Amplitud compleja del desplazamiento del movimiento sísmico.
t	Tiempo actual.
\hat{t}	Tiempo de retraso.
t_0	Tiempo de referencia en el método del decremento logarítmico, tiempo necesario para resolver el sistema sin amortiguamiento.
Δt	Paso de integración.
Δt_{cr}	Paso de integración crítico.
T	Temperatura, relación de espesores en una viga compuesta, fuerza transversal.
T_0	Temperatura del comienzo de la zona gomosa, periodo de oscilación en el método del decremento logarítmico.

T_A	Parámetro del modelo de Arrhenius.
T_r	Temperatura de referencia del modelo WLF.
T_s	Temperatura de transición.
\dot{u}_0	Velocidad inicial.
$u(t)$	Desplazamiento longitudinal.
\mathbf{u}	Vector de desplazamientos nodales.
$\dot{\mathbf{u}}$	Vector de velocidades nodales.
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vector de aceleraciones nodales.
\mathbf{u}_a	Vector de desplazamientos inelásticos.
\mathbf{u}_r	Autovector r -ésimo en un sistema de segundo orden.
$\mathbf{u}(P, t)$	Campo vectorial de los desplazamientos.
\mathbf{U}^*	Vector la amplitud compleja de los desplazamientos nodales.
$v(t)$	Desplazamiento transversal.
$v(x, t)$	Campo del desplazamiento transversal de una viga.
\mathbf{v}_r	Vector del método de Nelson.
V_i	Volumen del elemento finito i -ésimo.
x	Coordenada espacial.
$x(t)$	Respuesta transitoria de un sistema de 1 GDL.
X^*	Amplitud compleja del desplazamiento de un sistema de 1 GDL.
y	Coordenada espacial.
z	Coordenada espacial.
z_i	Variable interna i -ésima.
$\mathbf{z}(s)$	Vector de variables internas en el dominio de Laplace.
α	Orden de derivación fraccionario, coeficiente de la norma ASTM E 756-04.
$\alpha(T)$	Función de la frecuencia reducida.
β	Orden de derivación fraccionario, coeficiente de la norma ASTM E 756-04.
γ	Coeficiente de forma para la rigidez torsional.
γ_r	Constante de normalización de autovectores.
γ_ϵ	Tensor viscoelástico para las deformaciones.
γ_σ	Tensor viscoelástico para las tensiones.
$\delta(t)$	Función delta de Dirac.

ε_0	Deformación inicial.
$\varepsilon_{r,j}$	Error cometido en cada iteración del método iterativo.
$\varepsilon(t)$	Deformación actual.
$\varepsilon(P,t)$	Campo tensorial de deformaciones.
$\hat{\zeta}_i$	Coefficiente i -ésimo del modelo GHM.
ζ_r	Factor de amortiguamiento del modo r -ésimo.
η	Factor de pérdida.
η_0	Máximo valor del factor de pérdida.
θ	Tiempo característico.
$\theta(t)$	Rotación.
κ	Parámetro de los modelos hereditarios, factor de ponderación en el ajuste de modelos.
λ_r	Autovalor r -ésimo en un sistema de primer orden.
λ	Matriz de los valores propios.
μ	Parámetro de los modelos hereditarios.
ν	Coefficiente de Poisson.
π	Número pi.
ρ	Densidad volumétrica.
ρ_ℓ	Densidad lineal.
σ_0	Tensión inicial.
σ_∞	Tensión asintótica.
$\sigma(t)$	Tensión actual.
$\sigma(P,t)$	Campo tensorial de tensiones.
τ	Tiempo de relajación, tensión de cortadura.
${}_r\phi_i$	Término i -ésimo del autovector r -ésimo.
Φ	Base modal.
$\bar{\Phi}$	Base modal truncada.
Φ_r	Autovector r -ésimo en sistemas de primer orden.
$\varphi(\omega)$	Función del modelo de viga homogeneizada incluyendo cortadura.
ψ	Retraso temporal de la deformación respecto a la tensión.
ω	Frecuencia angular.

ω_0	Frecuencia (angular) propia de un sistema de 1 GDL, frecuencia (angular) del factor de pérdida máximo.
$\hat{\omega}_i$	Coefficiente i -ésimo del modelo GHM.
$\omega_{\text{máx}}$	Mayor frecuencia (angular) propia de un sistema.
ω_r	Frecuencia (angular) propia del modo r -ésimo.
Δ_i	Coefficiente i -ésimo del modelo ADF.
$\Gamma(x)$	Función gamma de argumento x .
Ω_i	Coefficiente i -ésimo del modelo ADF.

Subíndices

$(\bullet)_0$	Relativo al sistema sin amortiguamiento.
$(\bullet)_c$	Relativo al modo c -ésimo de la viga compuesta en configuración AFLD según la norma ASTM E 756-04.
$(\bullet)_e$	Relativo a los materiales elásticos.
$(\bullet)_i$	Parámetro i -ésimo del modelo de Caughey, parámetro i -ésimo del modelo GHM, parámetro i -ésimo del modelo ADF, índice de un elemento finito.
$(\bullet)_j$	Índice del sumatorio de Grünwald-Letnikov, índice del método iterativo.
$(\bullet)_l$	Parámetro l -ésimo de los modelos fraccionarios.
$(\bullet)_n$	Relativo al modo n -ésimo de la capa base de una viga compuesta según la norma ASTM E 756-04, relativo al paso n -ésimo de la integración numérica.
$(\bullet)_m$	Parámetro m -ésimo de los modelos fraccionarios, relativo al modo m -ésimo de la viga compuesta en configuración SFLD según la norma ASTM E 756-04.
$(\bullet)_M$	Relativo al momento flector.
$(\bullet)_p$	Parámetro p -ésimo de los modelos diferenciales.
$(\bullet)_q$	Parámetro q -ésimo de los modelos diferenciales, índice del método incremental.
$(\bullet)_r$	Relativo al modo r -ésimo.
$r(\bullet)$	Relativo al modo r -ésimo.

- (•)_s Índice de datos experimentales.
- (•)_T Relativo a la fuerza transversal.
- (•)_v Relativo a los materiales viscoelásticos.

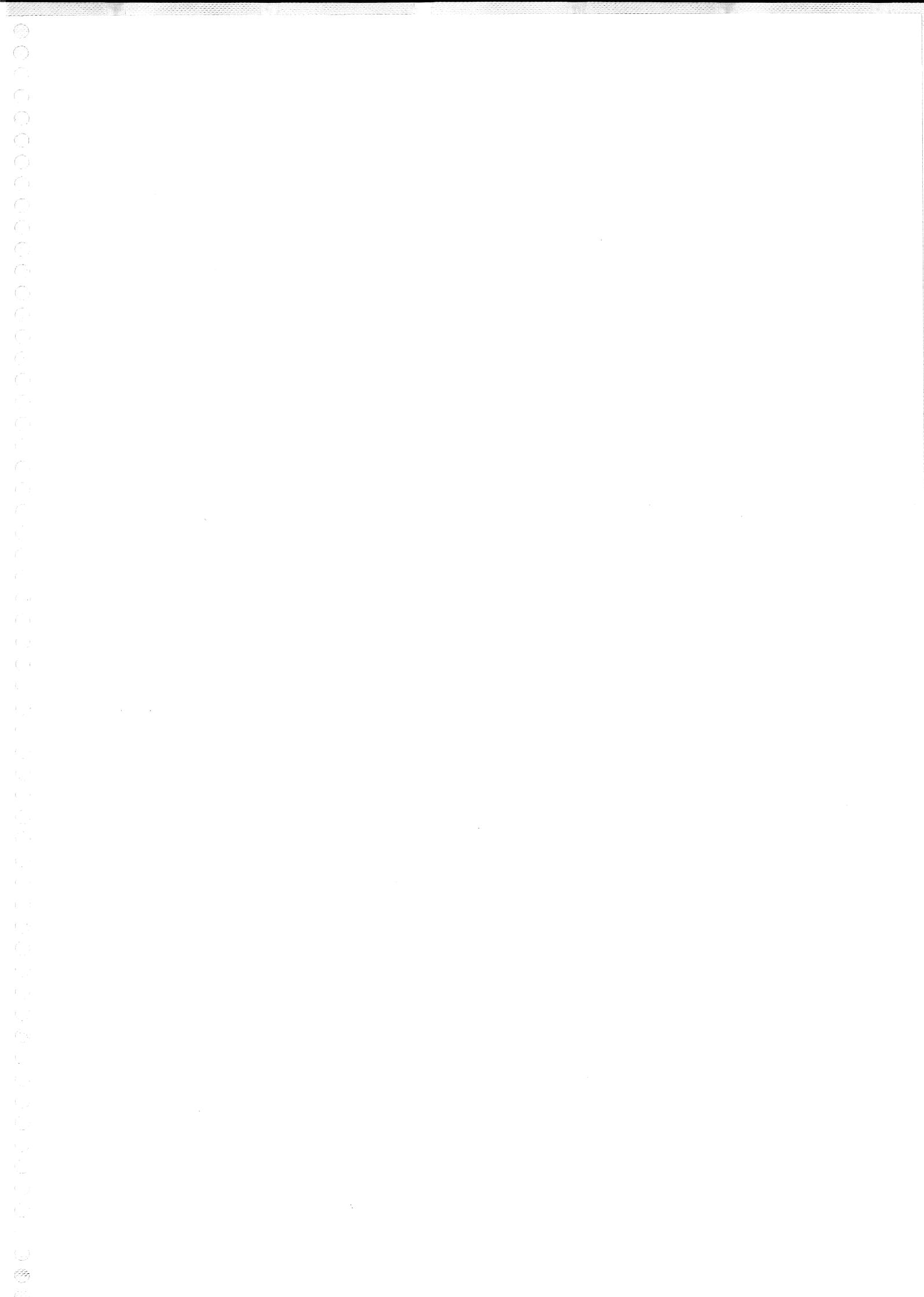
Operadores

- I Operador identidad.
- D^(•) Operador de la derivada fraccionaria.
- Δ(•) Incremento, variación.
- (•)^H Operador de Hermite (conjugado de la trasposición).
- (•)^T Operador de la trasposición.
- (•)^{*} Número complejo.
- (•)['] Parte real de un número complejo,
derivada con respecto a un parámetro cualquiera.
- (•)^{''} Parte real de un número complejo.
- (•) Derivada primera con respecto al tiempo.
- (•) Derivada segunda con respecto al tiempo.
- (•) Transformada de Fourier,
transformada de Laplace.
- (•)! Factorial.
- (•):(•) Producto tensorial doblemente contraído.

Abreviaturas

- ADF *Anelastic displacement fields*, un modelo de amortiguamiento.
- AFLD *Asymmetric free layer damping*, designación de las probetas FLD en las que el material viscoelástico se pega en una cara.
- AFK Método de Adhikari para calcular derivadas de autovalores y autovectores basado en el método de Fox y Kapoor.
- ATF *Augmenting thermodynamic fields*, un modelo de amortiguamiento, caso particular del modelo ADF.
- CLD *Constrained layer damping*, tratamiento viscoelástico en el que el material amortiguador forma parte del núcleo de una estructura tipo sándwich.

- DMTA *Dynamic mechanic thermal analysis*, método de caracterización de materiales poliméricos.
- EF Elementos finitos.
- FAN Método de Friswell y Adhikari para calcular derivadas de autovalores y autovectores basado en el de Nelson.
- FD *Fractional derivative*, modelo constitutivo con derivadas fraccionarias.
- FLD *Free layer damping*, tratamiento viscoelástico superficial en el que el material amortiguador se adhiere sobre la superficie a tratar.
- FRF *Frequency response function*, función de respuesta en frecuencia.
- GDL Grado de libertad.
- GHM Modelo de amortiguamiento de Golla, Hughes y McTavish.
- IRAM *Implicitly restarted Arnoldi method*, método para la extracción de autovalores y autovectores complejos.
- HPB *Half power bandwidth*, método para extraer el factor de pérdida a partir de los picos de resonancia de las FRF.
- FEM *Finite element method*, método de los elementos finitos.
- MCF *Modal contribution function*, función de contribución modal.
- MEF Método de los elementos finitos.
- MSE *Modal strain energy*, método de la energía de deformación modal, para aproximar el factor de pérdida en sistemas EF.
- ND Datos no disponibles.
- RKU Modelo de Ross, Ungar y Kerwin para vigas CLD.
- SFLD *Symmetric free layer damping*, designación de las probetas FLD en las que el material viscoelástico se emplaza en las dos caras.
- SS *Stainless steel*, designación de las probetas de acero inoxidable.
- UMSM *Uncoupled mode superposition method*, método aproximado para resolver sistemas con amortiguamiento viscoso no clásico.



1

Introducción

En este capítulo de introducción de la memoria de tesis, en primer lugar se enmarca la investigación en el campo de la reducción de la vibración estructural mediante técnicas de amortiguación pasiva, concretamente mediante recubrimientos superficiales por medio de materiales viscoelásticos.

A continuación se presenta un estado del arte sobre cuestiones relativas a: (I) la caracterización experimental de las propiedades mecánicas de los materiales viscoelásticos; (II) los modelos de comportamiento; (III) técnicas de análisis de vigas con recubrimiento viscoelástico; y (IV) modelos y métodos numéricos para resolver sistemas estructurales amortiguados, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, haciendo uso del método de los elementos finitos.

A partir del análisis de la revisión bibliográfica, en último lugar se definen los objetivos de la investigación, con el propósito general de desarrollar herramientas numéricas para facilitar el análisis dinámico de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico.

1.1 Enmarque de la tesis

La reducción de la amplitud de la vibración estructural en sistemas mecánicos se ha convertido en la actualidad en un objetivo fundamental en numerosos sectores industriales con el fin de alargar la vida de los componentes, disminuir la radiación acústica, aumentar el confort o incrementar la seguridad. En la comunicación de Tomlinson (2001), referente al estado del arte sobre el papel que desempeña el amortiguamiento en la dinámica estructural, se muestra un diagnóstico sobre diferentes metodologías que introducen amortiguamiento en estructuras que, a las puertas del siglo XXI, pueden combinar técnicas pasivas, semiactivas, activas y adaptativas. En el trabajo de Garg y Anderson (2003) se exponen los avances en técnicas de control híbrido activo-pasivo mediante materiales y estructuras inteligentes en estructuras civiles y militares.

Los tratamientos superficiales por medio de materiales viscoelásticos destacan en la actualidad de entre las técnicas de amortiguación pasiva, debido a su relativa sencillez de implementación. En la literatura se pueden encontrar tres monografías especialmente dedicadas a este tema, como la clásica de Nashif, Jones y Henderson (1985), la de Sun y Lu (1995) y la más moderna de Jones (2001). La primera de ellas provee de una práctica y detallada información concerniente a temas que abarcan desde los fundamentos de las vibraciones amortiguadas hasta aspectos prácticos de diseño. La segunda insiste en una vertiente más tecnológica relativa a estructuras tipo viga, placa y anillo, resaltando los métodos numéricos para llevar a cabo estudios de sistemas complejos. La más actual de las tres destaca por la especial atención prestada a la caracterización experimental del comportamiento de los materiales poliméricos sometidos a sollicitaciones dinámicas, y a los modelos matemáticos de comportamiento que pueden ser empleados en técnicas de simulación. Haciendo especial hincapié en aspectos constructivos en los sectores aeronáutico y de automoción, Rao

(2003) ha presentado recientemente una excelente revisión sobre las aplicaciones de los tratamientos viscoelásticos.

El mecanismo de amortiguación de los materiales viscoelásticos consiste en la disipación de la energía mecánica en forma de calor debido a las interacciones acontecidas entre las moléculas cuando el material se deforma. La estructura molecular de los polímeros está formada por largas cadenas entrelazadas entre sí mediante enlaces covalentes y de van der Waals (véase, por ejemplo, la monografía de Ward y Hadley (1993) para los detalles), por lo que ante una sollicitación mecánica, las fuerzas internas inducidas son mayores que en los metales, cuya estructura se compone de enlaces metálicos que presentan mayor libertad de movimiento atómico. Por lo tanto, la capacidad de disipación de energía de los polímeros hace de ellos materiales a tener en cuenta a la hora de utilizar técnicas pasivas de amortiguación en sistemas mecánicos.

Cuando un material de estas características se ve sujeto a cargas o deformaciones estáticas, se ponen de manifiesto los fenómenos de fluencia y de relajación, respectivamente, que apenas se detectan en los sólidos elásticos excepto a altas temperaturas. La fluencia es un fenómeno en el que manteniendo el nivel de carga constante, la deformación crece en el tiempo, mientras que la relajación consiste en una disminución progresiva de la tensión bajo una deformación constante. El principio de superposición de Boltzmann (1876) describe estos dos fenómenos para la viscoelasticidad lineal, basado en las dos hipótesis siguientes:

1. Los fenómenos de fluencia y de relajación son función de toda la historia de la carga del sistema.
2. Cada carga aplicada implica una participación individual a la deformación final, de forma que esta se obtiene mediante la adición de todas las contribuciones individuales.

Este principio se representa matemáticamente mediante una convolución, de acuerdo con

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G_u} + \int_0^t J(t-\hat{t}) \frac{\partial \sigma(\hat{t})}{\partial \hat{t}} d\hat{t} \quad (1.1)$$

y con

$$\sigma(t) = G_r \varepsilon_0 + \int_0^t G(t-\hat{t}) \frac{\partial \varepsilon(\hat{t})}{\partial \hat{t}} d\hat{t}, \quad (1.2)$$

para los fenómenos de fluencia y de relajación, respectivamente, donde $\varepsilon(t)$ y $\sigma(t)$ indican la historia de la deformación y de la tensión, $J(t)$ y $G(t)$ son las funciones de fluencia y de relajación, t y \hat{t} representan el tiempo actual y el tiempo de retraso, ε_0 y σ_0 denotan las condiciones iniciales de deformación y de tensión, y G_u y G_r son los módulos asintótico y de relajación, denominados en inglés *unrelaxed modulus* y *relaxed modulus*, respectivamente.

Cuando un material viscoelástico se ve sujeto a un estado de carga armónico, la deformación también es armónica pero muestra un retraso en el tiempo, implicando una relación tensión-deformación caracterizada por un ciclo de histeresis, que se puede describir mediante diferentes modelos de comportamiento. Una de las formas más habituales de representar dicha histeresis es mediante el modelo de amortiguamiento estructural, de manera que la relación entre la tensión $\sigma(t)$ y la deformación $\varepsilon(t)$ viene dada por una elipse, que se construye considerando el módulo complejo E^* (Myklestad, 1952), cumpliendo

$$\sigma(t) = E^* \varepsilon(t) = (E' + iE'') \varepsilon(t) = E(1 + i\eta) \varepsilon(t), \quad (1.3)$$

donde $(\bullet)^*$ denota una magnitud compleja, $i = \sqrt{-1}$ representa la unidad imaginaria, y $E = E'$, E'' y η son el módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y el factor de pérdida (en inglés, *storage modulus*, *loss modulus* y *loss factor*, respectivamente), de forma que este último satisface la relación

$$\eta = \frac{E''}{E'}. \quad (1.4)$$

Por consiguiente, la energía disipada en un ciclo de histeresis depende de estas propiedades del material, que se ven afectadas por diferentes factores (Goodman, 1996): composición química, tratamientos térmicos, tensiones iniciales, frecuencia, temperatura, tipo de sollicitación, nivel de deformación... De todos estos factores, Jones (1974, 2001) afirma que los más influyentes en orden de importancia son la temperatura, la frecuencia y la amplitud de la deformación. Este último implica un comportamiento no lineal que no es sencillo de reproducir y que precisa de numerosos ensayos para su caracterización, por lo que en primera instancia se emplean modelos de viscoelasticidad lineal, en los cuales la linealidad se asume hasta niveles de deformación del 0.1%.

Referente a la temperatura, esta afecta directamente sobre la estructura molecular de los polímeros, influyendo en sus propiedades físicas. Para el caso del módulo complejo, su dependencia de la temperatura se representa en la Figura 1.1(a), en la que se distinguen tres zonas diferentes (Nashif et ál., 1985): la zona vítrea, la de transición y la gomosa.

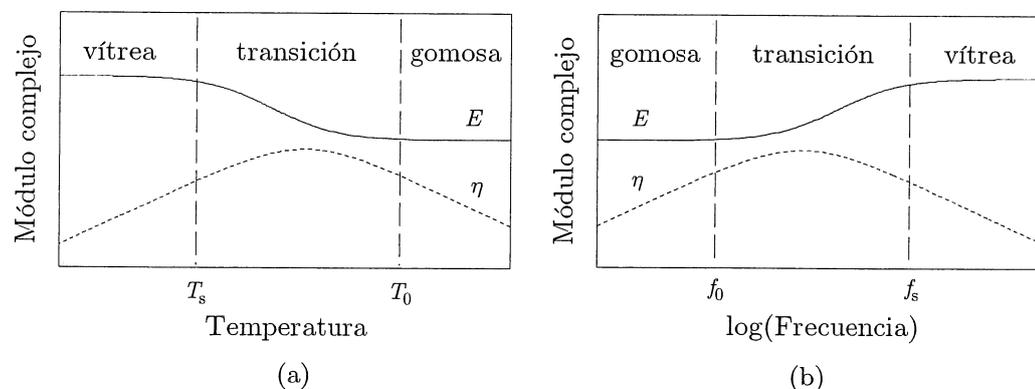


Figura 1.1. Evolución del módulo complejo de un material viscoelástico en función de (a) la temperatura y de (b) la frecuencia.

En la zona vítrea, a temperaturas inferiores a la de transición T_s , el módulo de almacenamiento E presenta sus valores máximos y el factor de pérdida η es creciente. A partir de la temperatura T_s comienza la zona de transición, donde el módulo decrece rápidamente y el factor de pérdida presenta un máximo. A partir de la temperatura T_0 da comienzo la zona gomosa, donde el módulo adquiere sus mínimos valores y el factor de pér-

dida presenta una pendiente negativa. La magnitud del módulo E y de la temperatura T_g marcan la diferencia entre polímeros cristalinos y amorfos (Ward y Hadley, 1993). En efecto, ambas propiedades son menores para el caso de los polímeros amorfos, pudiendo ser su temperatura de transición T_g incluso inferior a la temperatura ambiente.

Relativo a la frecuencia de excitación, su influencia sobre los polímeros se ilustra en la Figura 1.1(b). Cualitativamente, se puede remarcar que provoca el efecto contrario que el de la temperatura: la zona gomosa se manifiesta a bajas frecuencias, en la que tanto el módulo de almacenamiento como el factor de pérdida crecen lentamente; a partir de cierta frecuencia f_0 , comienza la zona de transición, donde el módulo de almacenamiento aumenta y el factor de pérdida presenta su máximo; se puede considerar que la zona vítrea comienza a la frecuencia f_g , a partir de la cual el módulo prácticamente no cambia, y el factor de pérdida decrece. Es imprescindible subrayar que en la Figura 1.1 la escala de las abscisas para la temperatura es lineal mientras que para la frecuencia es logarítmica, lo que indica que las propiedades mecánicas son más sensibles a las variaciones de aquella que de esta.

Con el fin de reducir el número de variables que influyen en el comportamiento de una estructura amortiguada, se hace uso lo que se denominan los métodos de frecuencia reducida, que consisten en asumir que el módulo complejo a una frecuencia f_1 y a una temperatura T_1 es idéntico al de otra frecuencia f_2 y otra temperatura T_2 , según la ecuación

$$E^*(f_1, T_1) = E^*(f_2 \times \alpha(T_2)), \quad (1.5)$$

donde la función $\alpha(T)$, que modula la frecuencia f_2 , es una característica de cada polímero. Los modelos más extendidos para describir la función $\alpha(T)$ son el modelo WLF (Williams-Landel-Ferry) y el de Arrhenius. El modelo WLF (Ferry, 1961) se representa mediante la ecuación

$$\log(\alpha(T)) = -C_1 \frac{T - T_r}{B_1 + T - T_r}, \quad (1.6)$$

donde B_1 y C_1 son coeficientes que se deben determinar experimentalmente, y T_r es una temperatura de referencia arbitraria. Se trata de una relación no lineal entre las funciones $\log(\alpha(T))$ y $1/T$. Contrariamente, el modelo de Arrhenius propone un modelo lineal dado por

$$\log(\alpha(T)) = T_A \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right), \quad (1.7)$$

donde el parámetro T_A , que debe obtenerse experimentalmente, representa la pendiente de la relación $\log(\alpha(T)) - 1/T$, y está directamente relacionado con la energía de activación del polímero, puesto que este modelo está basado en la teoría cinética molecular de las reacciones químicas de Arrhenius (1889).

Concluyendo, el módulo de almacenamiento E y el factor de pérdida η son propiedades mecánicas de los polímeros cuya dependencia en temperatura y en frecuencia distingue el amortiguamiento viscoelástico de otros mecanismos de amortiguamiento. El análisis de la eficiencia de un tratamiento viscoelástico en un sistema estructural sólo es posible si: (I) las propiedades de los materiales se caracterizan correctamente, (II) se emplean modelos matemáticos que representen fielmente el comportamiento de los materiales, y (III) se hace uso de procedimientos numéricos capaces de tratar eficazmente los problemas derivados de considerar tal dependencia en frecuencia. En consecuencia, la presente investigación se enmarca entre las dos ideas siguientes: caracterización experimental y teórica de materiales viscoelásticos; y formulación y resolución numérica de la respuesta dinámica de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico. A continuación se muestra una revisión bibliográfica relativa a estos temas, de cuyo análisis se derivan los objetivos que han gobernado la ejecución de la presente tesis.

1.2 Estado del arte

La revisión bibliográfica que se muestra a continuación se centra sobre las técnicas de amortiguación pasiva mediante el uso de materiales viscoelásticos. Así, en primer lugar se revisan diferentes técnicas concernientes a la caracterización experimental de los materiales viscoelásticos, haciendo hincapié en la dependencia en frecuencia de las propiedades dinámicas de los mismos. A continuación, se analizan diferentes modelos de material para el comportamiento mecánico de los materiales viscoelásticos, desde los modelos clásicos de Maxwell y de Kelvin-Voigt, hasta los más modernos modelos con derivadas fraccionarias. Posteriormente, se tratan los modelos homogeneizados para vigas y placas con tratamiento viscoelástico, y en último lugar se discute sobre la simulación numérica en sistemas más complejos, que no pueden ser modelados como simples vigas o placas, si no que se emplean métodos como el de los elementos finitos.

1.2.1 Modelos de material

Los modelos matemáticos que se utilizan para representar el comportamiento mecánico de los materiales viscoelásticos se pueden agrupar en modelos diferenciales, modelos hereditarios y modelos fraccionarios, según se escriba su ecuación constitutiva. Los modelos diferenciales y hereditarios más clásicos son tratados en numerosos libros, por ejemplo, en el de Ward y Hadley (1993). En trabajos más recientes de autores como Adhikari (2000) y Park (2001) se comparan diferentes formas de modelar el comportamiento viscoelástico. A continuación se presenta una revisión de estos modelos, resaltando su campo de aplicación y sus limitaciones.

1.2.1.1 Modelos diferenciales

Los modelos diferenciales para la viscoelasticidad se formulan combinando términos que representan los comportamientos elástico $(\bullet)_e$ y viscoso $(\bullet)_v$, definidos mediante las leyes de Hooke y de Newton,

$$\sigma_e(t) = E\varepsilon(t) \quad (1.8)$$

y

$$\sigma_v(t) = c\dot{\varepsilon}(t), \quad (1.9)$$

respectivamente. Estas dos leyes de comportamiento sólo pueden ser consideradas válidas cuando la deformación $\varepsilon(t)$ y la velocidad de deformación $\dot{\varepsilon}(t)$ son lo suficientemente pequeñas para asumir la existencia de linealidad con la tensión $\sigma(t)$. El comportamiento elástico se representa por medio de un resorte de rigidez E , y el viscoso mediante un amortiguador de viscosidad c . Los modelos más simples son el de Kelvin-Voigt, el de Maxwell y el modelo estándar lineal, este último atribuido a Zener (1948). La dependencia en frecuencia del módulo complejo se determina a partir de la transformada de Fourier ($\tilde{\cdot}$) de la relación diferencial tensión-deformación,

$$\tilde{\sigma}(\omega) = E^*(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega). \quad (1.10)$$

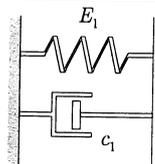
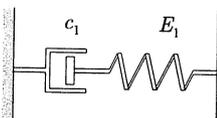
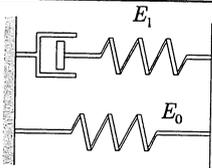
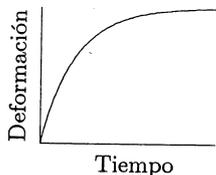
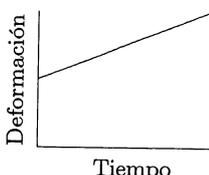
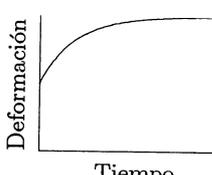
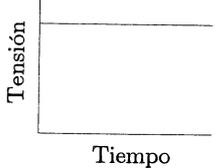
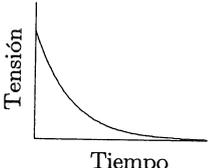
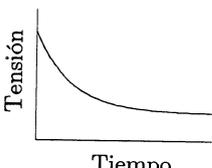
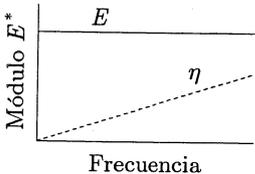
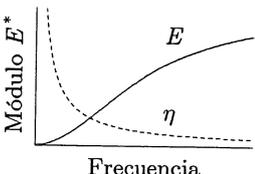
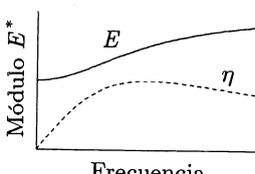
En la Tabla 1.1 se muestran la representación de estos tres modelos, la ecuación diferencial que los caracteriza, la respuesta transitoria frente a una tensión y deformación constantes, la ecuación para las componentes real $E'(\omega)$ e imaginaria $E''(\omega)$ del módulo complejo $E^*(\omega)$, y la evolución del módulo de almacenamiento $E(\omega)$ y del factor de pérdida $\eta(\omega)$ en función de la frecuencia.

Como se puede apreciar en la Tabla 1.1, el modelo de Kelvin-Voigt es capaz de representar variaciones lineales del factor de pérdida en el dominio de la frecuencia, pero el módulo de almacenamiento permanece cons-

tante. Sin embargo, el modelo de Maxwell asume un módulo de almacenamiento creciente hasta un valor finito partiendo de cero, y el factor de pérdida es estrictamente decreciente, comenzando desde valores que tienden a infinito cuando la frecuencia se acerca a cero. En consecuencia, estos dos modelos son capaces de reproducir el comportamiento viscoelástico de los polímeros en un limitado rango de frecuencia. Sin embargo, para el modelo de Zener se distingue el comportamiento característico de los materiales viscoelásticos, que se ilustró en la Figura 1.1(b).

Tabla 1.1

Modelos diferenciales clásicos

	Kelvin-Voigt	Maxwell	Zener
Representación			
Ecuación constitutiva	$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + c_1 \dot{\varepsilon}(t)$	$\sigma(t) + \frac{c_1}{E_1} \dot{\sigma}(t) = c_1 \dot{\varepsilon}(t)$	$\sigma(t) + \frac{c_1}{E_1} \dot{\sigma}(t) = E_0 \varepsilon(t) + c_1 \dot{\varepsilon}(t)$
Respuesta para $\sigma(t) = \sigma_0$			
Respuesta para $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$			
Módulo $E'(\omega)$	E_1	$\frac{E_1 \omega^2 c_1^2}{E_1^2 + \omega^2 c_1^2}$	$\frac{E_0 E_1^2 + E_1 \omega^2 c_1^2}{E_1^2 + \omega^2 c_1^2}$
Módulo $E''(\omega)$	ωc_1	$\frac{E_1^2 \omega c_1}{E_1^2 + \omega^2 c_1^2}$	$\frac{E_1 (E_1 - E_0) \omega c_1}{E_1^2 + \omega^2 c_1^2}$
Módulo $E^*(\omega)$ $E(\omega), \eta(\omega)$			

De las curvas de la respuesta transitoria se extrae que los modelos de Kelvin-Voigt y de Maxwell son capaces de reproducir la fluencia y la relaja-

ción respectivamente, pero no a la inversa, mientras que el de Zener reproduce ambos.

Ateniéndose a observaciones empíricas, el comportamiento real de los materiales poliméricos no puede ser representado en términos de simples relaciones diferenciales. Se puede obtener una mejor aproximación mediante modelos multi-elementos al superponer varios de los modelos básicos, conduciendo a una ecuación diferencial del tipo

$$\sigma(t) + \sum_{p=1}^{p_{\text{máx}}} a_p \frac{d^p \sigma(t)}{dt^p} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{q=1}^{q_{\text{máx}}} b_q \frac{d^q \varepsilon(t)}{dt^q}, \quad (1.11)$$

donde tanto la identificación de los coeficientes E_0 , a_p , $p_{\text{máx}}$, b_q y $q_{\text{máx}}$ como la resolución de la ecuación (1.11) resultan tan laborioso, por no decir imposible, que no es habitual emplear este tipo de modelos en aplicaciones prácticas excepto en ciertos análisis simples en el dominio de la frecuencia.

1.2.1.2 Modelos hereditarios

Aludiendo al principio de superposición de Boltzmann (1876), se desprende que los materiales viscoelásticos poseen memoria, es decir, la respuesta en un instante dado no depende únicamente del estado y de la carga actuales, sino que es función de toda su historia. Por lo tanto, cualquier modelo de material viscoelástico puede ser descrito en términos convolutivos mediante la integral de Stieltjes usando las funciones de relajación $G(t)$ y de fluencia $J(t)$, tal que

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \hat{t}) d\varepsilon(\hat{t}) \quad (1.12)$$

y

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \hat{t}) d\sigma(\hat{t}). \quad (1.13)$$

Si se asume que la historia de la tensión y de la deformación puede representarse mediante funciones continuas y derivables, las ecuaciones constitutivas satisfacen las integrales de Riemann o Duhamel

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\hat{t}) \frac{\partial \varepsilon(\hat{t})}{\partial \hat{t}} d\hat{t} \quad (1.14)$$

y

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\hat{t}) \frac{\partial \sigma(\hat{t})}{\partial \hat{t}} d\hat{t}, \quad (1.15)$$

donde las funciones de fluencia $J(t)$ y de relajación $G(t)$ deben verificar

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t G(\hat{t}) J(t-\hat{t}) d\hat{t} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t J(\hat{t}) G(t-\hat{t}) d\hat{t} = 1. \quad (1.16)$$

Un modelo de material viscoelástico se puede construir separando la función de relajación en una parte elástica $G_e(t)$ y otra viscosa $G_v(t)$,

$$G(t) = G_e(t) + G_v(t), \quad (1.17)$$

de manera que

$$G_e(t) = E_0 \quad (1.18)$$

y

$$G_v(t) = cg(t), \quad (1.19)$$

donde E_0 indica el módulo estático, c es el parámetro viscoso, y la función de amortiguamiento $g(t)$ se normaliza según

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = 1. \quad (1.20)$$

Haciendo uso de (1.17), la ecuación (1.14) resulta

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t (E_0 + cg(t-\hat{t})) \frac{\partial \varepsilon(\hat{t})}{\partial \hat{t}} d\hat{t}, \quad (1.21)$$

de modo que el módulo complejo se obtiene por medio de la transformada de Fourier de la ecuación (1.21), que junto a las propiedades de la integral de convolución, deriva en

$$E^*(\omega) = E_0 + i\omega c\tilde{g}(\omega), \quad (1.22)$$

donde $\tilde{g}(\omega)$ representa la transformada de Fourier de la función de amortiguamiento $g(t)$. Algunas de las funciones de amortiguamiento más utilizadas en la literatura se recogen en la Tabla 1.2, donde $\delta(t)$ y $H(t)$ representan la función delta de Dirac y la función Heaviside, respectivamente, y los coeficientes $\mu_{(\cdot)}$ y $\kappa_{(\cdot)}$ son parámetros de los modelos.

El modelo exponencial (Biot, 1955) es equivalente al de Zener, y el exponencial doble de Golla y Hughes (1985) es una combinación de dos exponenciales. El modelo hiperbólico se emplea para representar la fluencia de materiales poliméricos, al igual que otros modelos recogidos por Crawford (1998). El modelo gaussiano ha sido comparado con el exponencial por Adhikari y Woodhouse (2001).

Tabla 1.2
Diferentes funciones de relajación

Modelo	$g(t)$	$\tilde{g}(\omega)$
Kelvin-Voigt	$\delta(t)$	$H(\omega)$
Exponencial	$\mu_1 \exp(\mu_1 t)$	$\frac{\mu_1}{\mu_1 + i\omega}$
Exponencial doble	$\frac{\kappa_1 \mu_1 \exp(-\mu_2 t) + \kappa_2 \mu_3 \exp(-\mu_3 t)}{\kappa_1 + \kappa_2}$	$\frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} \left(\frac{\kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + i\omega} + \frac{\kappa_2 \mu_3}{\mu_3 + i\omega} \right)$
Hiperbólico	$\frac{1}{\mu_5(1 + \mu_5 t)^2}$	$-\pi\omega / \mu_5 \exp(i\omega / \mu_5)$
Gaussiano	$2\sqrt{\frac{\mu_1}{\pi}} \exp(-\mu_1 t^2)$	$\exp(-\omega^2 / 4\mu_4) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{i\omega}{2\sqrt{\mu_4}} \right) \right]$

Se puede definir un tiempo característico θ para todos estos modelos a partir del momento de primer orden de la función de amortiguamiento,

$$\theta = \int_0^{\infty} t g(t) dt. \quad (1.23)$$

Este tiempo característico θ es cero para el modelo de Kelvin-Voigt, o lo que es lo mismo, para el amortiguamiento viscoso. En consecuencia, este parámetro proporciona una herramienta para medir y comparar la memoria de las funciones de amortiguamiento $g(t)$, es decir, qué grado de no viscosidad presentan.

Ciertos materiales compuestos, como el hormigón polímero, presentan un comportamiento en frecuencia que no se refleja en ninguno de estos modelos (Cortés y Castillo, en imprenta): mientras que el factor de pérdida viene representado por el pico característico de los materiales viscoelásticos, el módulo de almacenamiento permanece constante. Este hecho se debe a que los áridos, que representan el 90% de la masa del hormigón polímero cuyo comportamiento es esencialmente elástico, proporcionan un módulo constante, mientras que la resina, el 10% de masa restante, provee la capacidad amortiguadora sin variar apenas la rigidez.

1.2.1.3 Modelos fraccionarios

La idea de emplear modelos fraccionarios o FD (del inglés, *fractional derivative models*) para caracterizar el fenómeno viscoelástico data de principios del siglo XX (Nutting, 1921; Germant, 1936, 1938). Hasta la década de los ochenta, los modelos fraccionarios se usaron exclusivamente para el ajuste de curvas teóricas a resultados experimentales (Caputo y Mainardi, 1971), hasta que Bagley y Torvik proporcionaron un sentido físico al modelo desde un punto de vista molecular (Bagley y Torvik, 1983a) y termodinámico (Bagley y Torvik, 1986), proponiendo restricciones para que tanto el trabajo de las fuerzas internas como la energía de disipación sean estrictamente positivos. En la actualidad, su trabajo durante los años ochenta

ta (Bagley y Torvik, 1979, 1983a, 1983b, 1985, 1986; Torvik y Bagley, 1984) se cita como el origen del uso de ecuaciones constitutivas con derivadas fraccionarias en el campo de la viscoelasticidad.

En las dos últimas décadas los modelos FD se han convertido en una potente herramienta para caracterizar el comportamiento de los materiales viscoelásticos tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. A diferencia de los modelos diferenciales, la relación $\sigma(t) - \varepsilon(t)$ se escribe en términos de derivadas de orden no entero, que se conocen también como derivadas no locales puesto que consideran la historia del sistema, y se representan por medio del operador $D^{(\cdot)}$. Así, el modelo FD de cuatro parámetros, también conocido como modelo de Zener generalizado, viene representado por

$$\sigma(t) + \tau^\alpha D^\alpha \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_\infty \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \quad (1.24)$$

que fue exhaustivamente analizado por Pritz (1996), quien identificó los parámetros del modelo mediante el ajuste a resultados experimentales de probetas de espuma de PVC. En efecto, el módulo complejo $E^*(\omega)$ en función de la frecuencia ω (rad/s) resulta

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, \quad (1.25)$$

de donde se deduce que E_0 y E_∞ representan los módulos estático y asintótico, respectivamente; el tiempo de relajación τ está relacionado con la frecuencia a la cual el factor de pérdida alcanza su máximo valor; y α es el parámetro fraccionario, concerniente al nivel de amortiguamiento. En efecto, $\alpha = 0$ representa el comportamiento elástico con un módulo de elasticidad $E = 0.5(E_0 + E_\infty)$, y para $\alpha = 1$, el modelo se convierte en el de Zener donde el parámetro viscoso c viene dado por

$$c = E_\infty \tau. \quad (1.26)$$

El parámetro fraccionario α para los polímeros generalmente se comprende entre 0.5 y 0.9. En la Figura 1.2(a) se compara el módulo de almacenamiento y el factor de pérdida en función de la frecuencia para un caso particular con los dos valores extremos del parámetro α .

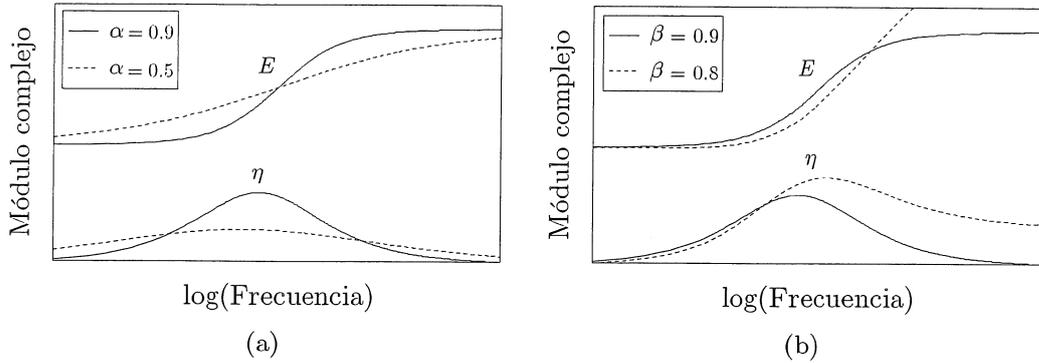


Figura 1.2. Representación del módulo complejo en función de la frecuencia para un modelo FD: (a) de cuatro parámetros según dos valores extremos del parámetro α ; y (b) de cinco parámetros para $\alpha = 0.9$ y dos órdenes diferentes del parámetro β .

En la Figura 1.2(a) se hace notorio el carácter asintótico previamente aludido del módulo de almacenamiento. También se manifiesta que el pico del factor de pérdida es simétrico (las abscisas se encuentran en escala logarítmica), y decrece hasta hacerse cero.

Una generalización de este modelo puede venir dada por el modelo FD de cinco parámetros (Bagley y Torvik, 1983b), que satisface

$$\sigma(t) + \tau^\beta D^\beta \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_\infty \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \quad (1.27)$$

donde las restricciones termodinámicas proveen que $\alpha \geq \beta$ (Bagley y Torvik, 1986), cuyos valores numéricos también suelen estar comprendidos entre 0.5 y 0.9. El módulo complejo resulta

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\beta}, \quad (1.28)$$

de manera que la representación asintótica del módulo de almacenamiento se pierde, el factor de pérdida deja de presentar un pico simétrico, y ade-

más este decrece hacia un valor finito en vez de hacerlo hacia cero, como se muestra en la Figura 1.2(b).

Pritz (2003) analiza otra variante del modelo FD de cinco parámetros dado por

$$\begin{aligned} \sigma(t) + \tau^\beta D^\beta \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_0 \tau^\beta D^\beta \varepsilon(t) \\ + (E_\infty - E_0) \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (1.29)$$

también con $\alpha \geq \beta$, y presenta dos ajustes a sendos resultados experimentales obtenidos sobre probetas poliméricas.

Resumiendo, se puede construir cualquier modelo fraccionario a partir de la relación más general

$$\left(1 + \sum_{l=1}^{l_{\max}} \tau_l^{\beta_l} D^{\beta_l} \right) \sigma(t) = \left(E_0 + \sum_{m=1}^{m_{\max}} E_m \tau_m^{\alpha_m} D^{\alpha_m} \right) \varepsilon(t), \quad (1.30)$$

aunque los modelos que habitualmente se encuentran en la literatura son los de cuatro y de cinco parámetros. La gran ventaja de los modelos FD respecto a los diferenciales es que aquellos necesitan menos parámetros que estos para lograr un mejor ajuste al comportamiento real de ciertos polímeros.

Durante los últimos años diferentes autores han empleado el modelo FD en diferentes aplicaciones tanto teóricas como experimentales: Eldred, Baker y Palazotto (1995) compararon el comportamiento del modelo Kelvin-Voigt frente a un modelo FD; Eldred et ál. (1996) llevaron a cabo un estudio sobre la respuesta transitoria de una barra viscoelástica caracterizada mediante un modelo FD utilizando diferentes métodos de integración numérica; Enelund y Lesieutre (1999) propusieron una formulación combinando deformaciones inelásticas con el operador fraccionario; Enelund y Olsson (1999) discutieron sobre la capacidad de diferentes modelos constitutivos para representar el comportamiento viscoelástico, resaltando el potencial de los modelos fraccionarios; Enelund, Mähler, Runesson y Josefson (1999) implementaron en un código de elementos finitos algoritmos para considerar modelos anisótropos tridimensionales; Stankovic y Atanackovic

(2002) desarrollaron un estudio de las vibraciones laterales de una viga con material viscoelástico caracterizado por un modelo FD; Atanackovic (2002) propuso una generalización del modelo Zener con un modelo fraccionario usando un método de variables internas; Hernández-Jiménez, Hernández-Santiago, Macias-García y Sánchez-González (2002) realizaron un estudio experimental sobre dos polímeros diferentes comparando las mediciones con lo predicho según un modelo de Maxwell generalizado; Ouis (2003) comparó resultados experimentales de elastómeros con los derivados de la simulación llevada a cabo mediante un modelo Zener generalizado; Adolfsson y Enelund (2003) desarrollaron un modelo fraccionario tridimensional para grandes deformaciones; Gil-Negrete (2004) propuso métodos de simulación para el comportamiento dinámico no lineal de apoyos de goma, incluyendo grandes deformaciones, fricción y comportamiento viscoelástico mediante modelos FD; Adolfsson, Enelund y Olsson (2005) establecieron una formulación basada en variables internas relativas a la tensión para reducir los esfuerzos computacionales.

En la Sección 1.2.4.3 se presta una mayor atención a los métodos numéricos que permiten tratar el operador fraccionario en el dominio del tiempo para la simulación de la respuesta transitoria de sistemas con amortiguamiento viscoelástico.

1.2.2 Técnicas experimentales

Las técnicas para determinar empíricamente las propiedades dinámicas de los materiales poliméricos se pueden agrupar en función del rango de frecuencia bajo estudio. En este contexto, Ward y Hadley (1993) proponen la siguiente clasificación:

1. Fenómenos cuasiestáticos por debajo de 1 Hz; ensayos de fluencia y de relajación (véase, por ejemplo, Turner (1983) para más detalles).
2. Ensayos a baja frecuencia hasta 10 Hz; vibraciones libres.

3. Ensayos a frecuencias medias hasta 100 Hz; vibraciones forzadas sin resonancia.
4. Ensayos a altas frecuencias entre 0.1 y 10 kHz; vibraciones forzadas con resonancia.
5. Ensayos por encima de 10 kHz; métodos de propagación de ondas (véase por ejemplo Hillström, Mossberg y Lundberg (2000) y sus referencias para los detalles).

Las frecuencias más influyentes en los sistemas mecánicos industriales oscilan desde el hercio hasta alguna centena de hercio, por lo que en esta revisión se hace hincapié en los métodos concernientes a este rango de frecuencia.

1.2.2.1 Ensayos en vibraciones libres

Algunas de las referencias que describen los ensayos en oscilaciones libres (Ward y Hadley, 1993; Goodman, 1996) los clasifican en ensayos de tracción y de torsión, según se desee obtener las propiedades de extensión o de cortadura, respectivamente. La idea es la de configurar un sistema cuyo comportamiento pueda ser representado por un modelo de un grado de libertad, como los representados en la Figura 1.3.

En la configuración de tracción, Figura 1.3(a), la rigidez compleja $k^* = k(1 + i\eta)$ de la probeta viscoelástica viene dada por

$$k^* = \frac{E^* A}{L}, \quad (1.31)$$

donde A y L son el área de la sección transversal y la longitud de la probeta, respectivamente. Con el propósito de obtener el módulo complejo $E^* = E(1 + i\eta)$, se saca la masa m fuera de su equilibrio mecánico y se registra su respuesta transitoria $x(t)$.

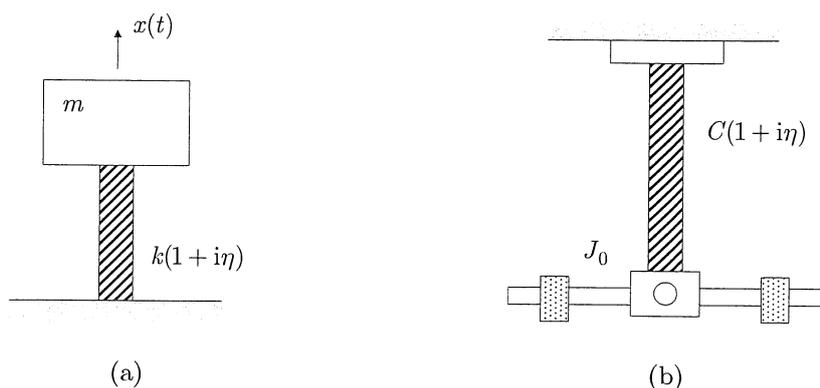


Figura 1.3. Configuración para los ensayos en oscilaciones libres: (a) tracción y (b) torsión.

El módulo de almacenamiento E se determina a partir del periodo de oscilación T_0 , dado por

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{EA}}, \quad (1.32)$$

y el factor de pérdida η se obtiene mediante la técnica del decremento logarítmico (véase la Figura 1.4), que consiste en medir la relación del desplazamiento entre dos picos separados un número entero de ciclos n ,

$$\eta = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{x(t_0)}{x(t_0 + nT_0)}, \quad (1.33)$$

donde t_0 representa un instante arbitrario para el que la respuesta presenta un máximo.

En la configuración del péndulo de torsión, Figura 1.3(b), lo que se registra es el ángulo de rotación de la barra de momento de inercia J_0 . La rigidez compleja de la probeta $C^* = C(1 + i\eta)$ viene dada por

$$C^* = \gamma \frac{G^* I_0}{L}, \quad (1.34)$$

donde I_0 es el momento cuadrático polar y γ es el coeficiente de forma ($\gamma = 1$ para la sección circular). El módulo de cortadura G y el factor de pérdida η , tal que $G^* = G(1 + i\eta)$, se pueden determinar de modo equiva-

lente al del ensayo de tracción. En ambas configuraciones, el material puede ser caracterizado en un amplio rango de frecuencias utilizando diversos valores de masa m y de inercia J_0 .

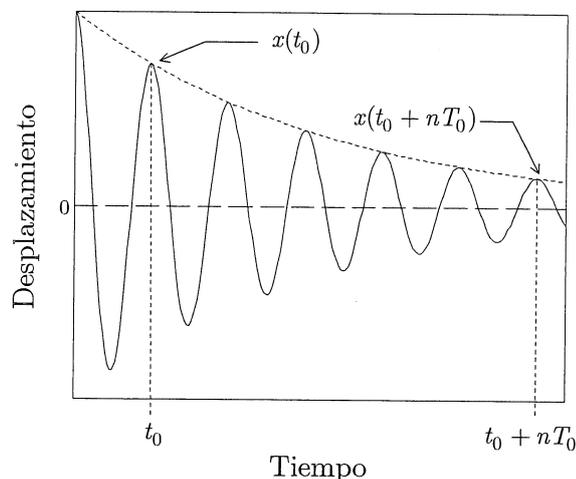


Figura 1.4. Respuesta transitoria de un sistema con un grado de libertad para la identificación del módulo complejo mediante la técnica del decremento logarítmico.

Recientemente, Cortés y Castillo (en imprenta) han aplicado un método para la extracción del módulo complejo en probetas de hormigón polímero y de fundición gris, que consiste en ajustar la respuesta transitoria de un modelo de varios grados de libertad a las medidas experimentales, haciendo uso del algoritmo de minimización de Nelder y Mead (1965).

1.2.2.2 Ensayos en vibraciones forzadas sin resonancia

Estos métodos consisten en someter una probeta a una carga armónica de frecuencia f y medir la deformación inducida. Se puede obtener el ciclo de histéresis mostrado en la Figura 1.5(a) representando en las abscisas la deformación medida y en ordenadas la tensión aplicada. La pendiente del eje mayor de la elipse está relacionada con el módulo, y la relación entre los ejes menor y mayor con el factor de pérdida. El área de la elipse representa la energía disipada en un ciclo por unidad de volumen (véase, por ejemplo, Sun y Lu (1995) para más detalles).

También se puede representar la tensión y la deformación en función del tiempo, como se indica en la Figura 1.5(b). El módulo se obtiene de la relación existente entre las amplitudes de la tensión y la de la deformación, y el factor de pérdida se calcula a partir del retraso ψ de esta, tal que

$$\eta = \tan(2\pi f\psi). \quad (1.35)$$

Actualmente, los modernos equipos que se usan en la técnica DMTA (del inglés, *dynamic mechanical thermal analysis*; véase por ejemplo Menard (1999) para los detalles) permiten caracterizar las propiedades viscoelásticas en un importante rango de temperatura y de frecuencia, hasta 200 Hz. Usando técnicas espectrales y multifrecuencia se pueden determinar de forma sencilla los coeficientes de los modelos WLF y de Arrhenius. Los equipos comerciales, como por ejemplo los de TA Instruments y los de Perkin Elmer, permiten configuraciones de ensayo de tracción, compresión, cortadura, flexión tres puntos y voladizo.

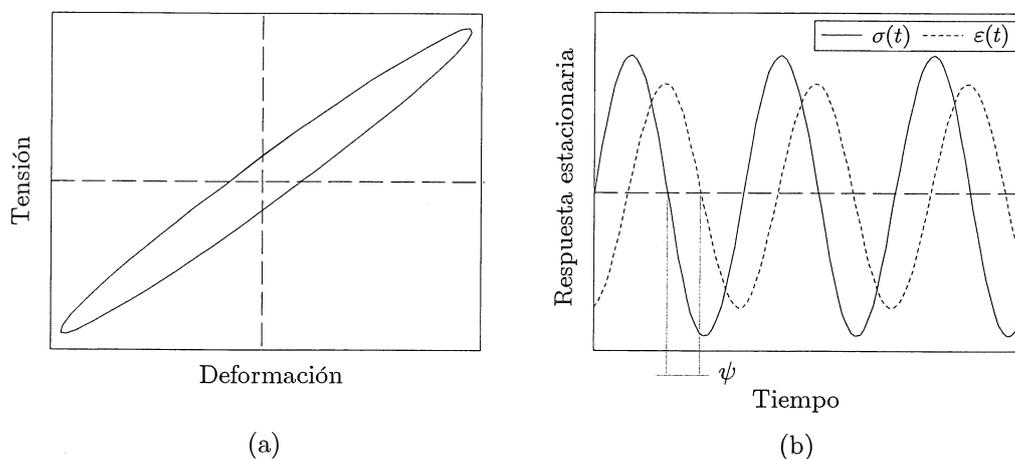


Figura 1.5. Respuesta ante una fuerza armónica: (a) ciclo de histéresis y (b) evolución de la tensión y de la deformación.

Recientemente, Caracciolo, Gasparetto y Giovagnoni (2004) han propuesto una técnica experimental para la completa caracterización de un material viscoelástico, determinando el coeficiente de Poisson y el módulo complejo de una probeta de pequeño tamaño sometida a una excitación sísmica. La probeta se instrumentaliza con galgas extensométricas para medir el coefi-

ciente de Poisson. El sistema se excita con un excitador electrodinámico, de manera que la aceleración sísmica de la base se mide con un acelerómetro y la velocidad de la probeta con un vibrómetro láser. El punto de medida de la velocidad se elige estratégicamente, coincidiendo con un nodo del segundo modo de vibración de la probeta, para asumir que la velocidad medida se debe primordialmente al primer modo. Esta configuración permite ensayar el material sin apenas variar sus propiedades de masa y de rigidez, aunque una técnica de estas características que no emplea las resonancias no es posible si no con un equipamiento muy preciso. Un inconveniente que presenta esta técnica es que a partir de cierta frecuencia, la respuesta puede no venir dada únicamente por el primer modo de vibración.

1.2.2.3 Ensayos en vibraciones forzadas con resonancia

Estos ensayos consisten en excitar los modos de vibración deseados en el rango de frecuencia de estudio. El módulo complejo se extrae a partir de los picos de resonancia de la función de respuesta en frecuencia (FRF) mediante diferentes técnicas (véase por ejemplo Jones (2001), Nashif et ál. (1985) o Ewins (2000) para una descripción más detallada de estas técnicas), de entre las cuales destaca el método HPB (del inglés, *half power bandwidth*).

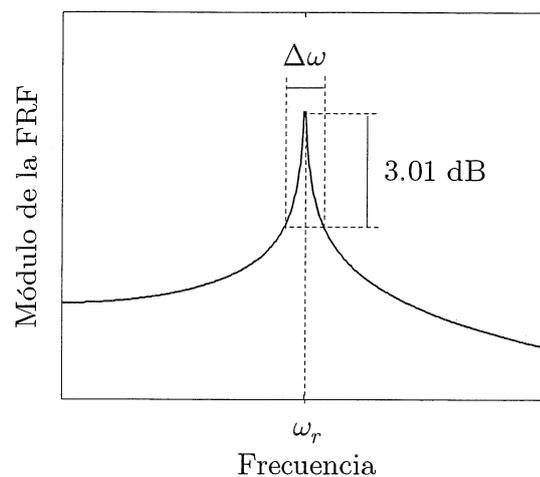


Figura 1.6. Módulo de la función de respuesta en frecuencia para la identificación del módulo complejo mediante la técnica HPB.

El módulo se calcula a partir de las frecuencias de resonancia ω_r de los modos r -ésimos, y el factor de pérdida relacionando el ancho de banda $\Delta\omega$, en el que la amplitud del pico se reduce en 3.01 dB (véase la Figura 1.6), con la frecuencia de resonancia ω_r , tal que

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{\omega_r}. \quad (1.36)$$

Para materiales poco rígidos con los que no se puede elaborar probetas autoportantes, la norma ASTM E 756-04 (2004) estandariza una técnica para extraer sus propiedades dinámicas, de manera que el material viscoelástico se adhiere a una probeta-soporte de material estructural, generalmente metálico como acero o aluminio, cuyo factor de pérdida puede ser considerado despreciable. Se excita la probeta en el rango de frecuencias de 0-5 kHz, y se mide el desplazamiento para obtener la función de respuesta en frecuencia. Esta norma establece que se debe emplear transductores sin contacto, tanto para la fuerza de excitación como para la medición de la respuesta, con el fin de no modificar las propiedades del sistema. Las configuraciones de viga contempladas por la norma se representan en la Figura 1.7: la asimétrica, la simétrica o de Van Oort y la sándwich. Las dos primeras se emplean para obtener las propiedades de extensión, y la última para las de cortadura. La extracción del módulo complejo se basa en las teorías de vigas homogeneizadas de Oberst y Frankenfeld (1952) y de Ross, Ungar y Kerwin (1959), que se describen en la sección siguiente.

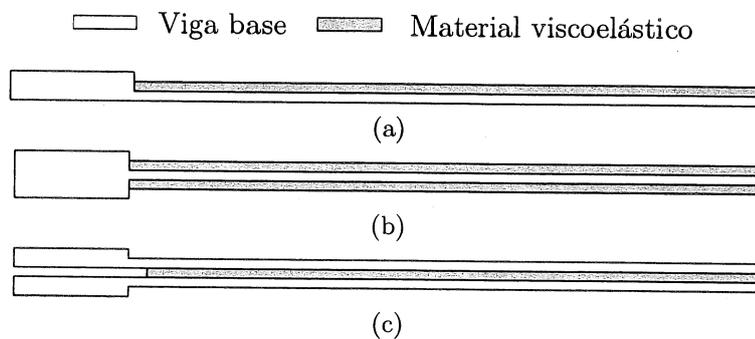


Figura 1.7. Probetas (a) asimétrica, (b) simétrica y (c) sándwich.

1.2.3 Modelos homogeneizados

Los tratamientos viscoelásticos destacan de entre las técnicas de amortiguación pasiva para reducir la amplitud de la vibración estructural. Se trata de una tecnología ampliamente utilizada en diversos sectores industriales (véanse por ejemplo los artículos de Rao (2003) y de Subramanian, Surampudi, Thomson, y Vallurupalli (2004) relativos a los sectores aeronáuticos y de automoción). En estructuras que trabajan a flexión, como vigas y placas, se utilizan las configuraciones en capa libre o FLD, y en capa confinada o CLD (del inglés, *free layer damping* y *constrained layer damping*, respectivamente), representadas en la Figura 1.8. La configuración FLD, en sus modalidades asimétrica y simétrica, es más sencilla de implementar mientras que la CLD es más efectiva en cuanto a la relación amortiguamiento-peso que introduce el núcleo viscoelástico. Respecto a otras técnicas de amortiguación, los tratamientos viscoelásticos presentan el inconveniente de añadir masa en el sistema original.

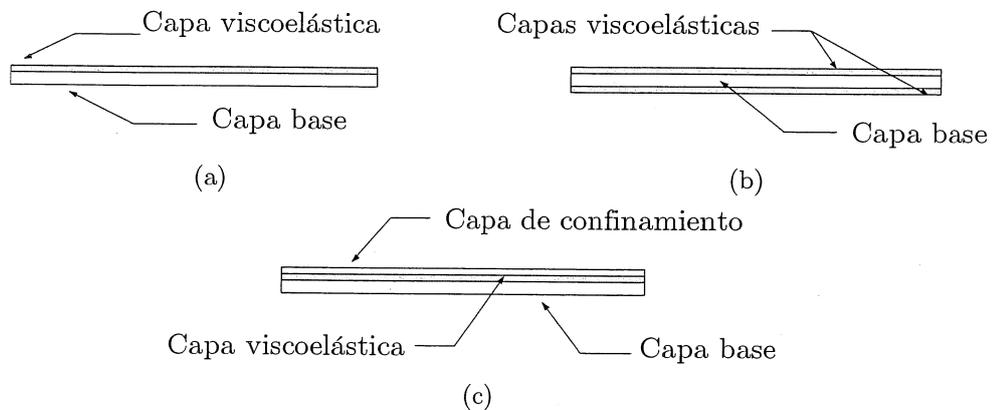


Figura 1.8. Configuraciones para los tratamientos superficiales viscoelásticos: (a) FLD asimétrica, (b) FLD simétrica, y (c) CLD.

La configuración FLD se consigue pegando una lámina del material viscoelástico sobre el componente estructural mediante un adhesivo, o bien aplicando una emulsión con brocha o pistola sobre la superficie a tratar debidamente preparada. Para la CLD, algunos fabricantes comercializan láminas del sándwich ya constituido para procesarlo posteriormente, o bien suministran la capa de confinamiento (generalmente de aluminio para mi-

nimizar la masa añadida) con el núcleo polimérico el cual se adhiere directamente sobre la estructura a tratar, o únicamente proveen un adhesivo para que sea aplicado entre dos láminas metálicas. Algunos proveedores de estos materiales son: Soundown Corporation, Hodgson & Hodgson Group Ltd., Wardle Storeys (Blackburn) Ltd. y Acoustical Solutions Inc.

A continuación se presentan los modelos de viga FLD y CLD que permiten, por un lado, determinar empíricamente el módulo complejo de materiales viscoelásticos poco rígidos, y por otro lado, permiten predecir el comportamiento dinámico de estructuras con tratamiento superficial amortiguador.

1.2.3.1 Modelos FLD

En la configuración FLD, el material trabaja bajo esfuerzos normales. Oberst y Frankenfeld (1952) determinaron un módulo complejo equivalente sumando la rigidez de flexión de cada una de las capas. A partir de la teoría de Euler-Bernoulli, la rigidez de flexión compleja equivalente B_{eq}^* satisface

$$B_{eq}^* = B_e^* + B_v^*, \quad (1.37)$$

donde $B_e^* = E_e I_e^*$ y $B_v^* = E_v^* I_v^*$ son la rigidez relativa a las capas elástica y viscoelástica, respectivamente, de manera que I_e^* y I_v^* son los momentos cuadráticos complejos de sendas secciones rectas, evaluados respecto al plano neutro.

Para la viga simétrica, estos vienen dados por

$$I_e^* = \frac{1}{12} b H_e^3 + b H_e \left(H_n^* - \frac{H_e}{2} \right)^2 \quad (1.38)$$

y por

$$I_v^* = \frac{1}{12} b H_v^3 + b H_v \left(H_e + \frac{H_v}{2} - H_n^* \right)^2, \quad (1.39)$$

donde H_e y H_v representan el espesor de las capas elástica y viscoelástica, y la posición del plano neutro H_n^* respecto a la base de la viga viene dada por

$$H_n^* = \frac{E_e H_e^2 + E_v^* H_v (2H_e + H_v)}{2(E_e H_e + E_v^* H_v)}. \quad (1.40)$$

El carácter complejo de las propiedades geométricas significa que estas no son constantes durante la vibración, si no que tanto la posición del plano neutro como consecuentemente los momentos de segundo orden, varían en el tiempo. Si los materiales fueran elásticos, todos los términos resultarían ser reales y las ecuaciones (1.37)-(1.40) conducirían a las expresiones clásicas de vigas homogeneizadas.

En cambio, para una viga FLD simétrica la posición del plano neutro sí que es constante, por lo tanto real, y viene dada por

$$H_n = \frac{H_e}{2} + H_v, \quad (1.41)$$

y los momentos de segundo orden, también reales, por

$$I_e = \frac{1}{12} b H_e^3 \quad (1.42)$$

y por

$$I_v = \frac{b H_v^3}{6} + \frac{b H_v}{2} (H_e + H_v)^2. \quad (1.43)$$

Aunque la formulación de Oberst y Frankenfeld (1952) está inicialmente deducida para la flexión de vigas, se puede adoptar una expresión similar para placas (Nashif et ál., 1985).

1.2.3.2 Modelos CLD

Las tecnologías CLD son ampliamente empleadas para la reducción de la vibración estructural en numerosas aplicaciones industriales (véase el artí-

culo de Li y Crocker (2005) para una revisión concerniente a métodos analíticos, numéricos y experimentales). En este caso, el material viscoelástico disipa energía al verse sometido a esfuerzos cortantes.

El modelo RKU, presentado por Ross et ál. (1959) para una viga simplemente apoyada, es uno de los primeros modelos desarrollados para vigas sándwich con núcleo viscoelástico, y es uno de los más usados en la actualidad. Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

1. Existe un plano neutro cuya posición varía con la frecuencia.
2. La deformación de la viga es senoidal.
3. El campo del desplazamiento en las intercaras del sándwich es continuo.
4. La mayor parte de la energía disipada se debe a los esfuerzos de cortadura del núcleo viscoelástico, este caracterizado por su módulo complejo dependiente de la frecuencia $G^*(\omega)$.
5. El desplazamiento transversal es idéntico para las tres capas de la misma sección transversal.

Este modelo es equivalente al de Oberst y Frankenfeld (1952) cuando el espesor de la capa de confinamiento tiende a cero. La segunda de las hipótesis mencionadas implica que el modelo RKU está inicialmente concebido para vigas simplemente apoyadas, aunque se pueden emplear unos factores correctores para otras condiciones de contorno (véase, por ejemplo, Jones (2001) para más detalles sobre dichos coeficientes), sobre todo para el primer modo. A partir del segundo modo, el modelo RKU es prácticamente aplicable para cualquier condición de contorno. En un trabajo reciente de Teng y Hu (2001) se analiza la influencia de los parámetros de diseño para estructuras CLD empleando el modelo RKU.

DiTaranto (1965) propuso un modelo que se describe con una ecuación diferencial de sexto orden en términos del desplazamiento longitudinal de las capas, cuyos resultados son independientes de las condiciones de contorno, lo que implica que se trata de una aproximación simple.

Mead y Markus (1969) desarrollaron un modelo de viga sándwich representado por una ecuación en derivadas parciales de sexto orden, escrita en términos del desplazamiento transversal, con el que estudiaron la influencia de las condiciones de contorno.

Yan y Dowell (1972) simplificaron el modelo anterior al asumir que la distribución de la tensión de cortadura es constante a lo largo del espesor del núcleo viscoelástico, resultando en una ecuación de cuarto orden. Por el hecho de considerar una distribución uniforme de la deformación de cortadura, la ecuación de este modelo es más sencilla de resolver que la de Mead y Markus (1969), pero no respeta el equilibrio de las fuerzas en las caras externas de las pieles en el estado de tensión plana. En consecuencia, este modelo difiere del anterior cuando el núcleo no es lo suficientemente rígido. No obstante, para niveles bajos de deformación de cortadura, los resultados proporcionados por los dos modelos son equivalentes.

Rao y Nakra (1974) introdujeron en la ecuación del movimiento términos referidos a las inercias de traslación longitudinal y de rotación de la sección transversal. Bajo estas hipótesis, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución hace aparecer modos de vibración de flexión y de cortadura, en función de las condiciones de contorno impuestas.

Macé (1994) desarrolló una teoría simplificada para vigas CLD con capa viscoelástica delgada, y propuso una discretización en elementos finitos cuyos resultados fueron comparados con los de otros modelos.

Todas estas teorías se conciben asumiendo que el comportamiento del núcleo del sándwich es elástico y lineal, para después adjuntar el carácter complejo a su módulo de cortadura y así contemplar la viscosidad. En cambio, Liu, Trogon y Yong (1999) presentaron una formulación en la que se considera un comportamiento hereditario genérico para el material viscoelástico, aunque no propusieron ningún ejemplo numérico. Galucio,

Deü y Ohayon (2004) expusieron una formulación para el análisis dinámico transitorio de vigas CLD en las que el material viscoelástico se representa mediante modelos fraccionarios.

En resumen, aunque el modelo RKU pierde precisión en diversos casos, por ejemplo cuando las inercias de rotación y de extensión no son despreciables, es el más sencillo de emplear en aplicaciones prácticas, por lo que hoy en día, cinco décadas después de que fuera enunciado, sigue siendo el más utilizado. Al igual que el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952), el RKU puede ser adaptado para su uso en placas (Nashif et ál., 1985).

1.2.4 Modelos y métodos numéricos

1.2.4.1 Introducción

Para poder analizar estructuras de geometría compleja, cuyo comportamiento no pueda ser equiparado al de una viga o una placa simple, es preciso hacer uso de métodos numéricos. El método de los elementos finitos (MEF, o FEM del inglés *finite element method*) ha logrado durante las últimas décadas una madurez tal que en la actualidad se encuentra profusamente extendido en el campo de la ingeniería mecánica para el diseño y optimización de productos y sistemas industriales. Las monografías referentes al MEF mayormente citadas en la literatura son la de Bathe (1996), la de Hughes (2000) y la de Zienkiewicz y Taylor (2004).

En dinámica estructural, el MEF discretiza las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el sistema para transformarlas en un sistema matricial de orden n dado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1.44)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa y \mathbf{K} es la matriz de rigidez (estas matrices generalmente son simétricas y definidas positivas), \mathbf{C} es la matriz de

amortiguamiento viscoso, y $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ son los vectores de desplazamientos, velocidades, aceleraciones y fuerzas nodales.

Para el análisis dinámico transitorio, la ecuación (1.44) se puede resolver mediante superposición modal si el sistema es lineal o, de forma más general, mediante métodos de integración directa como los métodos de Houbolt (1950), Newmark (1959), Wilson- θ (Wilson, 1962; Wilson, Farhoomand y Bathe, 1973) y Hilber, Hughes y Taylor (1977).

Para el análisis estacionario en el dominio de la frecuencia, el problema se enuncia transformando la ecuación (1.44) en el dominio de Fourier,

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{u}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}(\omega), \quad (1.45)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}(\omega)$ y $\tilde{\mathbf{F}}(\omega)$ representan la transformada de Fourier de $\mathbf{u}(t)$ y de $\mathbf{F}(t)$. Para resolver la ecuación (1.45), generalmente se emplea la superposición modal en los sistemas lineales, y un método directo en los no lineales (véase Ewins (2000) para más detalles). Los esfuerzos computacionales para la superposición modal radican en resolver el problema de los valores propios complejos, y para el método directo en resolver el sistema de ecuaciones (1.45) a las frecuencias de interés, con el inconveniente de perder información sobre la participación de cada modo. El análisis estacionario se simplifica si se emplea un modelo de amortiguamiento estructural, para el cual el sistema de ecuaciones viene dado por

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{H})\tilde{\mathbf{u}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}(\omega), \quad (1.46)$$

donde \mathbf{H} es la matriz de amortiguamiento estructural.

Como los materiales viscoelásticos introducen una no linealidad en el sistema al poseer coeficientes no constantes en las matrices de rigidez y/o de amortiguamiento, algunos investigadores han invertido esfuerzos en desarrollar modelos de amortiguamiento y métodos computacionales que permitan resolver las ecuaciones del movimiento de forma sencilla. En este apartado se presentan los trabajos más relevantes en este campo.

1.2.4.2 Modelos de amortiguamiento

Los modelos de amortiguamiento viscoelástico se pueden clasificar en modelos de amortiguamiento clásico, amortiguamiento no clásico y amortiguamiento no viscoso. Los dos primeros se caracterizan por poseer coeficientes constantes, mientras que los del no viscoso son dependientes de la frecuencia. Los modelos de amortiguamiento clásico son aquellos que implican la existencia de modos normales, o lo que es lo mismo, sus autovectores son reales, como sucede por ejemplo con el conocido amortiguamiento de Rayleigh (1877), mientras que los autovectores de un sistema con amortiguamiento no clásico son complejos. No obstante, un sistema con amortiguamiento no viscoso puede poseer o no modos normales.

Seguidamente se muestran diferentes modelos que se emplean para representar la matriz de amortiguamiento. En primer lugar se exponen las condiciones que debe cumplir un sistema para presentar modos normales. Después se revisan los modelos GHM y ADF, que siendo a priori modelos de amortiguamiento no viscoso, mediante el uso de variables internas y llevando a cabo las transformaciones adecuadas, se convierten en sistemas con amortiguamiento no clásico. Finalmente se tratan los modelos con derivadas fraccionarias.

Amortiguamiento clásico

Los sistemas con amortiguamiento clásico, aparte de poseer coeficientes constantes en las matrices de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} o estructural \mathbf{H} , se caracterizan porque estas se diagonalizan usando los autovectores del sistema sin amortiguamiento. Como generalmente las matrices de masa y de rigidez son simétricas, los autovectores son reales: entonces se dice que el sistema posee modos normales.

El más sencillo de los modelos clásicos es el modelo de amortiguamiento proporcional o de Rayleigh (1877), quien asume que la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa y/o de rigidez según

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K} \quad (1.47)$$

o

$$\mathbf{H} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K}, \quad (1.48)$$

si se trate de amortiguamiento viscoso o estructural, respectivamente, donde a_1 y a_2 son los coeficientes de proporcionalidad. Para el caso del amortiguamiento viscoso, Caughey y O'Kelly (1965) establecen que para que un sistema amortiguado posea modos normales, se debe cumplir que

$$\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{CM}^{-1}\mathbf{K}. \quad (1.49)$$

Esta condición la verifica el modelo de amortiguamiento de Caughey (1960), dado por

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K} + \sum_{i=3}^{i_{\text{máx}}} a_i \mathbf{K} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^{i-2}, \quad (1.50)$$

donde el orden $i_{\text{máx}}$ y los coeficientes a_i se pueden elegir, por ejemplo, mediante el ajuste a resultados experimentales, o bien, empleando los métodos propuestos por Bilbao, Avilés, Agirrebeitia y Ajuria (2006), que consisten en sustituir la matriz de amortiguamiento original por otra equivalente según criterios de energía modal y de energía disipada.

Amortiguamiento GHM

El modelo GHM (Golla, Hughes y McTavish) es la generalización del modelo exponencial doble (Golla y Hughes, 1985), previamente mencionado en el apartado 1.2.1.2. La forma final del modelo, que fue presentada por McTavish y Hughes (1993), emplea variables internas z_i relativas a miosciladores (véase la Figura 1.9), tal que

$$\mathbf{z}_i(s) = \frac{\hat{\omega}_i^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \mathbf{u}(s), \quad (1.51)$$

de manera que el módulo complejo en el dominio de Laplace resulta

$$E^*(s) = E_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \right), \quad (1.52)$$

donde E_0 , i_{\max} , $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\zeta}_i$ y $\hat{\omega}_i$ se obtienen mediante el ajuste a resultados experimentales.

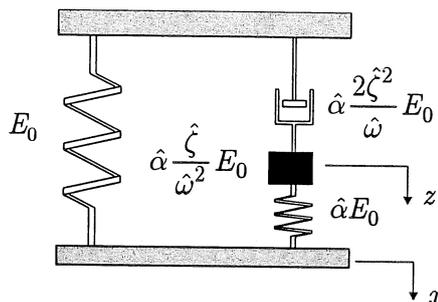


Figura 1.9. Representación del modelo GHM.

Este modelo ofrece el beneficio de transformar el sistema original en otro dado por la ecuación (1.44) con coeficientes constantes. Como la matriz de amortiguamiento viscoso resultante no satisface generalmente la ecuación (1.49), el sistema no posee modos normales, o lo que es lo mismo, el modelo GHM conduce a un sistema con amortiguamiento no clásico. Dado que se introducen variables internas, se incrementa el tamaño del sistema, con lo que el análisis modal se vuelve prácticamente impracticable, por lo que este modelo se emplea de forma exclusiva para el análisis dinámico transitorio por medio de técnicas de integración directa.

Amortiguamiento ADF

El modelo ADF (*anelastic displacement fields*), propuesto por Lesieutre y Bianchini (1995), se trata de la generalización del método unidimensional *augmenting thermodynamic fields* (ATF) desarrollado por Lesieutre y Mingori (1990). En este modelo, se separa el desplazamiento resultante $\mathbf{u}(t)$ en una componente elástica $\mathbf{u}_e(t)$ y otras i_{\max} componentes inelásticas $\mathbf{u}_{a,i}(t)$ (el subíndice $(\bullet)_a$ se debe al término *anelastic*),

$$\mathbf{u}_e(t) = \mathbf{u}(t) - \sum_{i=1}^{i_{\text{máx}}} \mathbf{u}_{a,i}(t). \quad (1.53)$$

Con este modelo se emplea un módulo complejo en el dominio de Fourier que satisfaga

$$E^*(\omega) = E_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{i_{\text{máx}}} \Delta_i \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right), \quad (1.54)$$

donde los parámetros del material E_0 , $i_{\text{máx}}$, Δ_i y Ω_i se evalúan mediante el ajuste a curvas experimentales. Al igual que para el modelo GHM, se logra un sistema con amortiguamiento no clásico, y por las mismas razones, sólo se emplea para obtener la respuesta transitoria mediante métodos directos.

Los modelos GHM y ADF se han evaluado con éxito en estudios recientes, principalmente en técnicas híbridas de control activo-pasivo (véanse por ejemplo los trabajos de Lam (1997), Wang (2001), Da Silva (2003) y Fung y Yau (2004)). Trindade, Benjeddou y Ohayon (2001) concluyeron a partir de los resultados de un trabajo previo (Trindade et ál., 2000) que el modelo ADF es más eficiente que el GHM en cuanto a que precisa de menos parámetros de material para obtener resultados equivalentes. Friswell, Inman y Lam (1997) propusieron una mejora de estos métodos con el fin de disminuir el número de parámetros a utilizar, y más recientemente, Adhikari y Wagner (2004) han desarrollado un método para integrar en el tiempo un modelo exponencial, en el que eliminando un importante número de variables internas, se reducen considerablemente las necesidades computacionales.

Amortiguamiento FD

Los modelos con derivadas fraccionarias o FD, que se enunciaron en la Sección 1.2.1.3 desde el punto de vista del material, tienen la ventaja de que con pocos parámetros se consigue reproducir la dependencia en fre-

cuencia de las propiedades de algunos polímeros. Generalmente, un sistema estructural amortiguado con materiales caracterizados por un modelo FD no posee modos normales, amén de presentar matrices de rigidez y de amortiguamiento variables en frecuencia. En cuanto a la respuesta transitoria, el tratamiento del operador fraccionario supone un esfuerzo adicional, y será tratado en detalle en la sección siguiente.

1.2.4.3 Métodos numéricos para el modelo FD

El cálculo fraccionario se trata de una disciplina que históricamente se ha visto relegada a la matemática teórica, pero desde hace unas pocas décadas se le ha atribuido diferentes aplicaciones a esta rama del análisis matemático. Las cuatro monografías de referencia que habitualmente se citan son las de Hilfer (2000), Podlubny (1999), Miller y Ross (1993) y la más clásica de Oldham y Spanier (1974), aunque recientemente Kilbas, Srivastava y Trujillo (2006) han publicado un nuevo libro con interesantes aplicaciones.

La derivada de orden α de una función $f(t)$, $0 < \alpha < 1$, puede expresarse según la definición de Riemann-Liouville,

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\hat{t})}{(t-\hat{t})^\alpha} d\hat{t}, \quad (1.55)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma de argumento real x , dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\hat{t}} \hat{t}^{x-1} d\hat{t}. \quad (1.56)$$

Esta función representa la función factorial generalizada, satisfaciendo

$$x! = \Gamma(x+1), \quad (1.57)$$

lo que coincide con la definición clásica del factorial cuando x es un número entero. La ecuación (1.55) indica que la derivada fraccionaria es un operador no local, el cual contempla toda la historia de la función, siendo

rador no local, el cual contempla toda la historia de la función, siendo útil para caracterizar la memoria de los polímeros.

El tratamiento numérico clásico del operador fraccionario se recoge en el texto de Oldham y Spanier (1974), donde se exponen diferentes métodos. Uno de los más eficientes para un orden de derivación $0 < \alpha < 1$ es el denominado G1, que se basa en la definición de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov (véase también por ejemplo el libro de Podlubny (1999) para más detalles).

La definición de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov consiste en escribir las derivadas de orden entero de una función mediante su pasado, de modo que la primera derivada viene dada por

$$D^1 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (1.58)$$

la segunda por

$$D^2 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2}, \quad (1.59)$$

la tercera por

$$D^3 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{(\Delta t)^3}, \quad (1.60)$$

etcétera, pudiéndose deducir que la derivada n -ésima satisface

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right), \quad (1.61)$$

donde

$$N = t / \Delta t \quad (1.62)$$

y donde se ha empleado el binomio de Newton

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad (1.63)$$

que, utilizando la función gamma,

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j-1)}, \quad (1.64)$$

la ecuación (1.61) se puede transformar en

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} f(t-j\Delta t) \right). \quad (1.65)$$

Sustituyendo el orden entero n de la derivada de la ecuación (1.65) por un orden real α cualquiera, la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria resulta

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(t-j\Delta t) \right), \quad (1.66)$$

o, finalmente,

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t-j\Delta t) \right), \quad (1.67)$$

donde a los términos A_{j+1} se les denomina coeficientes de Grünwald-Letnikov, o simplemente de Grünwald, que verifican

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}. \quad (1.68)$$

De la ecuación (1.67) se desprende que la derivada fraccionaria se construye empleando toda la historia de la función, ponderada por los coeficientes de Grünwald-Letnikov, lo que pone en evidencia la memoria del operador fraccionario. Para evitar el uso de la función gamma en las aplicaciones

numéricas, se utilizan las siguientes propiedades de estos coeficientes de ponderación:

$$A_1 = 1, \quad (1.69)$$

$$A_{j+1} = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j \quad (1.70)$$

y, si $\alpha > -1$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_{j+1} = 0. \quad (1.71)$$

A esta última propiedad se la conoce como la memoria corta del operador fraccionario, e implica que la historia más reciente es más influyente que la más lejana.

Por lo tanto, el método G1 para aproximar numéricamente la derivada fraccionaria (véase Oldham y Spanier (1974) para más detalles sobre este y otros métodos numéricos) consiste en considerar un paso de integración Δt finito y aproximar la ecuación (1.67) como

$$D^\alpha f(t) \approx \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t - j\Delta t). \quad (1.72)$$

Recientemente, Diethelm, Ford, Freed y Luchko (2005) han presentado una selección de algoritmos más actuales. A continuación se revisan una serie de métodos desarrollados en los últimos años para sistemas estructurales: Enelund y Lesieutre (1999) propusieron un modelo de elementos finitos combinando un campo de desplazamientos inelástico con derivadas fraccionarias; Gusella y Terenzi (2001) definieron dos métodos numéricos para resolver la ecuación del movimiento de sistemas de n grados de libertad con amortiguamiento expresado mediante derivadas fraccionarias, que son versiones adaptadas del método de las diferencias finitas centrales y del método implícito de Newmark con aceleración constante; Ingman y Suzdalnitsky (2001) presentaron un método numérico convergente para la solución de la ecuación del movimiento fraccionaria mediante la transformación de la ecuación integral de Volterra; Yuan y Agrawal (2002) mos-

traron un método numérico para un sistema masa-muelle-amortiguador fraccionario, transformando la ecuación del movimiento en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden mediante la fórmula integral de Laguerre, aunque Schmidt y Gaul (2006a) han demostrado recientemente que dicho modelo es equivalente a emplear un número finito de resortes y amortiguadores; Adolfsson, Enelund y Larsson (2004) han propuesto una técnica de integración numérica con historia dispersa para reducir los esfuerzos computacionales; Schmidt y Gaul (2006b) han desarrollado un método basado en la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria, que simplifica el proceso de cálculo pero conserva al mismo tiempo sus propiedades.

En lo que concierne al análisis de la respuesta transitoria de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico usando el método de los elementos finitos, Bagley y Torvik (1985) fueron de los primeros autores en presentar una aplicación usando esta técnica, llevando a cabo el estudio de una viga con tratamiento CLD.

Dos años más tarde, Padovan (1987) presentó un excelente artículo en el que se desarrollan diferentes algoritmos, en los que el material viscoelástico se caracteriza mediante modelos FD. En esta formulación, se aplica el principio de los trabajos virtuales dando lugar a una ecuación del movimiento fraccionaria, la cual se propone resolver mediante superposición modal y mediante métodos directos, tanto explícitos, implícitos como mixtos, empleando el método G1 para la discretización del operador fraccionario. Schmidt y Gaul (2002) implementaron la formulación de Padovan (1987) en un código de elementos finitos estándar y estudiaron un caso tridimensional, donde los parámetros del modelo FD fueron identificados por medio del ajuste a resultados experimentales en los dominios temporal y frecuencial. Estos algoritmos presentan un importante inconveniente, que es el de la necesidad de calcular y memorizar el estado tensional en cada paso de integración, lo que implica importantes recursos computacionales.

Una década después de que se publicase el trabajo de Padovan (1987), Enelund y Josefson (1997) presentaron una formulación basada en el principio de superposición de Boltzmann (1876), en la que no se precisa

del cálculo previo de la tensión, si no que se debe resolver una ecuación del movimiento matricial con términos convolutivos.

Escobedo-Torres y Ricles (1998) desarrollaron una formulación especialmente concebida para sistemas con materiales tanto elásticos como viscoelásticos, que consiste en ensamblar las matrices de los elementos finitos en el dominio de Laplace; aplicando la transformada inversa, se obtiene una ecuación del movimiento fraccionaria que se resuelve numéricamente mediante un algoritmo basado en las diferencias finitas centrales y en el método G1. La ventaja que presenta este método es que no precisa del cálculo de las tensiones para resolver los desplazamientos, aunque un inconveniente importante es que el esquema explícito empleado es condicionalmente estable, hecho que restringe su uso considerablemente.

1.2.4.4 El problema de los valores propios complejos

Haciendo uso de la técnica de los elementos finitos, el problema generalizado de los valores propios para sistemas estructurales sin amortiguamiento viene representado por el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K}\phi_r = \lambda_r \mathbf{M}\phi_r, \quad (1.73)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} puede ser definida positiva o semipositiva, y la matriz de masa \mathbf{M} es definida positiva. Siendo ambas simétricas, el valor y vector propios r -ésimos λ_r y ϕ_r son reales, con $r \leq n$, donde n indica el tamaño del sistema.

Dos monografías relativas al problema de los valores propios en sistemas matriciales son las de Saad (1992) y de Chatein (1993). Los métodos numéricos que generalmente se emplean en dinámica estructural se recogen en la mayoría de los textos sobre elementos finitos (Bathe, 1996; Hughes, 2000; Zienkiewicz y Taylor, 2004). Estos métodos se pueden clasificar en técnicas iterativas (*vector iteration method, subspace iteration method...*) y técnicas de transformación (*Jacobi, Lanczos...*). Mientras que aquellos se

usan generalmente en problemas de pequeña dimensión, estos son especialmente eficaces en sistemas de tamaño considerable.

El problema de los valores propios complejos en sistemas con matriz de amortiguamiento estructural \mathbf{H} considera la matriz de rigidez compleja $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + i\mathbf{H}$, de modo que el sistema lineal resulta

$$\mathbf{K}^* \phi_r^* = \lambda_r^* \mathbf{M} \phi_r^*, \quad (1.74)$$

donde tanto los autovalores λ_r^* como los autovectores ϕ_r^* son complejos (excepto si el sistema posee modos normales, en cuyo caso los autovectores son reales) y se pueden determinar mediante los métodos complejos de Lanczos (1950) o de Arnoldi (1951). El método IRAM (*implicitly restarted Arnoldi method*) desarrollado por Sorensen (1992) para sistemas de gran tamaño, está implementado en el software gratuito ARPAK (Lehoucq, Sorensen y Yang, 1998) y en el programa comercial Matlab (MATLAB Version 6, 2001). Leung (1995) presentó una alternativa, el método *complex subspace iteration*, pero no lo comparó con otros métodos en cuanto a esfuerzos computacionales.

Estos métodos demandan importantes esfuerzos computacionales, por lo que en casos prácticos es habitual emplear métodos aproximados. En la actualidad, el método MSE (*modal strain energy*) es el más aceptado en aplicaciones de ingeniería. Algunos de los primeros autores en utilizar esta técnica son Jonson, Kienholtz y Rogers (1981), Soni (1981), Soni y Bogner (1982), Jonson y Kienholtz (1982) y Kluesener y Drake (1982). Este método consiste en resolver el sistema no amortiguado, considerar que el amortiguamiento no influye en el autovector ϕ_r , y obtener el factor de pérdida modal a partir del ratio

$$\eta_r = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \eta_i E_{r,i}}{\sum_{i=1}^{i_{\max}} E_{r,i}}, \quad (1.75)$$

donde η_r es el factor de pérdida que se estima para el modo r -ésimo, $i_{\text{máx}}$ es el número total de elementos finitos, η_i es el factor de pérdida del material del elemento finito i -ésimo, y $E_{r,i}$ representa la energía de deformación debida al modo r -ésimo almacenada en el elemento finito i -ésimo, dada por

$$E_{r,i} = \frac{1}{2} \phi_r^T \mathbf{K}_i \phi_r, \quad (1.76)$$

donde \mathbf{K}_i es la matriz de rigidez del elemento finito i -ésimo y $(\cdot)^T$ el operador de la trasposición. Aunque se asume que el método MSE es aplicable únicamente en sistemas con bajo amortiguamiento, con $\eta_r < 0.1$, en las referencias citadas previamente se comprueba que en aplicaciones prácticas con vigas sándwich se puede obtener precisión suficiente incluso con materiales de elevado amortiguamiento.

Cuando se tiene en cuenta la dependencia en frecuencia de las propiedades mecánicas de los materiales viscoelásticos, el problema de los valores propios se convierte en un sistema de ecuaciones no lineales

$$\mathbf{K}^*(\omega_r) \phi_r^* = \lambda_r^* \mathbf{M} \phi_r^*, \quad (1.77)$$

donde

$$\omega_r = \text{Re}(\sqrt{\lambda_r^*}). \quad (1.78)$$

La solución exacta se obtiene implementando los métodos aludidos con anterioridad en algoritmos iterativos, con lo que consume tanto tiempo, que en aplicaciones prácticas autores como Trindade et ál. (2000) emplean una modalidad iterativa del método MSE.

El problema de los autovalores complejos en sistemas con matriz de amortiguamiento viscoso viene dado por el sistema de segundo orden

$$(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}. \quad (1.79)$$

La forma más habitual de resolver este problema consiste en transformar el sistema cuadrático en las ecuaciones del espacio de estado, resultando en el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix} = s_r \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix}. \quad (1.80)$$

Aunque las matrices son reales y simétricas, no son definidas positivas, de modo que tanto el autovalor s_r como el autovector \mathbf{u}_r r -ésimos son complejos, excepto si el sistema posee modos normales en cuyo caso el autovector es real. Así, se han de emplear los algoritmos convenientes, por ejemplo, el método de transformación QZ (Moler y Stewart, 1973), para resolver dicho problema.

El método aproximado equivalente al MSE es el utilizado en el UMSM (*uncoupled mode superposition method*, véase Özgüven (2002) para más detalles), que se fundamenta en considerar que el autovector \mathbf{u}_r es el mismo que el del sistema no amortiguado, por lo que el autovalor s_r se puede escribir como

$$s_r = \omega_r \left(-\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right), \quad (1.81)$$

donde la frecuencia natural ω_r y el factor de amortiguamiento ζ_r se obtienen de

$$\omega_r^2 = \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{K} \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (1.82)$$

y de

$$\zeta_r = \frac{1}{2\omega_r} \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{C} \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r} = \frac{c_r}{2\omega_r m_r}, \quad (1.83)$$

respectivamente, donde m_r , c_r y k_r describen los parámetros modales de masa, amortiguamiento y rigidez (Ewins, 2000). Este método ofrece resultados lo suficientemente precisos cuando el amortiguamiento es pequeño, $\zeta_r < 0.01$.

Bajer, Belsky y Zeng (2003) han desarrollado recientemente un nuevo método aproximado para la extracción de los modos complejos, el cual ha

sido implementado en el programa ABAQUS/Standard V6.4. Con este método se parte de los resultados del sistema no amortiguado de orden n y calcula únicamente N modos normales. Se proyecta las matrices originales sobre el subespacio modal para obtener un sistema cuadrático de menor tamaño que el original, de orden $N \times N$, que puede ser resuelto en el espacio de estado. Los vectores propios en la base original se calculan deshaciendo el cambio de base. La ventaja de este método es el menor tiempo computacional requerido, pero se puede perder precisión en sistemas con elevado amortiguamiento.

La desventaja de la transformación en el espacio de estado radica en que se duplica el tamaño del sistema. Por lo tanto, algunos investigadores han propuesto nuevos métodos que trabajan en el espacio original. Así, Ruge (1998) presentó el método *complex vector iteration*, pero no comparó sus resultados con los clásicos. Fischer (2000) resolvió el sistema cuadrático directamente mediante el método *complex subspace iteration*. Este autor sí comparó su método con otros dos: el método de Lanczos y el método de Hessenberg con factorización Schur+. Pero las conclusiones no son claras, puesto que intenta comparar el tiempo computacional de la solución completa de estos dos, con el tiempo que precisa su método para extraer únicamente algunos autovectores. En cualquier caso, los métodos *complex vector iteration* y *complex subspace iteration* se presentan como efectivos en procesos iterativos como en el análisis de optimización y de sensibilidad, puesto que en cada iteración se puede partir del resultado de la iteración anterior, lo que incrementa la velocidad de convergencia.

Considerando la variación de las propiedades dinámicas de los materiales viscoelásticos, o lo que es lo mismo, considerando un modelo de amortiguamiento no viscoso, el problema de los valores propios se obtiene al escribir la ecuación del movimiento (Adhikari, 2002b)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \int_0^t \mathbf{G}_v(t - \hat{t})\dot{\mathbf{u}}(\hat{t})d\hat{t} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (1.84)$$

en el dominio de Laplace, resultando

$$\left(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \tilde{\mathbf{G}}_v(s_r) + \mathbf{K}\right) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (1.85)$$

donde la matriz $\mathbf{G}_v(t)$ viene definida según la función de relajación empleada para representar el comportamiento viscoelástico, como se indicó en la Sección 1.2.1.2, y $\tilde{\mathbf{G}}_v(s)$ denota su transformada de Laplace. Para extraer los autovalores del sistema no lineal (1.85), se deben obtener las m raíces de la ecuación característica

$$\det\left(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \tilde{\mathbf{G}}_v(s_r) + \mathbf{K}\right) = 0, \quad (1.86)$$

de manera que su orden m es generalmente mayor que $2 \times n$,

$$m = 2 \times n + p, \quad (1.87)$$

lo que significa que el carácter no viscoso del sistema introduce p polos extra, donde $p \geq 0$. Consecuentemente, los modos del sistema se pueden clasificar en modos elásticos, relativos a los $2 \times n$ autovalores complejos agrupados en pares conjugados, y modos no viscosos, que aparecen debido a la naturaleza viscoelástica del mecanismo de amortiguamiento. Para sistemas pasivos estables, estos p autovalores extra son negativos y reales, por lo que sus modos no viscosos asociados son modos con amortiguamiento supercrítico, es decir, no exhiben un comportamiento oscilatorio. Muller (2005) ha llevado a cabo un exhaustivo e interesante análisis sobre un sistema de un grado de libertad.

Adhikari (2001) analizó las condiciones para las que un sistema con amortiguamiento no viscoso presenta modos normales, demostrando que se debe satisfacer cualquiera de las tres siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_v(t) = \mathbf{G}_v(t)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}, \quad (1.88)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{G}_v(t) = \mathbf{G}_v(t)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} \quad (1.89)$$

o

$$\mathbf{M}(\mathbf{G}_v(t))^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{G}_v(t))^{-1}\mathbf{M}. \quad (1.90)$$

Resumiendo, aparte del método aproximado MSE iterativo, no existen métodos adaptados para resolver el problema de los valores propios complejos en sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico, en los que las matrices se componen de coeficientes que no son constantes. Además, en estos casos es frecuente emplear métodos directos para obtener la respuesta en frecuencia, lo que conlleva a la pérdida de información sobre la participación de cada modo.

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Análisis del estado del arte

De la revisión bibliográfica se concluye que existen carencias en cuanto a las técnicas de análisis de reducción de la vibración estructural sobre los que se puede incidir, concernientes a: (I) los procedimientos experimentales para caracterizar materiales viscoelásticos; (II) los modelos de comportamiento de material; métodos numéricos eficaces para el análisis por elementos finitos (III) de la respuesta transitoria empleando modelos FD, (IV) del problema de los valores propios complejos en sistemas con amortiguamiento variable en frecuencia, y (V) de la respuesta en frecuencia sin perder información sobre la participación modal; y de (VI) modelos de viga con tratamiento viscoelástico. A continuación se desarrollan cada uno de estas cuestiones, de donde se desprenden objetivos que han dirigido esta investigación.

En cuanto a las técnicas experimentales, la norma ASTM E 756-04 (2004) establece una metodología para extraer las funciones de respuesta en frecuencia de las probetas haciendo uso de transductores sin contacto, tanto para la fuerza de excitación como para la medición de la respuesta, con el fin de no modificar las propiedades del sistema. Caracciolo et ál. (2004) propusieron una técnica en la que, en vez de aplicar una fuerza sin contacto, la probeta se excita por la base mediante un movimiento sísmico,

y la extracción de las propiedades mecánicas se realiza asumiendo que la respuesta se debe exclusivamente al primer modo de vibración de la probeta. Así, el primer objetivo consiste en proponer una técnica para caracterizar materiales viscoelásticos que, respetando al máximo la norma ASTM E 756-04 (2004), se sirva de los beneficios del trabajo de Caracciolo et ál. (2004).

Relativo a los modelos matemáticos que describen el comportamiento de los materiales viscoelásticos, ninguno de los modelos existentes en la actualidad son capaces de representar el comportamiento de ciertos materiales compuestos, como pudieron comprobar Cortés y Castillo (en imprenta) en el hormigón polímero: el módulo de almacenamiento es constante en frecuencia como el de los materiales elásticos, mientras que el factor de pérdida presenta el máximo característico de los materiales viscoelásticos.

En lo que compete al análisis por elementos finitos para la respuesta dinámica transitoria de sistemas estructurales con tratamiento viscoelástico empleando modelos fraccionarios, se trata de una disciplina que en la actualidad no ha logrado alcanzar todavía una madurez suficiente para aplicaciones prácticas. En efecto, las formulaciones propuestas por Padovan (1987) son la referencia para numerosos autores, pero presentan el inconveniente de tener que calcular y almacenar en cada paso de integración el estado tensional, precisando de importantes recursos computacionales. Por ello, se ha considerado que existe una importante área de actuación para la mejora de las prestaciones de los algoritmos de Padovan (1987).

Concerniente al problema de los valores propios complejos, los sistemas estructurales con amortiguamiento variable en frecuencia discretizados en elementos finitos presentan un tamaño lo suficientemente grande para que no sea posible emplear métodos exactos en las aplicaciones prácticas. De hecho, en la literatura se encuentran aproximaciones como el método MSE iterativo, pero aún y todo, consume importante tiempo computacional porque en cada iteración debe resolver el problema de los valores propios del sistema no amortiguado, amén de tratarse de un método que ofrece resultados precisos únicamente en sistemas con bajo amortiguamiento.

Respecto a la respuesta estacionaria en el dominio de la frecuencia de los sistemas estructurales con amortiguamiento variable, el uso de métodos directos no contempla la participación individual de cada modo en la respuesta total, lo que supone un importante inconveniente en aplicaciones prácticas de ingeniería.

Haciendo referencia a los modelos para vigas con tratamiento viscoelástico, se ha podido constatar que el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952) sigue siendo el más empleado en configuraciones FLD. Este modelo se basa en la teoría de vigas delgadas, por lo que no presenta suficiente precisión en vigas cortas o gruesas en las que los esfuerzos de cortadura adquieren especial relevancia. Además, tal y como se formula el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952), tiene el inconveniente de que no se puede utilizar para el análisis transitorio de sistemas con modelos fraccionarios.

1.3.2 Objetivos

A partir del análisis de la revisión bibliográfica mostrado en la sección anterior, a continuación se enuncian los siete objetivos que han guiado este trabajo:

1. Proponer una técnica experimental para caracterizar el módulo complejo de materiales viscoelásticos tomando como referencia la norma ASTM E 756-04 (2004), pero sustituyendo la respuesta forzada de la probeta por la respuesta ante un movimiento sísmico de la base.
2. Desarrollar un modelo hereditario para el comportamiento de materiales viscoelásticos que presentan un módulo de almacenamiento constante en frecuencia y un factor de amortiguamiento variable mostrando el pico característico de la zona de transición de los materiales viscoelásticos.

3. Proponer una formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales con tratamientos amortiguadores mediante materiales viscoelásticos caracterizados por medio de modelos FD, mejorando las prestaciones de la formulación de Padovan (1987).
4. Desarrollar un método aproximado para resolver eficazmente el problema de los valores propios complejos en sistemas estructurales con tratamiento viscoelástico, donde el material amortiguador se caracteriza por medio de modelos cuyas propiedades mecánicas son variables en frecuencia.
5. Formular una metodología para estudiar la respuesta en frecuencia de los sistemas con amortiguamiento variable incluyendo las contribuciones individuales de cada modo de vibración, con el fin de disponer de una herramienta equivalente a la que se emplea en los sistemas no amortiguados o con amortiguamiento constante.
6. Enunciar un modelo de viga homogeneizado para el análisis por elementos finitos de vigas FLD con el material viscoelástico caracterizado según un modelo fraccionario.
7. Analizar el campo de aplicación del modelo clásico de vigas FLD en cuanto al espesor de las capas, y proponer un modelo de viga gruesa que considere el efecto de los esfuerzos cortantes.

1.3.3 Organización de la memoria de tesis

El trabajo desarrollado para la consecución de los siete objetivos expuestos en la sección anterior se recoge en los cuatro capítulos siguientes.

El Capítulo 2 hace referencia a la caracterización de materiales viscoelásticos, tanto desde un punto de vista teórico como experimental. En primer lugar, se describe la técnica experimental que se ha diseñado para

obtener las propiedades mecánicas de materiales viscoelásticos que no son lo suficientemente rígidos para elaborar una probeta autoportante. Esta técnica toma como referencia la norma ASTM E 756-04 (2004), pero en vez de emplear la respuesta forzada que implica la utilización de un transductor de fuerza sin contacto, se hace uso de la respuesta a una excitación sísmica. A continuación, se presenta una caracterización teórica del material ensayado mediante el ajuste de los modelos Zener y FD de cinco parámetros a los resultados experimentales. Por último, se incluye el análisis de un modelo hereditario para la representación de materiales compuestos que presentan un módulo de almacenamiento constante en frecuencia, pero un factor de pérdida que varía como comúnmente lo hacen los materiales viscoelásticos en la zona de transición.

En el Capítulo 3, se presenta una formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales con tratamientos FLD donde el material amortiguador se caracteriza mediante un modelo FD de cinco parámetros. A diferencia de Padovan (1987) que emplea el principio de los trabajos virtuales, en este trabajo se propone utilizar el método de los residuos ponderados sobre la ecuación local del balance de la cantidad de movimiento, proporcionando un sistema matricial con derivadas fraccionarias. Estas derivadas no locales se aproximan mediante la definición de Grünwald-Letnikov, lo que permite desarrollar esquemas de integración directa tanto explícitos como implícitos. Finalmente, se presentan aplicaciones numéricas para comparar los resultados obtenidos con la formulación propuesta con los de Padovan (1987), además de analizar la influencia del tiempo de integración y del truncamiento de los coeficientes de Grünwald-Letnikov.

Los métodos desarrollados para el análisis en frecuencia de los sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico se tratan en el Capítulo 4. Se contemplan tanto modelos de amortiguamiento estructural como viscoso, de manera que para el caso más general, las propiedades del material amortiguador son dependientes de la frecuencia. Por un lado, se describen los métodos numéricos aproximados para extraer los valores y vectores propios complejos que, partiendo de la solución no amortiguada, es-

timan las propiedades modales complejas a partir de las derivadas de los autovectores. Por otro lado, para sortear el inconveniente de la pérdida de información que implica el uso de los métodos directos para obtener la respuesta en frecuencia, se propone el método de la superposición de las funciones de contribución modal. Este consiste en evaluar la respuesta particular de cada modo para las frecuencias de interés teniendo en cuenta la no linealidad suscitada por la variación de las propiedades modales.

Con el ánimo de reducir el costo computacional en la simulación de vigas con tratamientos FLD, en el Capítulo 5 se describen dos formulaciones homogeneizadas con la determinación de dar solución a sendas carencias inherentes al modelo clásico de Oberst y Frankenfeld (1952): por un lado la imposibilidad de realizar análisis temporales, y por otro lado su restricción de uso a vigas delgadas. Así, la primera de las formulaciones homogeneizadas que se proponen, permite llevar a cabo el análisis dinámico transitorio en vigas FLD donde el material viscoelástico se caracteriza mediante un modelo FD de cinco parámetros. La segunda formulación se desarrolla para el estudio de la respuesta en frecuencia de vigas FLD compuestas por capas gruesas, en las cuales la cortadura adquiere especial relevancia.

Finalmente, en el Capítulo 6 se resumen las principales conclusiones del trabajo de investigación realizado, resaltando las aportaciones fundamentales y las limitaciones de los resultados obtenidos. Además, se plantean las líneas de investigación futuras para perfeccionar y ampliar el trabajo realizado hasta el momento.

2

Técnicas de caracterización

En este capítulo se recoge el trabajo desarrollado en relación a las técnicas de caracterización de materiales viscoelásticos, desde los puntos de vista experimental y teórico.

En primer lugar se describe el procedimiento experimental que se ha empleado para extraer el módulo complejo de un material polimérico que no es lo suficientemente rígido para elaborar probetas autoportantes, como sucede habitualmente en aplicaciones FLD para reducir la amplitud de la vibración estructural. Dicha técnica toma como referencia la norma ASTM E 756-04 (2004), pero en lugar de utilizar la respuesta ante una fuerza de excitación aplicada mediante un transductor sin contacto, se hace uso de la respuesta a la excitación sísmica de la base.

A continuación se presenta una caracterización teórica del material ensayado, mediante el ajuste de los modelos Zener y FD de cinco parámetros a los resultados experimentales.

Para finalizar, se incluye el análisis de un nuevo modelo hereditario que se ha desarrollado para la caracterización de materiales compuestos que presentan un módulo de almacenamiento constante en frecuencia, propio del comportamiento elástico, pero con un factor de pérdida que exhibe el pico característico del comportamiento viscoelástico.

2.1 Introducción

La dependencia en frecuencia de las propiedades mecánicas de los materiales viscoelásticos implica que su caracterización experimental se debe llevar a cabo mediante técnicas específicas. Así, para materiales poco rígidos que no son apropiados para elaborar probetas estructurales, la norma ASTM E 756-04 (2004) establece un procedimiento para identificar el módulo complejo de extensión y de cizalladura. En el capítulo anterior ya se ha mencionado que para obtener el módulo de cortadura se emplea la configuración CLD (*constrained layer damping*), mientras que para el de extensión se utiliza la FLD (*free layer damping*).

La norma indica que las probetas deben ser ensayadas en voladizo, y para minimizar todas las fuentes de amortiguamiento excepto la del material que se investiga, se deben emplear transductores sin contacto, tanto para la aplicación de la fuerza como para la medición de la respuesta. Una vez obtenida la respuesta en frecuencia, el módulo de almacenamiento del material viscoelástico E_v se obtiene a partir de las frecuencias de resonancia, y el factor de pérdida η_v se deduce aplicando el método HPB (*half power bandwidth*) sobre los picos de resonancia.

Con la intención de respetar dicha norma lo máximo posible, pero con el ánimo de eliminar de la cadena de medida el transductor de fuerza sin contacto, este capítulo de la memoria de tesis presenta, en primer lugar, la investigación desarrollada en relación a la medición del módulo complejo $E_v^* = E_v(1 + i\eta_v)$ de un material polimérico, haciendo uso de la respuesta de las probetas ante un movimiento sísmico de la base. Este modo de excitación ya fue empleado por Caracciolo et ál. (2004), extrayendo el módulo complejo a partir de una técnica que no considera las resonancias, a diferencia de lo que se expone a continuación.

La investigación se centra sobre la configuración FLD en sus versiones asimétrica y simétrica, cuya sección transversal se representa en la Figura 2.1. Los espesores de la capa base y de la amortiguadora se represen-

mientras que el factor de pérdida muestra el máximo característico de la zona de transición del comportamiento viscoelástico, proporcionado por los materiales poliméricos aglutinantes. También se incluye el ajuste de dicho modelo a resultados experimentales obtenidos por Cortés y Castillo (en imprenta) en probetas de hormigón polímero.

2.2 Caracterización experimental

2.2.1 Materiales y probetas

Se midieron las propiedades de la tela amortiguadora de 1.59 mm de espesor (1/16") proporcionada por la empresa Soundown Corporation. Dado el carácter poco rígido de dicho material, la caracterización del mismo se llevó a cabo mediante la norma ASTM E 756-04 (2004), la cual establece que el material viscoelástico debe ser adherido sobre un soporte metálico. Esta capa base metálica fue fabricada a partir de chapa laminada de acero inoxidable AISI 316 L. Se ensayaron tres tipos de probetas: de acero (SS), y de acero con tratamiento viscoelástico en sus configuraciones asimétrica (AFLD) y simétrica (SFLD). La notación que se empleó para designar las diferentes muestras fue : "tipo de viga"- "espesor de la capa base en décimas de milímetro"- "longitud en milímetros"- "número de muestra". Por ejemplo, la probeta SFLD-15-250-2 representa una viga tratada con doble capa amortiguadora, el espesor de capa base es $H_e = 1.5$ mm , su longitud $L = 250$ mm , y se trata del segundo ejemplar ensayado.

Las probetas SS se utilizaron para identificar el módulo de Young del material de la capa base. Para materiales con bajo amortiguamiento, es habitual considerar que esta propiedad es constante en frecuencia. En total se ensayaron seis probetas SS, cuya relación longitud-espesor fue de 120 para asegurar que los efectos de la cortadura fueran despreciables. La Tabla 2.1 contiene la geometría y la densidad ρ_e de las probetas SS.

La Tabla 2.2 recoge las propiedades de las probetas ensayadas en configuración AFLD, y la Tabla 2.3 las de las probetas SFLD. Se consideraron tres longitudes de viga diferentes: 180, 200 y 250 mm. Los límites inferior y superior son los recomendados por la norma para asegurar, por un lado, que los efectos de la cortadura son despreciables, y por otro lado, que los desplazamientos se encuentran dentro del rango lineal. Para evaluar la influencia de la relación de espesores T , se elaboraron probetas con 1.0 y 1.5 mm de espesor nominal de la capa base.

Tabla 2.1

Propiedades de las probetas SS

Referencia	L (± 0.5 mm)	b (± 0.05 mm)	H_e (± 0.005 mm)	ρ_e (± 48 kg/m ³)
SS-10-120-1	120	9.85	1.045	7782
SS-10-120-2				
SS-10-120-3				
SS-15-180-1	180	10.20	1.515	7782
SS-15-180-2				
SS-15-180-3				

2.2.2 Técnica experimental

La cadena de medida se representa en la Figura 2.2. El movimiento sísmico de la base se produjo con un excitador electrodinámico Ling Dynamic Systems Vibrator Model 406. La excitación consistió en un ruido blanco en un rango de frecuencias hasta 400 Hz, que es característico de las fuentes de excitación en automoción (Subramanian et ál., 2004). La aceleración de la base $\ddot{s}(t)$ se midió con un acelerómetro piezoeléctrico B&K Type 4370, y la velocidad $\dot{x}(t)$ del extremo libre de las probetas en voladizo con un vibrómetro láser OMETRON VS 100. La adquisición y el tratamiento de las señales se realizó con el analizador OROS OR34 de cuatro canales basado en PC, configurando ventanas Hanning tanto para la señal de excitación como para la de la respuesta. La resolución en frecuencia fue 0.125 Hz, lo que implica que las medidas se componen de un total de 3201 datos.

Tabla 2.2
Propiedades de las probetas AFLD

Referencia	L (± 0.5 mm)	b (± 0.15 mm)	H_e (± 0.005 mm)	H_v (± 0.02 mm)	ρ_e (± 48 kg/m ³)	ρ_v (± 40 kg/m ³)
AFLD-10-180-1	180					
AFLD-10-180-2						
AFLD-10-200-1	200	9.85	1.045	1.52	7782	1429
AFLD-10-200-2						
AFLD-10-250-1	250					
AFLD-10-250-2						
AFLD-15-180-1	180					
AFLD-15-180-2						
AFLD-15-200-1	200	10.00	1.515	1.56	7782	1429
AFLD-15-200-2						
AFLD-15-250-1	250					
AFLD-15-250-2						

Tabla 2.3
Propiedades de las probetas SFLD

Referencia	L (± 0.5 mm)	b (± 0.15 mm)	H_e (± 0.005 mm)	H_v (± 0.02 mm)	ρ_e (± 48 kg/m ³)	ρ_v (± 25 kg/m ³)
SFLD-10-180-1	179					
SFLD-10-180-2						
SFLD-10-200-1	199	9.85	1.045	2.97	7782	1423
SFLD-10-200-2						
SFLD-10-250-1	250					
SFLD-10-250-2						
SFLD-15-180-1	181					
SFLD-15-180-2						
SFLD-15-200-1	201	10.00	1.515	3.09	7782	1423
SFLD-15-200-2						
SFLD-15-250-1	251					
SFLD-15-250-2						

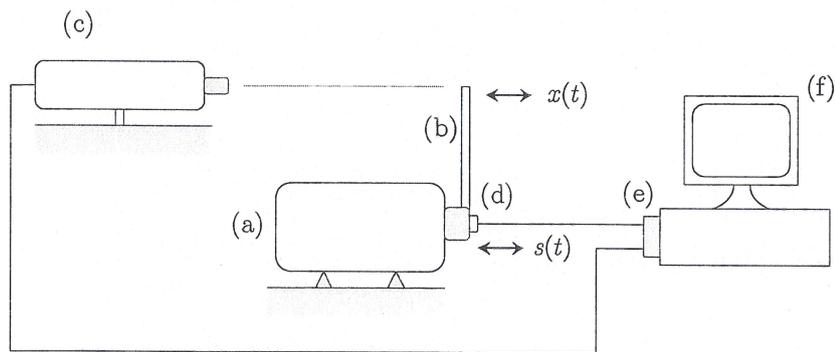


Figura 2.2. Cadena de medida: (a) excitador electrodinámico, (b) probeta, (c) vibrómetro láser, (d) acelerómetro, (e) analizador de espectros, y (f) ordenador personal.

La temperatura ambiente durante la ejecución de los ensayos fue de $19 \pm 1^\circ\text{C}$. La Figura 2.3 muestra una fotografía de uno de los ensayos realizados, en la que se aprecia una de las probetas amarradas al excitador electrodinámico, y el acelerómetro emplazado en la base de la probeta. Asimismo se puede advertir el haz de luz procedente del generador láser que incide sobre el extremo libre de la probeta.

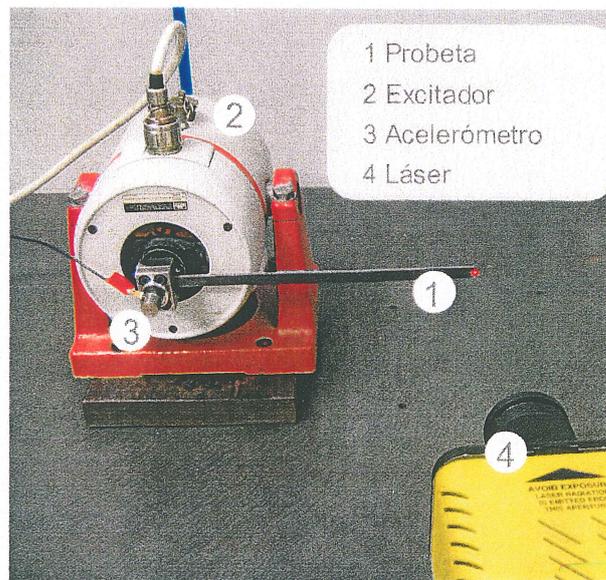


Figura 2.3. Fotografía del sistema de medida.

2.2.3 Procedimiento numérico

La norma ASTM E 756-04 (2004) establece que el factor de pérdida de la viga compuesta se evalúa haciendo uso del método HPB sobre los picos de resonancia de la respuesta forzada de las probetas dispuestas en voladizo. A continuación se deduce que dicho método también puede ser empleado con la respuesta sísmica. Para ello, se analiza un sistema de un grado de libertad con un amortiguador viscoelástico, representado en la Figura 2.4, donde el desplazamiento de la base se representa por $s(t)$, y el de la respuesta se indica con $x(t)$.

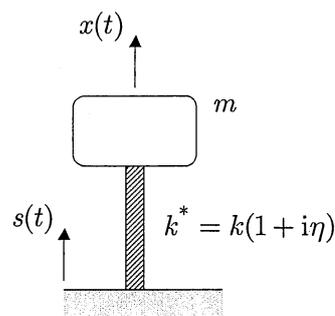


Figura 2.4. Sistema de un grado de libertad de masa m con amortiguador viscoelástico y excitado por la base.

La masa del sistema es m , y el amortiguador se caracteriza mediante la rigidez compleja k^* , dada por

$$k^* = k(1 + i\eta), \quad (2.2)$$

donde k y η son la rigidez elástica y el factor de pérdida del amortiguador, respectivamente. La ecuación del movimiento resulta

$$m\ddot{x}(t) + k^* x(t) = k^* s(t), \quad (2.3)$$

donde $\ddot{x}(t)$ representa la aceleración. Si el desplazamiento de la base es armónico, la función de transferencia en régimen permanente de la ecuación (2.3) es

$$\frac{X^*}{S^*} = \frac{1 + i\eta}{1 + i\eta - r^2}, \quad (2.4)$$

donde X^* y S^* indican la amplitud compleja de los desplazamientos, y $r = \omega/\omega_0$ es la relación entre la frecuencia angular de la excitación ω y la frecuencia natural del sistema $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. A la frecuencia de resonancia, es decir para $r = 1$, la amplitud A de la ecuación (2.4) resulta

$$A = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta}. \quad (2.5)$$

A partir de esta relación se pueden deducir los valores r_1 y r_2 que reducen la amplitud de la función de transferencia hasta $A/\sqrt{2}$, que son

$$r_1 = \sqrt{1 - \eta} \quad (2.6)$$

y

$$r_2 = \sqrt{1 + \eta}, \quad (2.7)$$

respectivamente. Atendiendo a las indicaciones del método HPB, el ancho de banda $\Delta r = r_2 - r_1$ resulta

$$\Delta r = \frac{2\eta}{\sqrt{1 + \eta} + \sqrt{1 - \eta}}. \quad (2.8)$$

Si el factor de pérdida η es pequeño, entonces Δr toma prácticamente su mismo valor, pero la diferencia entre ambos se vuelve más patente a medida que el factor de pérdida η se hace mayor. Este hecho se puede apreciar en la Figura 2.5, en la que se muestra la desviación entre Δr y η . Si se admite un error inferior al 0.5%, se puede considerar que $\Delta r = 0.20$ es el límite hasta el cual el factor de pérdida η toma el mismo valor que aquel. A partir de este límite, las diferencias crecen de forma exponencial.

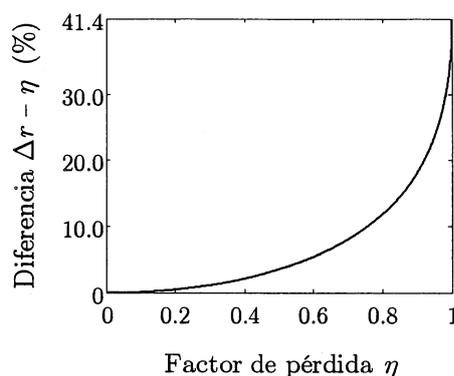


Figura 2.5. Diferencia (%) entre el ancho de banda Δr y el factor de pérdida η .

Una vez obtenidos la frecuencia de resonancia f_n y el ancho de banda Δr_n de los modos de flexión n -ésimos a partir de los picos de resonancia de la respuesta sísmica, las propiedades de las probetas se extraen atendiendo a la norma ASTM E 756-04 (2004), quien considera los modelos homogeneizados aludidos en el capítulo anterior.

Así, el módulo de Young E_e del acero de las probetas SS se deduce a partir de la teoría de Euler-Bernoulli, resultando

$$E_e = \frac{12\rho_e L^4 f_n^2}{H_e^2 C_n^2}, \quad (2.9)$$

donde C_n es el coeficiente del modo n -ésimo.

Para las probetas AFLD, el módulo de almacenamiento E_v y el factor de pérdida η_v del material amortiguador se obtienen de

$$E_v = \frac{E_e \left(\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4T^2(1 - \alpha)} \right)}{2T^2} \quad (2.10)$$

y de

$$\eta_v = \frac{\eta_c(1 + MT)}{MT} \frac{(1 + 4MT + 6MT^2 + 4MT^3 + M^2T^4)}{(3 + 6T + 4T^2 + 2MT^3 + M^2T^4)}, \quad (2.11)$$

respectivamente, donde

$$M = E_v / E_e, \quad (2.12)$$

η_c es el factor de pérdida del modo c -ésimo de la viga compuesta, obtenido mediante el método HPB, y los coeficientes β y α vienen dados por

$$\beta = 4 + 6T + 4T^2 \quad (2.13)$$

y por

$$\alpha = (f_c / f_n)^2 (1 + DT), \quad (2.14)$$

respectivamente, donde

$$D = \rho_v / \rho_e \quad (2.15)$$

es la relación de densidades, f_c es la frecuencia natural medida del modo c -ésimo de la viga compuesta, y f_n es la frecuencia natural de modo n -ésimo de únicamente la base metálica, con $c = n$, que puede ser estimada a partir de

$$f_n = \frac{C_n}{\sqrt{12}} \frac{H_e}{L^2} \sqrt{\frac{E_e}{\rho_e}}. \quad (2.16)$$

Para el caso de las probetas SFLD, las propiedades del material viscoelástico se deducen de

$$E_v = E_e \frac{(f_m / f_n)^2 (1 + 2DT) - 1}{8T^3 + 12T^2 + 6T} \quad (2.17)$$

y de

$$\eta_v = \eta_m \left(1 + \frac{1}{M(8T^3 + 12T^2 + 6T)} \right), \quad (2.18)$$

donde f_m y η_m son la frecuencia natural y el factor de pérdida para el modo m -ésimo de la viga compuesta, donde $m = n$.

2.2.4 Resultados y discusión

2.2.4.1 Resultados de las probetas SS

Tal y como se ha descrito con anterioridad, la norma establece que en primer lugar se ha de caracterizar el material metálico, cuyo amortiguamiento puede ser despreciado. Por lo tanto, el módulo de Young E_e es el único resultado a extraer de las probetas SS, para poder obtener posteriormente las propiedades del material viscoelástico. Así, en la Tabla 2.4 se muestran la frecuencia natural f_1 de la primera resonancia y el módulo de elasticidad calculado a partir de la ecuación (2.9). De esta tabla se puede remarcar que la dispersión de los resultados para la primera frecuencia de resonancia es prácticamente inexistente, por lo que se toma el valor promedio $E_e = 176.2 \pm 4.0 \times 10^9$ Pa. La incertidumbre señalada es originada por la inexactitud de las propiedades de las probetas, recogidas en la Tabla 1.1. El valor obtenido para el módulo del acero E_e es un 8.7% más bajo que el valor estándar del módulo de elasticidad de este tipo de material, igual a 193×10^9 Pa (MatWeb Material Property Data), aunque esta diferencia es habitual entre propiedades determinadas en ensayos estáticos y dinámicos.

Tabla 2.4
Resultados de las probetas SS

Referencia	$f_1(\pm 0.06 \text{ Hz})$	$E_e(\pm 4.0 \times 10^9 \text{ Pa})$
SS-10-120-1	55.8	176.6
SS-10-120-2		
SS-10-120-3		
SS-15-180-1	35.9	175.7
SS-15-180-2		
SS-15-180-3		

2.2.4.2 Resultados de las probetas AFLD

Los resultados de las probetas AFLD se muestran en la Tabla 2.5 para los modos primero y tercero. La ausencia de resultados para el segundo modo y para los casos marcados como no disponibles (ND) se debe al ruido introducido por una resonancia interna del excitador alrededor de 150 Hz.

La frecuencia natural f_c y el factor de pérdida η_c de la viga compuesta, y el módulo de almacenamiento E_v y el factor de pérdida η_v del material amortiguador, vienen indicados en las columnas una a cuatro.

Sobre estos resultados se puede señalar que la incertidumbre de las frecuencias de resonancia f_c se debe a la resolución de las medidas, y es la misma para todas las probetas. En cambio, la concerniente a la del factor de pérdida de la viga compuesta η_c es originada por la interpolación lineal que fue necesario llevar a cabo para aplicar el método HPB, y es función de la densidad de datos que componen los picos de resonancia, como se expone a continuación.

Por un lado, la incertidumbre sobre el factor de pérdida η_c incrementa cuando la frecuencia disminuye, o lo que es lo mismo, a medida que la longitud de la probeta es mayor. En efecto, los picos de resonancia de menor frecuencia natural están constituidos por pocos puntos experimentales, por lo que al aplicar el método HPB la interpolación lineal induce mayor incertidumbre. Este hecho se puede constatar en la Figura 2.6(a), en la que se representa una ampliación del primer pico de resonancia de dos probetas de diferente longitud, con una incertidumbre del 0.8% y del 4.1%, respectivamente.

Por otro lado, la incertidumbre sobre el factor de pérdida η_c es prácticamente nula para las frecuencias más altas, puesto que los picos de resonancia se componen de docenas de puntos experimentales, como se representa en la Figura 6(b), la cual ilustra los modos primero y tercero de la probeta AFLD-10-250-1. Para el tercer modo, se ha señalado una incertidumbre de 0.0005 para η_c puesto que los resultados se han truncado con 3 cifras decimales.

Tabla 2.5
Resultados de las probetas AFLD

Referencia	Modo 1					Modo 3				
	f_c (± 0.06 Hz)	η_c	E_v (10^9 Pa)	η_v	f_c (± 0.06 Hz)	η_c (± 0.0005)	E_v (10^9 Pa)	η_v		
AFLD-10-180-1	23.6	0.121 ± 0.001	0.88 ± 0.14	0.96 ± 0.18	ND	ND	ND	ND		
AFLD-10-180-2	24.1	0.137 ± 0.001	1.22 ± 0.14	0.82 ± 0.10	ND	ND	ND	ND		
AFLD-10-200-1	19.5	0.133 ± 0.003	1.18 ± 0.14	0.82 ± 0.11	346.1	0.159	1.35 ± 0.14	0.88 ± 0.10		
AFLD-10-200-2	19.1	0.126 ± 0.003	0.88 ± 0.14	0.99 ± 0.18	346.6	0.161	1.35 ± 0.14	0.88 ± 0.10		
AFLD-10-250-1	12.3	0.122 ± 0.005	0.96 ± 0.14	0.89 ± 0.15	217.5	0.131	1.08 ± 0.14	0.87 ± 0.14		
AFLD-10-250-2	12.5	0.119 ± 0.005	1.16 ± 0.14	0.75 ± 0.10	217.2	0.137	1.06 ± 0.14	0.93 ± 0.14		
AFLD-15-180-1	34.1	0.073 ± 0.002	0.87 ± 0.29	1.15 ± 0.57	ND	ND	ND	ND		
AFLD-15-180-2	34.1	0.072 ± 0.002	0.91 ± 0.29	1.09 ± 0.51	ND	ND	ND	ND		
AFLD-15-200-1	27.8	0.077 ± 0.003	1.06 ± 0.29	1.01 ± 0.38	ND	ND	ND	ND		
AFLD-15-200-2	27.5	0.063 ± 0.003	0.75 ± 0.29	1.13 ± 0.71	ND	ND	ND	ND		
AFLD-15-250-1	17.7	0.065 ± 0.008	0.94 ± 0.29	0.97 ± 0.43	314.6	0.086	1.28 ± 0.29	0.95 ± 0.50		
AFLD-15-250-2	17.8	0.062 ± 0.008	1.08 ± 0.29	0.80 ± 0.29	315.3	0.071	1.35 ± 0.29	0.75 ± 0.32		

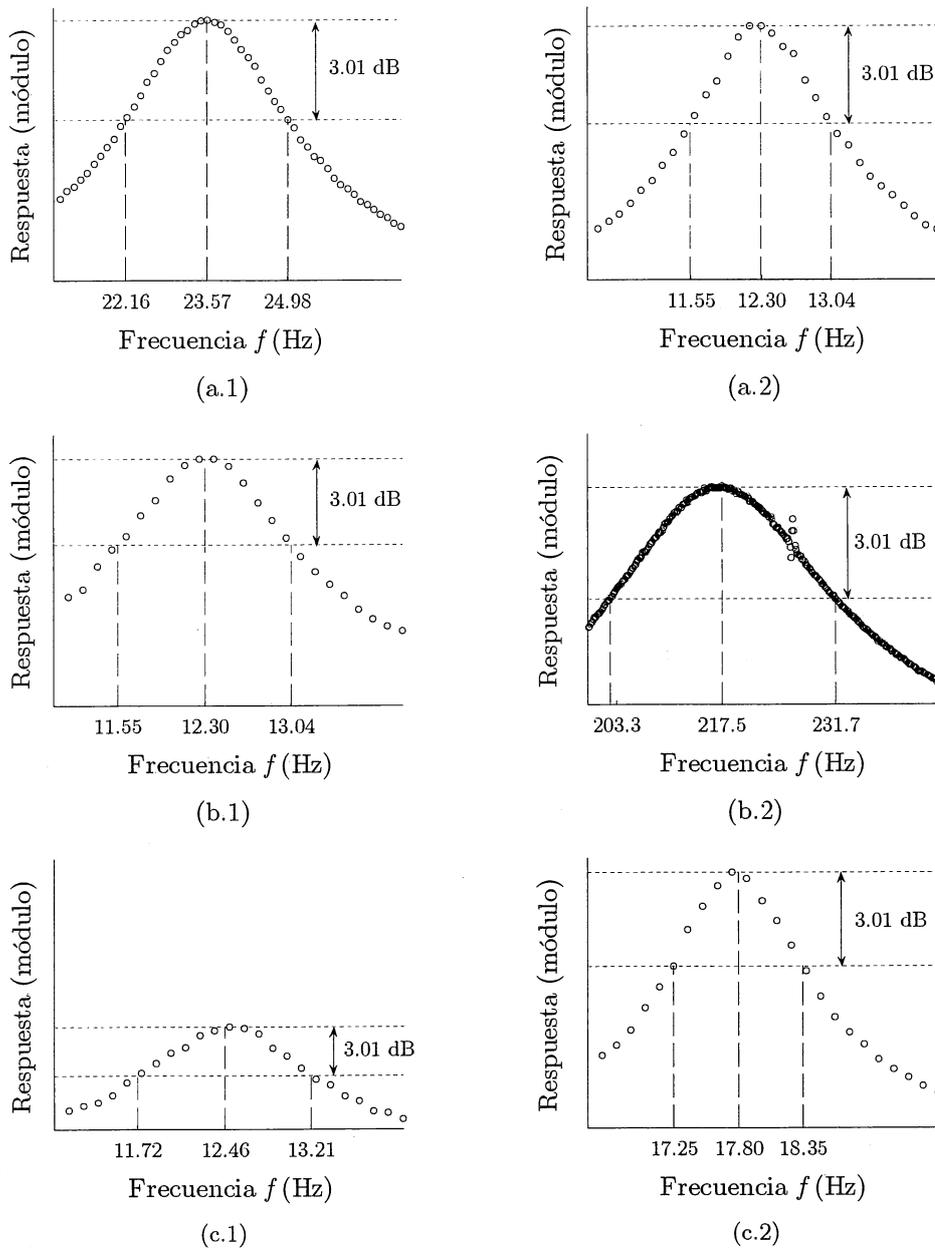


Figura 2.6. Anchos de banda del primer modo para probetas de diferente longitud: (a.1) AFLD-10-180-1 y (a.2) AFLD-10-250-1; resonancias para la probeta AFLD-10-250-1: modos (b.1) primero y (b.2) tercero; primer pico de resonancia para probetas de diferente espesor de capa base: (c.1) AFLD-10-250-2 y (c.2) AFLD-15-250-2.

El efecto del ratio de espesores T queda patente en los resultados de baja frecuencia. Así, para las probetas con base de 1.0 mm de espesor, el ratio es 1.45, y para las de 1.5 mm de espesor, dicho ratio es 1.03. Este hecho implica, por un lado, que las vigas compuestas con menor relación de espesores T tienen un factor de pérdida η_c menor que las de mayor relación.

Por otro lado, los picos de resonancia de aquellos son más pronunciados, por lo que la incertidumbre en la interpolación aumenta significativamente, porque los puntos experimentales están más separados. Por ejemplo, este efecto se puede apreciar claramente en la Figura 6(c), en la que se muestra una ampliación alrededor de la primera frecuencia de resonancia de la probeta AFLD-10-250-2, con una incertidumbre del 0.005 (4.2%), y de la probeta AFLD-15-250-2, cuya incertidumbre es del 0.008 (12.9%).

Al realizar un análisis de sensibilidad sobre las variables que intervienen en la estimación del módulo de almacenamiento del material amortiguador E_v , se pudo constatar que la variable más influyente es el módulo de Young del material de la base E_e . En efecto, la dispersión del 2.3% de este módulo induce las desviaciones indicadas en la columna correspondiente de la Tabla 2.5. También cabe indicar que estas desviaciones son mayores cuanto menor es la relación de espesores T . Este hecho se justifica porque cuando el coeficiente α de la ecuación (2.10) es cercano a 1, el método propuesto por la norma no proporciona resultados precisos, por lo que se recomienda que α sea mayor que 1.01.

Se pueden deducir conclusiones similares respecto al factor de pérdida del material viscoelástico η_v . En efecto, cuanto menor es la razón de espesores T , la incertidumbre aumenta, tal y como se desprende de la Tabla 2.5. El análisis de sensibilidad también probó que el módulo de Young del material metálico es el parámetro que más influye en la estimación del factor de pérdida del material viscoelástico η_v .

A modo de resumen, el módulo elástico del material de la base E_e y la relación de espesores T son los dos parámetros más influyentes a la hora de medir el módulo complejo. Para obtener resultados con una alta precisión, el módulo debe medirse con la menor incertidumbre posible y la razón de espesores T debe ser lo mayor posible. Asimismo, la incertidumbre es mayor a bajas frecuencias; de hecho, la norma asegura que el método es preciso exclusivamente para frecuencias superiores a 50 Hz.

2.2.4.3 Resultados de las probetas SFLD

La Tabla 2.6 muestra cómo se reducen las frecuencias naturales de las probetas SFLD respecto a los resultados anteriores, puesto que se añade masa sin incrementar sustancialmente la rigidez de las probetas. También se advierte que se mejora la calidad de los resultados, principalmente a las frecuencias más bajas.

Como se puede apreciar en la Tabla 2.6, el factor de pérdida η_m de la viga compuesta es prácticamente el doble que el de las probetas AFLD. Por un lado, esto implica que los picos de resonancia son menos pronunciados, como se muestra en la Figura 2.7, por lo que el procedimiento de interpolación para calcular el ancho de banda Δr_m induce menor incertidumbre. Por otro lado, es importante mencionar que la aproximación del método HPB comete importantes errores cuando el amortiguamiento es elevado, como se representa en la Figura 2.5. Por esta razón, para valores de Δr_m superiores a 0.20, el factor de pérdida η_m fue calculado de la ecuación (2.8) usando la función *fzero* de Matlab. Los valores corregidos están marcados en la Tabla 2.6 con un asterisco (*) .

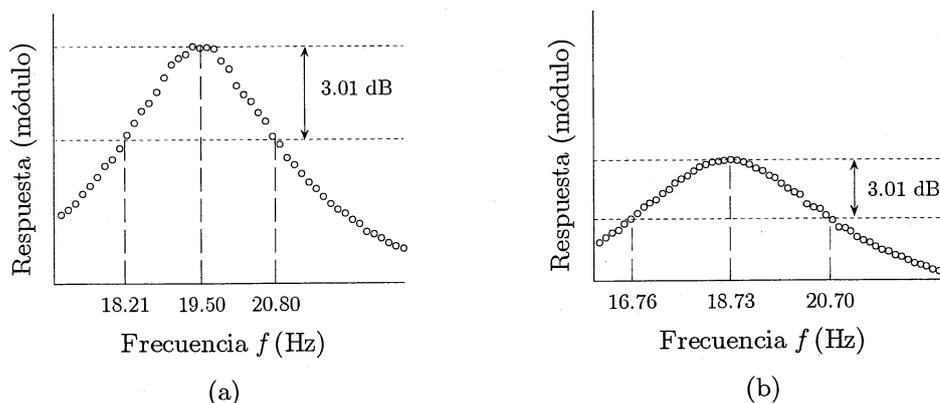


Figura 2.7. Anchos de banda del primer modo para probetas de similares características pero diferente configuración: (a) AFLD-10-200-1 y (b) SFLD-10-200-1.

Al igual que para las probetas AFLD, el análisis de sensibilidad sobre las probetas SFLD mostró que un módulo de Young de la base E_e preciso, y una relación de espesores T alta, garantizan la precisión sobre los resultados E_v y η_v .

Tabla 2.6
Resultados de las probetas SFLD

Referencia	Modo 1					Modo 3				
	f_m (± 0.06 Hz)	η_m	E_v (10^9 Pa)	η_v	f_m (± 0.06 Hz)	η_m (± 0.0005)	E_v (10^9 Pa)	η_v		
SFLD-10-180-1	23.4	0.216* \pm 0.001	0.97 \pm 0.07	0.92 \pm 0.07	ND	ND	ND	ND		
SFLD-10-180-2	23.5	0.219* \pm 0.001	1.01 \pm 0.07	0.91 \pm 0.07	ND	ND	ND	ND		
SFLD-10-200-1	18.7	0.208* \pm 0.001	0.89 \pm 0.07	0.96 \pm 0.08	342.8	0.259*	1.48 \pm 0.07	0.82 \pm 0.07		
SFLD-10-200-2	19.0	0.214* \pm 0.001	1.03 \pm 0.07	0.88 \pm 0.07	346.4	0.273*	1.58 \pm 0.07	0.83 \pm 0.07		
SFLD-10-250-1	12.1	0.200* \pm 0.002	1.10 \pm 0.07	0.78 \pm 0.05	210.5	0.250*	1.03 \pm 0.07	1.03 \pm 0.07		
SFLD-10-250-2	12.0	0.198 \pm 0.002	1.00 \pm 0.07	0.83 \pm 0.06	210.0	0.260*	1.01 \pm 0.07	1.09 \pm 0.07		
SFLD-15-180-1	32.5	0.130 \pm 0.002	1.07 \pm 0.15	0.92 \pm 0.15	ND	ND	ND	ND		
SFLD-15-180-2	32.4	0.125 \pm 0.002	1.04 \pm 0.15	0.99 \pm 0.16	ND	ND	ND	ND		
SFLD-15-200-1	26.4	0.124 \pm 0.003	1.05 \pm 0.15	0.89 \pm 0.15	ND	ND	ND	ND		
SFLD-15-200-2	26.2	0.122 \pm 0.003	0.96 \pm 0.15	0.95 \pm 0.17	ND	ND	ND	ND		
SFLD-15-250-1	ND	ND	ND	ND	306.2	0.136	1.32 \pm 0.15	0.80 \pm 0.10		
SFLD-15-250-2	ND	ND	ND	ND	306.4	0.127	1.30 \pm 0.15	0.79 \pm 0.10		

* Resultados corregidos con la ecuación (2.8).

Es de remarcar que con la configuración SFLD se obtiene mejores resultados que con la AFLD. Esto se basa en que el coeficiente $(f_m / f_n)^2(1 + 2DT)$ de la ecuación (2.17), que es equivalente al parámetro α en la configuración AFLD, está más alejado de 1 que en esta. Así, se disminuye la dispersión en el caso del módulo de almacenamiento E_v y del factor de pérdida η_v del material amortiguador, y la incertidumbre de los resultados se reducen a la mitad, principalmente a bajas frecuencias.

Para concluir esta sección, se puede resaltar que los resultados obtenidos muestran claramente una tendencia creciente del módulo de almacenamiento con la frecuencia y un pico para el factor de pérdida, ambos representativos de la zona de transición vítrea de los materiales viscoelásticos. Esta tendencia puede ser contrastada con las curvas maestras dadas por el fabricante del material amortiguador, donde la temperatura de referencia es 37.8°C (100°F), y la zona de transición se da a temperatura ambiente, tal y como se ha verificado con los resultados obtenidos.

2.3 Ajuste de modelos

En este apartado se presenta el ajuste de los modelos Zener y FD de cinco parámetros a los resultados experimentales del módulo complejo E_v^* medido sobre las probetas SFLD, puesto que estos resultados presentan menor incertidumbre que los de las vigas AFLD.

El módulo complejo para ambos modelos viene dado por

$$E_v^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\beta}, \quad (2.19)$$

donde E_0 representa el módulo estático; E_∞ el módulo asintótico si $\alpha = \beta$; τ es el tiempo de relajación; y α y β son los parámetros fraccionarios, con la salvedad de que para el modelo Zener, $\alpha = \beta = 1$. El ajuste de las curvas fue llevado a cabo gracias al método de minimización de Nelder y Mead (1965), el cual está implementado en la función *fminsearch* de

Matlab. Se realizaron dos ajustes diferentes: el primero de ellos consiste en un ajuste global del módulo complejo, mientras que el segundo contempla únicamente su parte imaginaria, que es quien caracteriza el amortiguamiento añadido al sistema estructural cuando se aplica un tratamiento superficial viscoelástico.

El primero de los ajustes consiste en minimizar la suma ponderada de los valores absolutos de la diferencia entre los módulos complejos,

$$\sum_s^{s_{\text{máx}}} \kappa_s |E_v^*(\omega_s) - E_{v,s}^*|, \quad (2.20)$$

donde s es el índice del sumatorio; $s_{\text{máx}}$ es el número total de datos experimentales; $|\cdot|$ representa el valor absoluto de un número complejo; κ_s es el factor de ponderación; $E_v^*(\omega_s)$ es el valor del módulo complejo del modelo a la frecuencia ω_s ; y $E_{v,s}^*$ es el s -ésimo módulo complejo medido a la misma frecuencia ω_s (véase la Tabla 2.6). El factor de ponderación κ_s fue elegido como una función de la frecuencia tal que

$$\kappa_s = \frac{f_s}{f_{\text{máx}}}, \quad (2.21)$$

donde $f_{\text{máx}}$ es la máxima frecuencia de estudio, aquí 400 Hz, con el propósito de dar mayor peso a las mayores frecuencias. Los valores de los parámetros ajustados se representan en la Tabla 2.7, y en la Figura 2.8 se comparan las curvas de los modelos teóricos con los datos experimentales.

Tabla 2.7

Parámetros de los modelos Zener y FD ajustando el valor absoluto del módulo complejo

	E_0 (10^9 Pa)	E_∞ (10^9 Pa)	τ (10^{-6} s)	α	β
Zener	0.571	3.101	347.6	1	1
FD	0.379	3.057	419.2	0.934	0.871

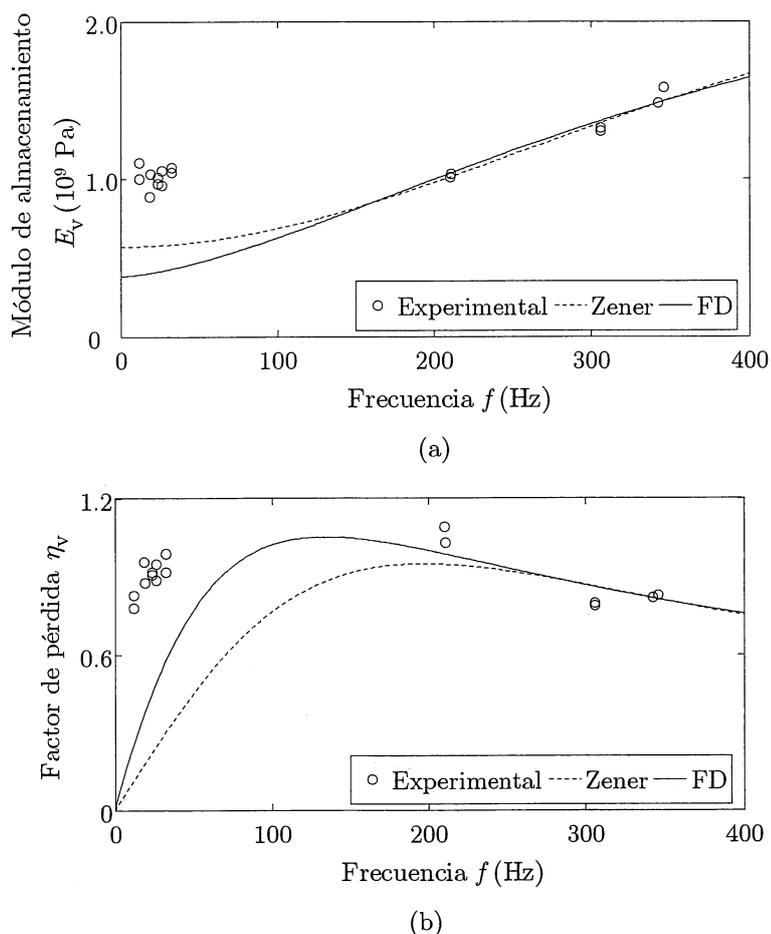


Figura 2.8. Comparación entre los resultados experimentales y los modelos teóricos ajustando el valor absoluto del módulo complejo: (a) módulo de almacenamiento E_V y (b) factor de pérdida η_V .

De la Figura 2.8 se desprende que ambos modelos teóricos son capaces de reproducir de forma global la tendencia creciente del módulo de almacenamiento, y el pico del factor de pérdida de la zona de transición del material polimérico ensayado. El valor máximo del factor de pérdida es 0.95 para el modelo Zener y 1.05 para el FD, que se alcanzan a los 196 y 134 Hz, respectivamente. Las diferencias que se cometen en relación a los resultados experimentales son importantes, principalmente a bajas frecuencias.

El segundo de los ajustes considera exclusivamente la diferencia entre las partes imaginarias del módulo complejo $E_V''(\omega_s)$ y $E_{V,s}''$,

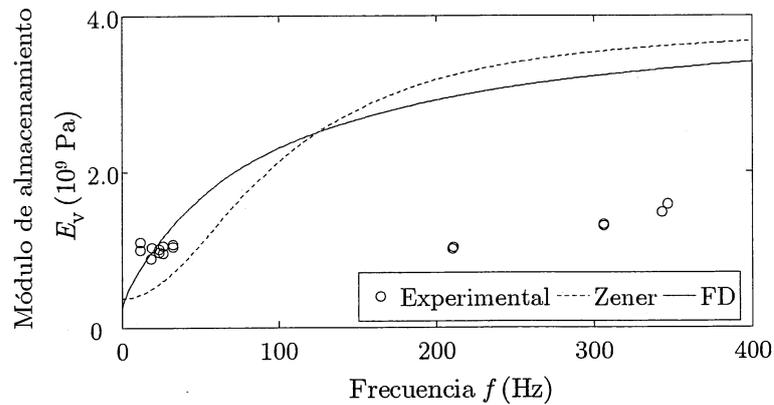
$$\sum_s^{\omega_{\max}} \kappa_s |E_V''(\omega_s) - E_{V,s}''|, \quad (2.22)$$

usando los mismos pesos de ponderación κ_s que en el caso anterior. Los resultados del ajuste se muestran en la Tabla 2.8, y la comparación entre los modelos teóricos y los datos experimentales, en la Figura 2.9.

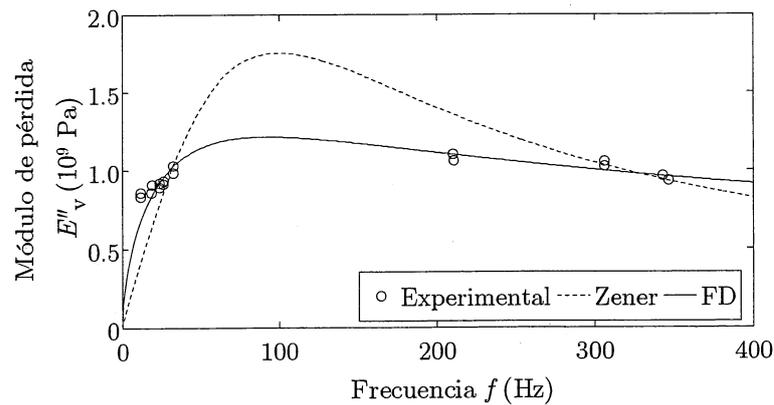
Tabla 2.8

Parámetros de los modelos teóricos ajustando la parte imaginaria del módulo complejo

	E_0 (10^9 Pa)	E_∞ (10^9 Pa)	τ (10^{-3} s)	α	β
Zener	0.371	3.876	1.595	1	1
FD	0.230	4.000	2.036	0.715	0.693



(a)



(b)

Figura 2.9. Comparación entre los resultados experimentales y los modelos teóricos ajustando la parte imaginaria del módulo complejo: (a) módulo de almacenamiento E_v y (b) módulo de pérdida E_v'' .

De la Figura 2.9 se puede resaltar que existe una diferencia importante entre los valores máximos del módulo de pérdida, 1.75 GPa para Zener y 1.21 GPa para FD, que se alcanzan a los 100 Hz y 92 Hz, respectivamente. El modelo fraccionario es capaz de representar un descenso más suave del módulo de pérdida, ajustándose mejor a los resultados experimentales, mientras que el modelo Zener provoca una disminución más brusca de la pendiente de dicho módulo. En cuanto al módulo de almacenamiento, ambos modelos proporcionan valores sobreestimados.

Concluyendo, ninguno de los dos ajustes ha sido capaz de representar fielmente los datos del módulo complejo obtenidos experimentalmente, aunque de forma global el ajuste del modelo FD es mejor. Para mejorar los resultados, se puede incrementar el número de términos en la ecuación (1.30), aunque dicha labor queda fuera del alcance de esta investigación.

2.4 Análisis de un nuevo modelo hereditario

A continuación se presenta una función de relajación que se ha desarrollado durante la ejecución de la tesis para caracterizar materiales cuyo módulo de almacenamiento es constante en frecuencia, y cuyo factor de pérdida muestra el pico característico de los materiales viscoelásticos en la zona de transición. Este comportamiento ha sido identificado, por ejemplo, en el hormigón polímero por Cortés y Castillo (en imprenta), en el que los constituyentes elásticos configuran el módulo de almacenamiento constante, y el componente polimérico proporciona el factor de pérdida variable.

Cuando el material se ve sujeto a una deformación constante ε_0 , el nuevo modelo propone que la tensión $\sigma(t)$ siga la ley

$$\sigma(t) = \sigma_0 + (\sigma_\infty - \sigma_0) \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad (2.23)$$

donde $\sigma_0 = E_0\varepsilon_0$ y σ_∞ son las tensiones inicial y asintóticas, respectivamente, E_0 es el módulo, y τ es el tiempo de relajación. Esta función se

representa en la Figura 2.10 junto a los modelos exponencial e hiperbólico, revisados en el capítulo anterior, dados por

$$\sigma(t) = \sigma_0 + (\sigma_\infty - \sigma_0)(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (2.24)$$

y por

$$\sigma(t) = \sigma_0 + (\sigma_\infty - \sigma_0) \left(1 - \frac{\tau}{\tau + t}\right), \quad (2.25)$$

respectivamente.

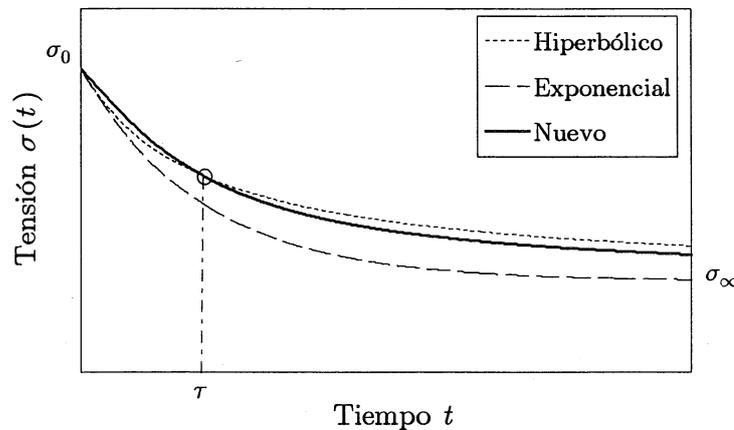


Figura 2.10. Relajación de la tensión según los modelos hiperbólico, exponencial y nuevo.

En la Figura 2.10 se aprecia que la tensión decae con mayor rapidez para el modelo exponencial, alcanzando rápidamente la asíntota. En los primeros instantes, para $t < \tau$, la tensión del nuevo modelo decrece más lentamente que en el hiperbólico, pero le sobrepasa en el instante $t = \tau$.

La función de amortiguamiento normalizada $g(t)$ del nuevo modelo se obtiene mediante diferenciación y normalización de la ecuación (2.23),

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + t^2}, \quad (2.26)$$

cuya transformada de Fourier $\tilde{g}(\omega)$, para $\omega \geq 0$, resulta

$$\tilde{g}(\omega) = 2 \exp(-\omega\tau). \quad (2.27)$$

El módulo complejo del nuevo modelo se obtiene a partir de la ecuación (1.22), satisfaciendo

$$E^*(\omega) = E_0 + 2i \frac{c}{\tau} \omega \tau \exp(-\omega\tau), \quad (2.28)$$

donde la parte real, que representa el módulo de almacenamiento, es constante en frecuencia,

$$E'(\omega) = E_0, \quad (2.29)$$

y el factor de pérdida, representado en la Figura 2.11, depende de la frecuencia de la forma

$$\eta(\omega) = \frac{2}{E_0} \frac{c}{\tau} \omega \tau \exp(-\omega\tau). \quad (2.30)$$

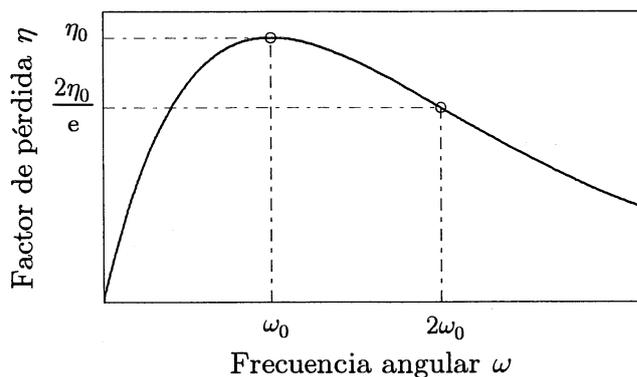


Figura 2.11. Factor de pérdida del nuevo modelo en función de la frecuencia.

Del análisis de la curva de la Figura 2.11 se desprende que la frecuencia ω_0 a la cual el factor de pérdida alcanza su máximo η_0 , se relaciona con el tiempo de relajación como sigue,

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}, \quad (2.31)$$

por lo que la ecuación (2.30) también se puede escribir como

$$\eta(\omega) = \eta_0 \frac{\omega}{\omega_0} \exp\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (2.32)$$

Asimismo, se deduce que el punto de inflexión se da a la frecuencia $2\omega_0$, y el valor correspondiente del factor de pérdida es $2\eta_0 e^{-1}$, donde e es la base de los logaritmos naturales.

A continuación se muestra el ajuste del modelo a los resultados experimentales obtenidos por Cortés y Castillo (en imprenta) en probetas de hormigón polímero, recogidos en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9

Módulo de almacenamiento y factor de pérdida de probetas de hormigón polímero

f (Hz)	E (10^9 Pa)	η
24.9	36.9	0.0106
40.4	38.2	0.0221
85.5	38.0	0.0153
137	38.0	0.0079

El ajuste se realizó según la misma metodología empleada en la sección anterior, a partir de la ecuación (2.20), donde el factor κ_s se eligió tal que

$$\kappa_s = \eta_s^2, \quad (2.33)$$

con la finalidad de dar mayor importancia a los datos con mayor amortiguamiento. Los resultados del ajuste se indican en la Tabla 2.10, tanto para los parámetros que describen el factor de pérdida del modelo según la ecuación (2.30) como para los de la ecuación (2.32).

Tabla 2.10

Parámetros del nuevo modelo hereditario ajustado a los datos experimentales

E_0 (10^9 Pa)	ω_0 (rad/s - Hz)	η_0	τ (10^{-3} s)	c (10^6 Pa·s)
38.2	259 - 41.3	0.0221	3.85	4.42

En la Figura 2.12 se comparan los datos experimentales con los provistos por el modelo ajustado, constatándose que las diferencias son inferiores al 10%, excepto para la frecuencia más baja.

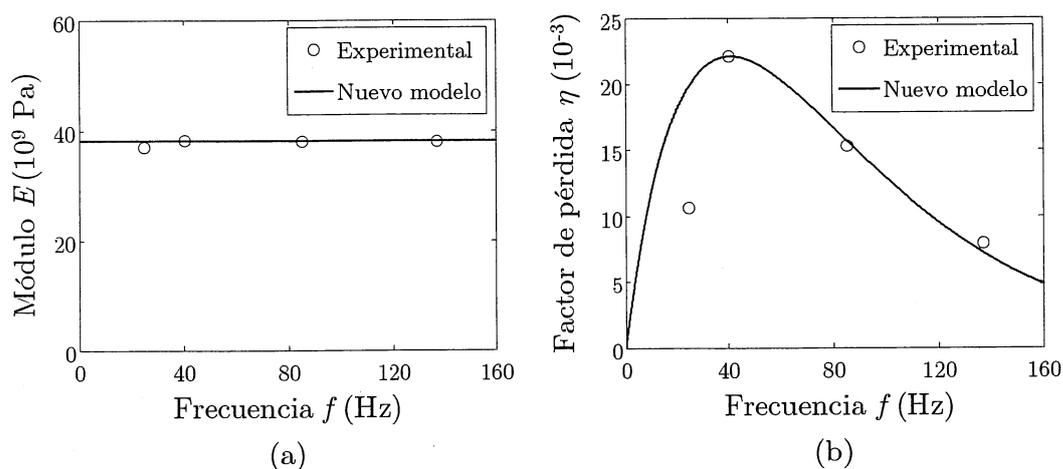


Figura 2.12. Comparación entre los datos experimentales y el ajuste del nuevo modelo: (a) módulo E y (b) factor de pérdida η .

2.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la investigación llevada a cabo sobre las técnicas de caracterización de materiales viscoelásticos, desde un punto de vista tanto empírico como teórico.

En lo relativo a la caracterización experimental, se ha establecido una técnica para extraer el módulo complejo de un material polimérico a partir de probetas FLD. La técnica empleada toma sus bases de la norma ASTM E 756-04 (2004), pero se ha propuesto sustituir la respuesta forzada por la respuesta sísmica. De este estudio, que se ha sido aceptado para su publicación en la revista *Materials & Design* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-a), se ha podido concluir lo siguiente:

1. Se ha probado que la fuerza de excitación sin contacto sugerida por la norma puede ser sustituida por el movimiento sísmico de la base.
2. Se ha deducido que los parámetros más influyentes en la calidad de los resultados son el módulo de Young del material de la base y la relación de espesores de las capas de las probetas: aquel debe ser lo más preciso posible, y este lo más grande posible.

3. Se han ensayado vigas con recubrimiento viscoelástico en sus configuraciones AFLD y SFLD, confirmándose que estas son más fáciles de tratar numéricamente además de proporcionar resultados más precisos.
4. Cuando el ancho de banda Δr obtenido por el método HPB es mayor que 0.20, límite a partir del cual se pierde la linealidad respecto al factor de pérdida η , este puede ser corregido por medio de una relación deducida para sistemas de un grado de libertad.

Con los resultados obtenidos de las probetas SFLD, se realizaron ajustes de los modelos Zener y FD, deduciéndose lo siguiente:

5. Los resultados obtenidos experimentalmente corresponden a la zona de transición vítrea, y el modelo fraccionario describe ligeramente mejor el comportamiento viscoelástico del material ensayado.

Finalmente, se ha presentado una función de relajación que reproduce el comportamiento detectado en algunos materiales compuestos cuyo módulo de almacenamiento permanece constante en frecuencia, debido a sus componentes elásticos, mientras que el factor de pérdida presenta el pico característico de los materiales viscoelásticos. Se ha proporcionado un sentido físico a los parámetros de este modelo, y de su estudio, que se publicará recientemente en *International Journal of Solids and Structures* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-b), se puede concluir que:

6. El modelo hereditario desarrollado, que ha sido validado mediante el ajuste a resultados experimentales de probetas de hormigón polímero, proporciona una herramienta para poder estudiar el comportamiento de ciertos materiales en una forma que se puede incluir fácilmente en simulaciones.

3

Análisis dinámico transitorio

En este capítulo se presenta una formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales con tratamiento superficial viscoelástico, donde el material amortiguador se caracteriza mediante un modelo constitutivo con derivadas fraccionarias. A diferencia de la formulación de Padovan (1987), en la que se emplea el principio de los trabajos virtuales, en este trabajo se aplica el método de los residuos ponderados sobre la ecuación local del balance de la cantidad del movimiento, lo que da lugar a un sistema matricial con operadores fraccionarios. Las derivadas fraccionarias se aproximan mediante la definición de Grünwald-Letnikov, lo que permite desarrollar esquemas de integración directa tanto explícitos como implícitos. La principal ventaja de la formulación que se propone, con respecto a la de Padovan (1987), es que se reducen tanto el tiempo de computación como las necesidades de memoria.

Finalmente se muestra un conjunto de ejemplos numéricos para una viga en voladizo con tratamiento en capa libre con el fin de comparar los resultados de la nueva formulación con los de Padovan (1987). Se contemplan diferentes condiciones de simulación, relativas al orden de derivación fraccionaria, al paso de integración, y al truncamiento de los coeficientes de Grünwald-Letnikov.

3.1 Introducción

A partir de la revisión de la literatura, se concluye que los modelos de material con derivadas fraccionarias (FD) son en la actualidad los más efectivos para reproducir el comportamiento viscoelástico, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales por elementos finitos (EF), Padovan (1987) mostró una formulación que permite contemplar el uso de materiales viscoelásticos caracterizados mediante modelos fraccionarios. En esta formulación se parte del principio de los trabajos virtuales, y empleando la definición de Grünwald-Letnikov para discretizar el operador fraccionario, también conocido como el método G1 (véase la Sección 1.2.4.3 para los detalles de este método), se obtiene un sistema matricial de segundo orden en el que se deben calcular y almacenar en cada paso de integración los vectores de desplazamientos y de tensiones nodales, consumiendo importantes recursos computacionales.

Durante la realización de la presente tesis, se ha desarrollado una formulación (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-c) en la que, a diferencia de la de Padovan (1987), se aplica el método de los residuos ponderados sobre la ecuación local del balance del momento lineal. Este hecho resulta en una ecuación del movimiento diferente a la de Padovan (1987), que junto a la aproximación G1, se obtiene un sistema matricial de segundo orden que puede ser resuelto explícita o implícitamente. Para resolver dicho sistema, es necesario almacenar en cada paso de integración los desplazamientos y las fuerzas nodales, pero no las tensiones, lo que reduce drásticamente tanto el tiempo de cálculo como las necesidades de memoria.

En primer lugar se presenta la formulación que se ha desarrollado, empleando un modelo FD de cinco parámetros. Se parte de una ecuación constitutiva general tridimensional, y se exponen las hipótesis en las que se basa la nueva formulación. Al aplicar el método de los residuos ponderados

desde el punto de vista de Galerkin sobre la ecuación local del balance de la cantidad de movimiento, se obtiene una ecuación matricial fraccionaria.

Seguidamente se emplea el método G1 para la aproximación del operador fraccionario, lo que permite desarrollar tres esquemas de integración directa diferentes: uno explícito y dos implícitos. El esquema explícito deriva en un sistema de segundo orden no amortiguado del tipo **M-K-F**, donde la capacidad amortiguadora del material viscoelástico viene contemplada en el vector de fuerzas. Uno de los esquemas de integración directa implícitos también conduce a un sistema de segundo orden no amortiguado **M-K-F**, mientras que el segundo de los métodos implícitos lo hace a un sistema con amortiguamiento viscoso **M-C-K-F**. En ambos esquemas, el vector de fuerzas también contempla el carácter disipador del sistema.

Por último, se presenta un conjunto de ejemplos numéricos que tienen como propósito: (I) comparar los resultados de la formulación propuesta con los de Padovan (1987); (II) analizar el comportamiento de los tres esquemas de integración directa desarrollados; investigar sobre la influencia (III) del nivel de amortiguamiento, (IV) del truncamiento de los coeficientes del Grünwald-Letnikov, (V) del paso de integración, y (VI) de los órdenes de las derivadas fraccionarias.

3.2 Formulación de elementos finitos

En esta sección se enuncia la formulación de elementos finitos (EF) desarrollada para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales amortiguados en los que el material viscoelástico se caracteriza mediante un modelo FD de cinco parámetros. Para los formalismos relativos a la mecánica del medio continuo, véase, por ejemplo, la obra de Salençon (2001).

La ley del comportamiento tridimensional para un punto material P de coordenadas (x, y, z) en un instante t viene dada por

$$\sigma(P, t) + \gamma_\sigma : D^\beta \sigma(P, t) = \mathbb{C} : \varepsilon(P, t) + \gamma_\varepsilon : D^\alpha \varepsilon(P, t), \quad (3.1)$$

donde α y β son los parámetros fraccionarios, con $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$; $\sigma(P, t)$ y $\epsilon(P, t)$ son los campos de tensiones y de deformaciones, respectivamente, representados por tensores de segundo orden; el tensor elástico \mathbf{C} y los viscoelásticos γ_σ y γ_ϵ son tensores de cuarto orden que dependen del comportamiento del material; $D^{(\bullet)}$ es el operador de la derivada fraccionaria y $(\bullet):(\bullet)$ representa el producto tensorial doblemente contraído. Si los desplazamientos del sistema son pequeños, el tensor de deformaciones es la parte simétrica del gradiente de los desplazamientos,

$$\epsilon(P, t) = \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P, t)), \quad (3.2)$$

donde

$$\mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P, t)) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}(\mathbf{u}(P, t)) + \mathbf{grad}^T(\mathbf{u}(P, t))), \quad (3.3)$$

de forma que $\mathbf{grad}(\bullet)$ representa el operador gradiente de segundo orden, $\mathbf{u}(P, t)$ es el vector del campo de desplazamientos, y $(\bullet)^T$ denota el operador de la trasposición. Para que la formulación que se propone sea también válida en el caso elástico, es decir para $\alpha = \beta = 0$, el tensor γ_σ debe ser proporcional al tensor identidad de cuarto orden \mathbb{I} (equivalente a la hipótesis de masas desacopladas utilizada en el problema elástico),

$$\gamma_\sigma = \tau^\beta \mathbb{I}, \quad (3.4)$$

y el tensor γ_ϵ al elástico \mathbf{C} ,

$$\gamma_\epsilon = (E_\infty/E_0)\tau^\alpha \mathbf{C}, \quad (3.5)$$

donde τ es el tiempo de relajación, E_0 es el módulo estático y E_∞ es el módulo asintótico si $\alpha = \beta$. De esta forma, la ecuación constitutiva del material viscoelástico se convierte en

$$(1 + \tau^\beta D^\beta)\sigma(P, t) = (1 + (E_\infty/E_0)\tau^\alpha D^\alpha)\mathbf{C} : \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P, t)), \quad (3.6)$$

que para el caso unidimensional, $\mathbf{C} = E_0$, coincide con el modelo de cinco parámetros revisado en el Capítulo 1. El caso general es capaz de considerar anisotropías si el tensor elástico \mathbf{C} las tiene en cuenta. Esta ley del comportamiento se debe usar junto a la ecuación local del balance de la cantidad de movimiento

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(P,t)) + \mathbf{f}(P,t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(P,t), \quad (3.7)$$

donde el vector $\mathbf{div}(\bullet)$ expresa la divergencia tensorial, $\mathbf{f}(P,t)$ es el campo vectorial de las fuerzas de volumen, el escalar ρ es la densidad del material, y $\ddot{\mathbf{u}}(P,t)$ representa el vector del campo de aceleraciones. La aplicación del operador divergencia sobre la ecuación (3.6) conduce a

$$\begin{aligned} (1 + \tau^\beta D^\beta) \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(P,t)) \\ = (1 + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha D^\alpha) \mathbf{div}(\mathbf{C} : \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P,t))), \end{aligned} \quad (3.8)$$

de modo que las ecuaciones (3.7) y (3.8) pueden ser combinadas para proporcionar la siguiente ecuación de campo,

$$\begin{aligned} (1 + \tau^\beta D^\beta) \rho \ddot{\mathbf{u}}(P,t) - (1 + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha D^\alpha) \mathbf{div}(\mathbf{C} : \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P,t))) \\ = (1 + \tau^\beta D^\beta) \mathbf{f}(P,t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si el material es elástico, la ecuación (3.9) se transforma en la ecuación de campo clásica

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(P,t) - \mathbf{div}(\mathbf{C} : \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}(P,t))) = \mathbf{f}(P,t). \quad (3.10)$$

La aplicación del método de los residuos ponderados sobre esta ecuación en un volumen finito V_i resulta (véase cualquier libro sobre elementos finitos, por ejemplo, Bathe (1996), Hughes (2000) o Zienkiewicz y Taylor (2004) para más detalles)

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i(t) = \mathbf{F}_i(t) + \int_{V_i} \mathbf{N}(P)^T \mathbf{f}(P, t) dV, \quad (3.11)$$

donde, para el elemento finito i -ésimo, \mathbf{M}_i , \mathbf{K}_i , $\mathbf{u}_i(t)$ y $\mathbf{F}_i(t)$ son las matrices de masa y de rigidez, y los vectores de los desplazamientos y fuerzas nodales, respectivamente; $\mathbf{N}(P)$ es la matriz de las funciones de interpolación; y la integral de volumen representa la resultante nodal de las fuerzas de volumen $\mathbf{f}(P, t)$. De la misma forma, la aplicación del método de los residuos ponderados sobre la ecuación (3.9) proporciona

$$\begin{aligned} & (1 + \tau^\beta D^\beta) \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + (1 + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha D^\alpha) \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i(t) \\ & = (1 + \tau^\beta D^\beta) \left(\mathbf{F}_i(t) + \int_{V_i} \mathbf{N}(P)^T \mathbf{f}(P, t) dV \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

que se puede reordenar en al siguiente ecuación del movimiento fraccional,

$$\begin{aligned} & \tau^\beta \mathbf{M}_i D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_i D^\alpha \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i(t) \\ & = \mathbf{F}_i(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_i(t) + \int_{V_i} \mathbf{N}(P)^T \mathbf{f}(P, t) dV \\ & + \tau^\beta D^\beta \int_{V_i} \mathbf{N}(P)^T \mathbf{f}(P, t) dV. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si el sistema está constituido por un único material viscoelástico, indicado con el subíndice $(\bullet)_v$, el ensamblaje de todas las matrices y vectores deriva en el sistema global siguiente:

$$\begin{aligned} & \tau^\beta \mathbf{M}_v D^\beta \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{u}}(t) + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_v \mathbf{u}(t) \\ & = \mathbf{F}_v(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_v(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde \mathbf{M}_v y \mathbf{K}_v son las matrices de masa y de rigidez del material viscoelástico, respectivamente; $\mathbf{u}(t)$ es el vector de desplazamientos; y $\mathbf{F}_v(t)$ es vector de fuerzas externas, en las que también se incluyen las reacciones y la resultante de las fuerzas de volumen.

A continuación se presta especial atención al estudio de la reducción de la vibración estructural mediante recubrimientos viscoelásticos. En efec-

to, considérense dos tipos de materiales: un conjunto de materiales elásticos, normalmente metales como acero o aluminio, y el material viscoelástico caracterizado por el modelo FD de cinco parámetros. La Figura 3.1 representa la fuerza efectiva, lado derecho de la ecuación (3.14), para el nodo interfacial j -ésimo.

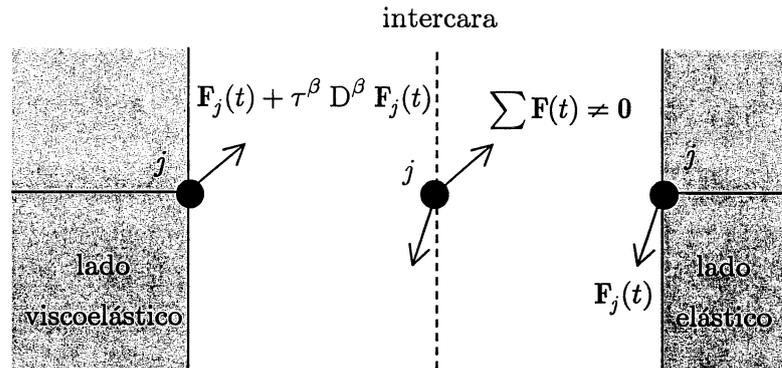


Figura 3.1. Fuerzas nodales en la intercara.

La fuerza física que realmente actúa sobre el nodo j -ésimo es $\mathbf{F}_j(t)$, que efectivamente verifica la tercera ley de Newton entre los lados elástico y viscoelástico. Pero en el lado viscoelástico actúa otro término, $\tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_j(t)$, el cual no es una fuerza real, si no que aparece en virtud de los términos fraccionarios de la ecuación (3.13), implicando que, al ensamblar las matrices, los términos del lado derecho no están equilibrados. Este desequilibrio implica que el sistema fraccionario resultante sea

$$\begin{aligned} \tau^\beta \mathbf{M}_v D^\beta \ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \ddot{\mathbf{u}}(t) + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}(t) \\ + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v) \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{F}_v(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_v(t) \\ + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_{ve}(t), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el subíndice $(\cdot)_e$ hace referencia al material elástico, y $\mathbf{F}_{ve}(t)$ es la fuerza interna que actúa sobre el lado viscoelástico de la intercara de ambos materiales, cuya reacción en el lado elástico $\mathbf{F}_{ev}(t) = -\mathbf{F}_{ve}(t)$ satisface

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{F}_{ev}(t), \quad (3.16)$$

donde $\mathbf{F}_e(t)$ denota el vector de fuerzas externas aplicada en los materiales elásticos. Entonces, la forma final para la ecuación del movimiento matricial de orden fraccionario resulta

$$\begin{aligned} \tau^\beta \mathbf{M} D^\beta \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}(t) + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}(t) \\ + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$ y $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{F}_v(t)$ son las matrices y el vector globales.

Escobedo-Torres y Ricles (1998) dedujeron una ecuación similar a partir del ensamblaje en el dominio de Laplace de la ecuación del movimiento individual de cada elemento finito, para la posterior transformación inversa del sistema global. Estos autores utilizaron un modelo de material FD de cuatro parámetros, y la ecuación fraccionaria la resolvieron mediante un algoritmo explícito basado en el esquema de las diferencias finitas centrales. Una diferencia respecto a la ecuación (3.17) es que Escobedo-Torres y Ricles (1998) emplearon la derivada de orden $2 + \beta$ del desplazamiento, en vez de la derivada de orden β de la aceleración, lo que dificulta la integración numérica.

En la sección siguiente se formulan los esquemas de integración directa desarrollados para resolver la ecuación (3.17). En el Anexo A de la memoria se presenta una tabla en la que se resumen todas las ecuaciones relativas a dichas formulaciones.

3.3 Integración numérica

A continuación, se muestran tres diferentes esquemas de integración directa, uno explícito y dos implícitos, para la resolución del sistema de ecuaciones fraccionarias (3.17). En los tres métodos, el operador fraccionario se desarrolla desde el punto de vista de Grünwald-Letnikov, de modo que el sistema fraccionario se transforma en uno de segundo orden, que se puede

resolver con los métodos numéricos comúnmente empleados en dinámica estructural, algunos de ellos mencionados en la Sección 1.2.4 de la introducción (véase por ejemplo Bathe (1996), Hughes (2000) o Zienkiewicz y Taylor (2004) para más detalles sobre dichos métodos).

3.3.1 Formulación explícita

La formulación explícita que se propone parte de la ecuación (3.17) escrita en el instante t_n ,

$$\begin{aligned} \tau^\beta \mathbf{M}_v D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}_n + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}_n \\ + \mathbf{K} \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_n + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_n, \end{aligned} \quad (3.18)$$

la cual debe ser resuelta para \mathbf{u}_{n+1} . Para ello, se hace uso de la aproximación de Grünwald-Letnikov, con la cual las derivadas fraccionarias de la fuerza \mathbf{F}_n , del desplazamiento \mathbf{u}_n , y de la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_n$ resultan

$$D^\beta \mathbf{F}_n = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n-j}, \quad (3.19)$$

$$D^\alpha \mathbf{u}_n = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n-j}, \quad (3.20)$$

$$D^\beta \mathbf{u}_n = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n-j} \quad (3.21)$$

y

$$D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n-j}, \quad (3.22)$$

lo que permite transformar la ecuación (3.18) en un sistema de segundo orden no amortiguado

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K} \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{F}}_n, \quad (3.23)$$

donde los efectos de amortiguación están contemplados en el término $\bar{\mathbf{F}}_n$ del lado derecho, que satisface

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_n = & \mathbf{F}_n + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n-j} - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{M} \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n-j} - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v \sum_{j=0}^{n-1} A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n-j}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

El desplazamiento \mathbf{u}_{n+1} se puede obtener de la ecuación (3.23) por medio de métodos explícitos de integración directa como el de las diferencias finitas centrales, cuyo algoritmo se recoge en la Tabla 3.1, o mediante superposición modal, para lo cual la ecuación (3.23) resulta

$$\mathbb{I} \ddot{\mathbf{q}}_n + \text{diag } \lambda \mathbf{q}_n = \phi^T \bar{\mathbf{F}}_n, \quad (3.25)$$

donde \mathbf{q} representa el vector de los desplazamientos proyectados sobre la base modal ϕ normalizada con respecto a la masa modal unidad, \mathbb{I} es la matriz identidad, y la matriz diagonal $\text{diag } \lambda$ se construye con los autovalores del sistema. A diferencia de los sistemas no amortiguados, la ecuación (3.25) no está completamente desacoplada, sino que el desacoplamiento es parcial como consecuencia de la definición del vector $\bar{\mathbf{F}}_n$ según (3.24).

Tabla 3.1

Diferencias finitas centrales para un sistema del tipo $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$

Dadas las condiciones iniciales \mathbf{u}_0 y $\dot{\mathbf{u}}_0$, despejar $\ddot{\mathbf{u}}_0$ de $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0$.

Estimar $\mathbf{u}_{-1} := \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{u}_0$.

Para $n := 0$ hasta $N-1$, hacer:

Despejar \mathbf{u}_{n+1} de

$$\left(\mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}\right) \mathbf{u}_{n+1} = (\Delta t)^2 \mathbf{F}_n - \left(-2\mathbf{M} + (\Delta t)^2 \mathbf{K}\right) \mathbf{u}_n - \left(\mathbf{M} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}\right) \mathbf{u}_{n-1}.$$

Calcular $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} := \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t}$.

Calcular $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} := \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{(\Delta t)^2}$.

Fin.

3.3.2 Formulaciones implícitas

Las dos formulaciones implícitas desarrolladas parten de la ecuación (3.17) para el instante t_{n+1} ,

$$\begin{aligned} \tau^\beta \mathbf{M}_v D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}_{n+1} \\ + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que debe ser resuelta para \mathbf{u}_{n+1} . Usando la definición de Grünwald-Letnikov, las derivadas de la fuerza \mathbf{F}_{n+1} , del desplazamiento \mathbf{u}_{n+1} , y de la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$, se pueden aproximar de la siguiente manera,

$$D^\beta \mathbf{F}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j}, \quad (3.27)$$

$$D^\alpha \mathbf{u}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j}, \quad (3.28)$$

$$D^\beta \mathbf{u}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \quad (3.29)$$

y

$$D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j}. \quad (3.30)$$

La primera de las formulaciones propuestas, el esquema **M-K-F**, consiste en transformar las ecuaciones (3.28)-(3.30) en

$$D^\alpha \mathbf{u}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{(\Delta t)^\alpha} + \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j}, \quad (3.31)$$

$$D^\beta \mathbf{u}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{(\Delta t)^\beta} + \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \quad (3.32)$$

y en

$$D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}}{(\Delta t)^\beta} + \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j}, \quad (3.33)$$

respectivamente, lo que permite convertir la ecuación (3.26) en un sistema de segundo orden,

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}, \quad (3.34)$$

donde las matrices equivalentes de masa $\bar{\mathbf{M}}$ y de rigidez $\bar{\mathbf{K}}$ resultan

$$\bar{\mathbf{M}} = \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{M} + \mathbf{M} \quad (3.35)$$

y

$$\bar{\mathbf{K}} = \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v + \mathbf{K}, \quad (3.36)$$

respectivamente, y la fuerza equivalente $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ satisface

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{n+1} = & \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{M} \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \\ & - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Al igual que en la formulación explícita, la capacidad de disipar energía del sistema viene contemplada en la fuerza equivalente $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$, y la ecuación (3.34) se puede resolver bien mediante superposición modal, o bien mediante el método de Newmark, cuyo algoritmo se recoge en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Esquema de Newmark para un sistema de segundo orden $M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$

Seleccionar los coeficientes de Newmark* a y b .

Dadas las condiciones iniciales \mathbf{u}_0 y $\dot{\mathbf{u}}_0$, despejar $\ddot{\mathbf{u}}_0$ de $M\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{F}_0 - C\dot{\mathbf{u}}_0 - K\mathbf{u}_0$.

Calcular $\mathbf{A} := M + a\Delta t C + b(\Delta t)^2 K$.

Para $n := 0$ hasta $N - 1$, hacer:

$$\text{Calcular } \mathbf{b}_{n+1} := M\left(\mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2(1 - 2b)\ddot{\mathbf{u}}_n\right).$$

$$\text{Calcular } \mathbf{c}_{n+1} := C\left(a\Delta t \mathbf{u}_n + (\Delta t)^2(a - b)\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2}(\Delta t)^3(a - 2b)\ddot{\mathbf{u}}_n\right).$$

$$\text{Despejar } \mathbf{u}_{n+1} \text{ de } \mathbf{A} \mathbf{u}_{n+1} = b(\Delta t)^2 \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1} + \mathbf{c}_{n+1}.$$

$$\text{Calcular } \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} := \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{b(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{b\Delta t} - \left(\frac{1}{2b} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_n.$$

$$\text{Calcular } \dot{\mathbf{u}}_{n+1} := \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t\left((1 - a)\ddot{\mathbf{u}}_n + a\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\right).$$

Fin.

* Para el esquema de Newmark de aceleración constante, $a = 0.5$ y $b = 0.25$.

A continuación se desarrolla la segunda de las formulaciones implícitas.

Para ello, las derivadas de las ecuaciones (3.28) y (3.29) se transforman en

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{u}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} (\Delta t)^{1-\alpha} + \frac{\mathbf{u}_n}{(\Delta t)^\alpha} \\ &+ \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=1}^n A_{\alpha, j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \end{aligned} \quad (3.38)$$

y en

$$\begin{aligned} D^\beta \mathbf{u}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} (\Delta t)^{1-\beta} + \frac{\mathbf{u}_n}{(\Delta t)^\beta} \\ &+ \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=1}^n A_{\beta, j+1} \mathbf{u}_{n+1-j}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

respectivamente, donde se identifica la primera derivada $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ del desplazamiento \mathbf{u}_{n+1} en el instante t_{n+1} por medio de la definición de Grünwald-Letnikov

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t}, \quad (3.40)$$

lo que implica que el sistema original de la ecuación (3.26) es equivalente a un sistema de segundo orden con amortiguamiento viscoso,

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}, \quad (3.41)$$

donde la matriz de masa equivalente $\bar{\mathbf{M}}$ es la misma que la de la formulación anterior dada por la ecuación (3.35); la matriz de rigidez \mathbf{K} es la del sistema original, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$; la de amortiguamiento $\bar{\mathbf{C}}$ resulta

$$\bar{\mathbf{C}} = \Delta t \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e + \Delta t \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v; \quad (3.42)$$

y la fuerza efectiva $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ satisface

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{n+1} = & \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{M} \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right) \\ & - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Concluyendo, se han propuesto tres diferentes esquemas que permiten resolver el sistema fraccionario de la formulación EF desarrollada durante la realización de la presente tesis. A partir de las aplicaciones numéricas de la sección siguiente, se pondrán en evidencia las ventajas, desventajas y dominio de aplicación de cada uno de los métodos de integración definidos.

En el Anexo A de la memoria se recogen de forma resumida las fórmulas deducidas para los tres esquemas de integración numérica.

3.4 Aplicación numérica

En esta sección se presenta un conjunto de ejemplos numéricos que tiene por objetivo: (I) comparar la formulación implícita **M-K-F** descrita en el apartado anterior con la de Padovan (1987) para diferentes niveles de amortiguamiento y diferentes casos de carga; (II) analizar el efecto del truncamiento de los coeficientes de Grünwald-Letnikov en la formulación implícita **M-K-F**; (III) evaluar la influencia que tiene el parámetro fraccionario β sobre la respuesta transitoria; (IV) comparar las dos formulaciones implícitas **M-K-F** y **M-C-K-F** en lo que respecta al tiempo de integración Δt ; y (V) aplicar el esquema explícito mediante superposición modal. Para los esquemas implícitos, se empleó el método de Newmark con aceleración constante (véase la Tabla 3.2), que es incondicionalmente estable y no introduce amortiguamiento numérico. Los cálculos fueron llevados a cabo con Matlab en un ordenador personal bajo entorno WINDOWS.

Se estudió la respuesta transitoria de una viga en voladizo con tratamiento FLD, cuyas propiedades geométricas, físicas y mecánicas se tomaron de la caracterización del acero AISI 316 L y de la tela amortiguadora de la marca Soundown, presentada en el Capítulo 3. Se consideró la geometría de las probetas AFLD-10-180 (véase la Tabla 2.2) cuya longitud, espesor y anchura de la capa metálica son 180, 1.05 y 9.85 mm, respectivamente, y el espesor de la capa viscoelástica, 1.52 mm. Para el módulo de elasticidad y la densidad del acero, se tomó $E_e = 176.2 \times 10^9$ Pa y $\rho_e = 7782$ kg/m³. Las propiedades del material amortiguador se eligieron a partir de los resultados del ajuste del modelo fraccionario a los datos experimentales, recogidos en la Tabla 2.8: para los módulos estático y asintótico, se tomó $E_0 = 0.379 \times 10^9$ Pa y $E_\infty = 3.057 \times 10^9$ Pa; para el tiempo de relajación, $\tau = 419.2 \times 10^{-6}$ s; y para la densidad, $\rho_v = 1423$ kg/m³. Para ambos materiales se eligió el mismo coeficiente de Poisson, $\nu_e = \nu_d = 0.3$, valor típico de los materiales elásticos, homogéneos e isótropos. Para los coeficientes α y β de los operadores fraccionarios, se emplearon los valo-

res extremos 0.5 y 0.9 para analizar la influencia que el nivel de amortiguamiento tiene sobre la respuesta.

La viga se discretizó en elementos finitos rectangulares bilineales con hipótesis de tensión plana, con 30 elementos finitos en la longitud y un elemento finito en el espesor de cada capa, como se muestra en la Figura 3.2. La matriz de rigidez se obtuvo por integración reducida con control de *hourglassing* de Kosloff y Frazier (1978). Para la integración numérica por medio de esquemas implícitos se usó la matriz de masa consistente \mathbf{M}_c , y para el esquema explícito, la concentrada \mathbf{M}_l (el subíndice $(\bullet)_l$ hace referencia al término *lumped*, en inglés). La formulación de todas estas matrices se resume en el Anexo B.

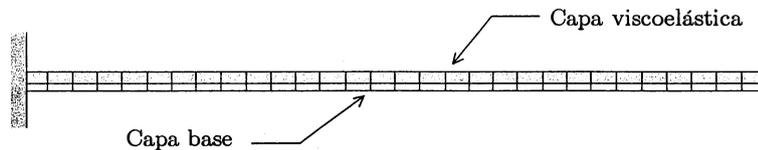


Figura 3.2. Modelo EF para una viga en voladizo con tratamiento superficial viscoelástico.

3.4.1 Comparación con la formulación de Padovan

A continuación se comparan los resultados del esquema implícito M-K-F con los relativos a la formulación implícita de Padovan (1987), cuya formulación conduce a un sistema de segundo orden del tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}^* \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^*, \quad (3.44)$$

de modo que, con la nomenclatura empleada en esta memoria, la matriz de rigidez \mathbf{K}^* y el vector de fuerzas \mathbf{F}_{n+1}^* equivalentes satisfacen

$$\mathbf{K}^* = \frac{1 + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha}{1 + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta} \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_e \quad (3.45)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^* = \mathbf{F}_{n+1} - \frac{E_\infty \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha}{E_0 \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta} \mathbf{K}_v \mathbf{u}_{n+1-j} \\ + \frac{\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta}{1 + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta} \int_{V_i} \mathbf{B}^T \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1-j} dV, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde la matriz \mathbf{B} es la que relaciona las deformaciones con los desplazamientos, $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, y la tensión $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ se debe resolver en cada paso de integración de la ecuación constitutiva

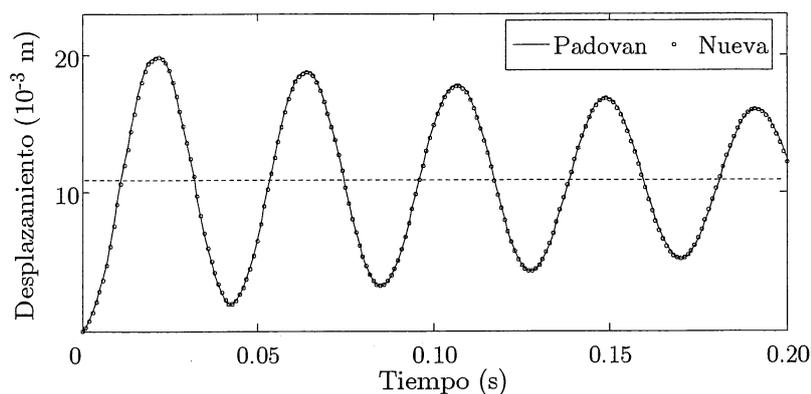
$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \tau^\beta \mathbf{D}^\beta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha \mathbf{D} \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \quad (3.47)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de elasticidad para el material viscoelástico, aquí en tensión plana, empleando E_0 como módulo elástico (véase el Anexo B para más detalles). Al desarrollar las derivadas fraccionarias de la ecuación (3.47) según el método G1, la tensión $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ se debe despejar de

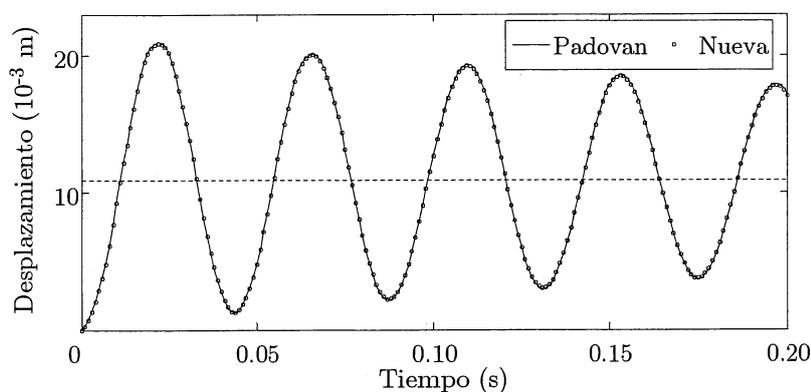
$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta\right] \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[1 + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha\right] \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \\ + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{D} \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1-j} \\ - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1-j}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

En primer lugar, se muestran los resultados del estudio llevado a cabo sobre la respuesta de una viga en voladizo sometida en su extremo libre a una fuerza unitaria $F(t)$ representada por la función Heaviside,

$$F(t) = H(t) = 1 \text{ N}. \quad (3.49)$$



(a)

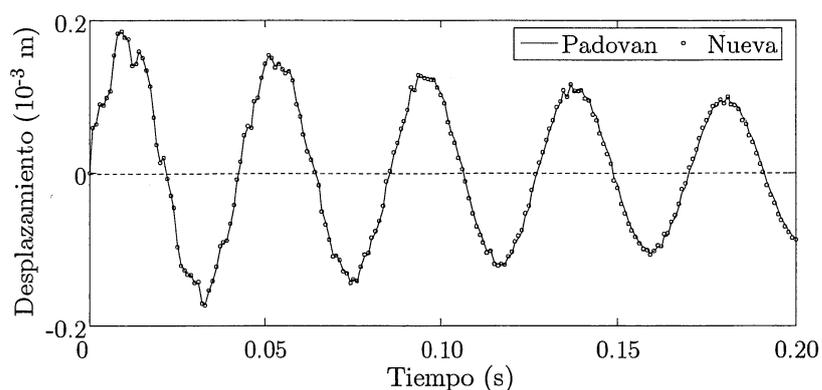


(b)

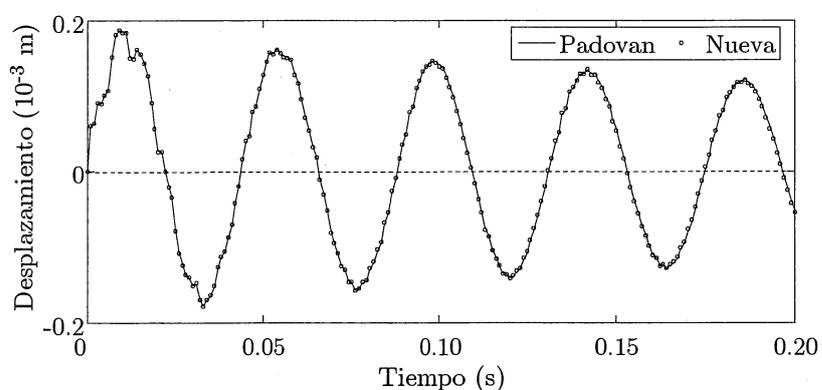
Figura 3.3. Desplazamiento del extremo libre de la viga en voladizo ante una fuerza escalón obtenido por los esquemas implícitos de Padovan y el nuevo M-K-F: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$.

Se contemplaron dos niveles de amortiguamiento diferentes, $\alpha = \beta = 0.5$ y $\alpha = \beta = 0.9$. En la Figura 3.3 se representa el desplazamiento del extremo libre de la viga en voladizo durante los primeros 0.20 s, con un paso de integración de $\Delta t = 10^{-3}$ s, con el cual se aseguró la convergencia de los resultados. No se aprecia ninguna diferencia entre los resultados provistos por ambos métodos, y se hace patente que el caso (a), donde $\alpha = \beta = 0.5$, es el que presenta la respuesta con mayor amortiguamiento. Todas las curvas tienden a la misma respuesta estacionaria de 10.9 mm.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron al considerar un impacto sobre la cara metálica del extremo libre, caracterizado por una velocidad inicial $\dot{u}_0 = 1$ m/s. Se estudió el mismo intervalo de tiempo de 0.20 s con el mismo paso de integración $\Delta t = 10^{-3}$ s.



(a)



(b)

Figura 3.4. Respuesta impulsiva del extremo libre de la viga en voladizo obtenida mediante los esquemas implícitos de Padovan y el nuevo **M-K-F** para dos niveles de amortiguamiento: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$.

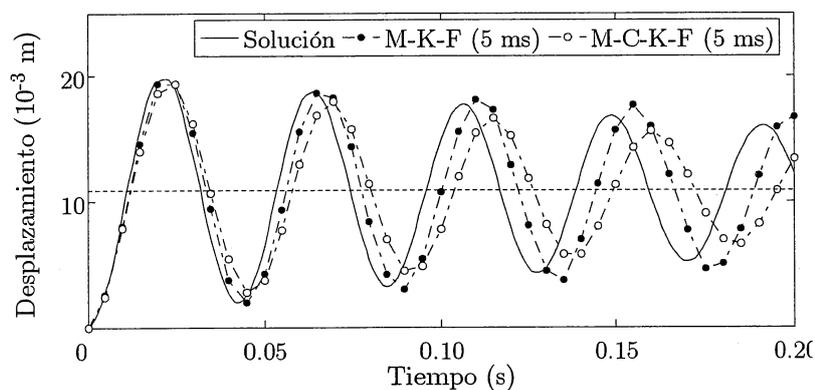
En la Figura 3.4 se compara la respuesta proporcionada por el método de Padovan con el propuesto en esta tesis, constatándose que son prácticamente idénticas. Se pueden apreciar los efectos transitorios de los modos de mayor orden hasta aproximadamente la segunda oscilación, a partir de la cual la respuesta se debe prácticamente al primer modo. También se pueden apreciar pequeños picos parásitos intrínsecos al método de integración, que excita modos de alto orden, que son propios de las respuestas impulsivas. Estos se atenúan generalmente disminuyendo el tiempo de integración Δt , o bien empleando esquemas de integración que introduzcan amortiguamiento numérico.

Concluyendo, la formulación implícita **M-K-F** que se ha desarrollado proporciona la misma respuesta que el método de Padovan (1987) para los

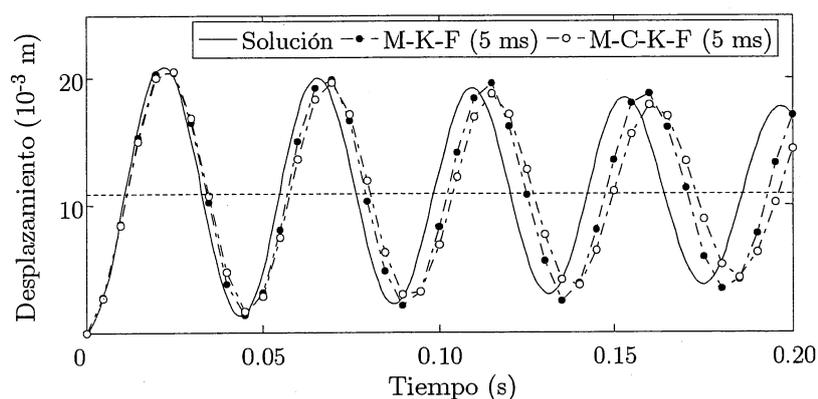
dos casos de carga y los dos niveles de amortiguamiento estudiados, aunque pueden aparecer pequeñas diferencias debidas a la integración numérica empleada para resolver la Ecuación (3.46), relativa a la formulación de Padovan (1987).

3.4.2 Comparación entre los dos esquemas implícitos

En esta sección se muestran los resultados que se obtuvieron al comparar los dos esquemas implícitos **M-K-F** y **M-C-K-F**, tanto para el caso de la respuesta forzada como para el de la impulsiva.



(a)



(b)

Figura 3.5. Respuesta forzada usando los esquemas implícitos **M-K-F** y **M-C-K-F** para dos tiempos de integración Δt diferentes, y para dos niveles de amortiguamiento: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$.

En primer lugar se estudió la respuesta dinámica del extremo libre de la viga de la Figura 3.2 ante la fuerza escalón $F(t) = H(t)$, aplicada también sobre el mismo extremo libre. Las curvas representadas en la Figura 3.5 se obtuvieron con dos pasos de integración diferentes: $\Delta t = 10^{-3}$ s, que asegura para ambos casos la convergencia del esquema numérico, y otro cinco veces mayor, $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ s.

De la Figura 3.5 se puede remarcar que el esquema **M-C-K-F** tiende a sobreestimar el amortiguamiento, mientras que la formulación **M-K-F** muestra el efecto contrario. También se puede constatar que las respuestas que no han convergido están retrasadas respecto a la solución convergida, y que el esquema **M-C-K-F** resulta el más retrasado de los dos. Estos efectos son más patentes para el caso (a), donde el amortiguamiento es mayor. Concluyendo, de forma general, la formulación que ofrece resultados más precisos es la **M-K-F**.

A continuación se presenta el estudio realizado considerando la respuesta impulsiva de la viga en voladizo, de donde se deducen las ventajas del esquema **M-C-K-F**. Esta ventaja está relacionada con los picos parásitos debidos a la excitación de los modos de alto orden mencionados en la sección anterior, que son característicos de las respuestas impulsivas. En efecto, en la Figura 3.6 se representa la respuesta del extremo libre de la viga en las mismas condiciones que en el caso de la sección anterior, superponiendo los resultados obtenidos por las dos formulaciones implícitas.

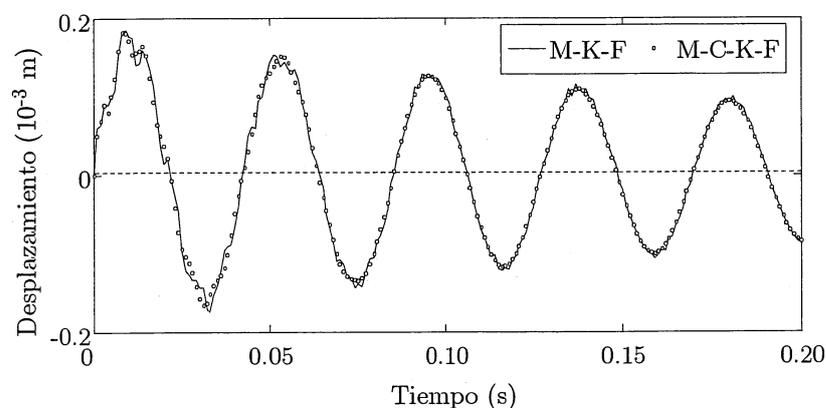


Figura 3.6. Respuesta impulsiva usando los esquemas implícitos **M-K-F** y **M-C-K-F** para el caso más amortiguado, $\alpha = \beta = 0.5$, y con un paso de integración $\Delta t = 10^{-3}$ s.

Solamente se estudia el caso más amortiguado, es decir, con $\alpha = \beta = 0.5$, porque es este el que mostró de manera más notoria dichos picos parásitos. En la Figura 3.6 se puede apreciar que la formulación **M-C-K-F** atenúa los mencionados ruidos, sin la necesidad ni de reducir el tiempo de integración ni de añadir amortiguamiento numérico, ya que es la propia tendencia sobreamortiguadora del esquema numérico quien los filtra.

3.4.3 Integración explícita

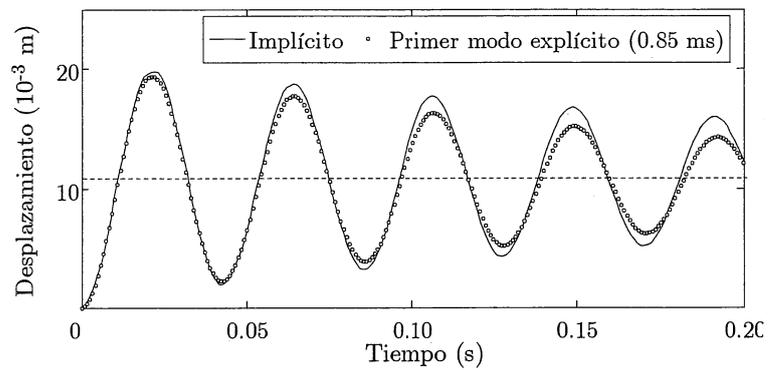
El método de las diferencias finitas centrales recogido en la Tabla 3.1 permite resolver explícitamente sistemas dinámicos estructurales. Este método es condicionalmente estable, lo que conlleva a que un sistema no amortiguado o con amortiguamiento clásico se debe resolver con un paso de integración Δt menor que un paso crítico Δt_{cr} , que satisface

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{m\acute{a}x}}, \quad (3.50)$$

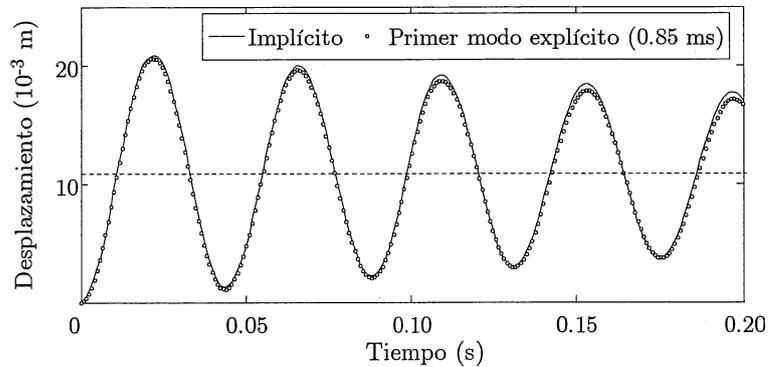
donde $\omega_{m\acute{a}x}$ indica la mayor pulsación propia del sistema no amortiguado. En sistemas estructurales, este tiempo crítico es muy pequeño: por ejemplo, para la viga con recubrimiento FLD de la Figura 3.2, este vale $\Delta t_{cr} = 2.22 \times 10^{-7}$ s, lo que implica importantes recursos computacionales. Una manera de incrementar el paso de integración crítico es descomponer el sistema en la base modal, y utilizar únicamente aquellos modos que se crean más influyentes en la respuesta, despreciando los modos de mayor orden. Por ejemplo, la frecuencia natural del primer modo de la viga es 22.8 Hz, llevando asociado un tiempo crítico $\Delta t_{cr} = 13.95 \times 10^{-3}$ s.

Pero a la hora de tener en cuenta ecuaciones constitutivas con derivadas fraccionarias, los parámetros del modelo desempeñan un papel fundamental en cuanto a la estabilidad del sistema (véase Escobedo-Torres y Ricles (1998) para más detalles, donde se exponen las condiciones con las que se debe integrar explícitamente la ecuación del movimiento aseverando la convergencia del esquema numérico). Para la aplicación de la viga FLD

que se analiza en esta sección, se comprobó que únicamente el primer modo es estable si se considera un paso de integración que se encuentre comprendido en el intervalo $0.85 \times 10^{-3} \text{ s} \leq \Delta t \leq 9.89 \times 10^{-3} \text{ s}$ para el caso con mayor amortiguamiento, $\alpha = \beta = 0.5$, y $0.85 \times 10^{-3} \text{ s} \leq \Delta t \leq 12.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ para el menos amortiguado, donde $\alpha = \beta = 0.9$. La respuesta que se obtuvo para estos dos niveles de amortiguamiento empleando el menor tiempo de integración $\Delta t = 0.85 \times 10^{-3}$ se representa en la Figura 3.7, donde se compara con la respuesta convergida calculada implícitamente.



(a)



(b)

Figura 3.7. Respuesta forzada obtenida por las formulaciones **M-K-F** implícita y explícita para dos niveles de amortiguamiento diferentes: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$.

En la Figura 3.7 se puede señalar que la respuesta del sistema se debe básicamente al primer modo, como se aprecia sobre todo en el caso (b), y las diferencias que existen entre las formulaciones implícita y explícita se deben a la falta de precisión del método explícito para el tiempo de integración $\Delta t = 0.85 \times 10^{-3}$. Paradójicamente, reducir el tiempo de integración

ción $\Delta t = 0.85 \times 10^{-3}$. Paradójicamente, reducir el tiempo de integración conduce a que el esquema de integración devenga inestable, contrariamente a lo que sucede en los sistemas no amortiguados o con amortiguamiento clásico. Se evidencia que las diferencias son más notables en el caso (a), manifestando que el paso de integración Δt es más influyente cuanto mayor es el amortiguamiento.

3.4.4 Truncamiento de los coeficientes de Grünwald

El uso de la historia completa de las derivadas fraccionarias para calcular la fuerza del lado derecho de la ecuación matricial del movimiento (3.17) implica que los cálculos sean cada vez más lentos, especialmente en sistemas de gran tamaño y con historias largas. La propiedad de la memoria corta de las derivadas fraccionarias (véase la Sección 1.2.4.3 del capítulo de la introducción) permite truncar el sumatorio a partir de cierto instante reduciendo el tiempo de computación sin perder significativamente la precisión. A continuación se ilustra este hecho empleando el esquema implícito M-K-F sobre la nueva formulación de elementos finitos que se ha presentado en esta memoria de tesis.

En la Figura 3.8 se compara la respuesta ante un escalón obtenida con la historia completa en la sección anterior ($N = 200$ términos) con las obtenidas empleando un máximo de $N/3$ y $N/10$ coeficientes de Grünwald. En cuanto al sistema menos amortiguado, es decir para el caso (b) con $\alpha = \beta = 0.9$, se puede apreciar que las soluciones truncadas proporcionan la misma respuesta que la historia completa. Este hecho se debe a que el orden del operador fraccionario es cercano a 1, por lo que la derivada fraccionaria se comporta de forma cercana a un operador local y los coeficientes de Grünwald decaen rápidamente, lo que conlleva a que el efecto de la historia es mínimo. Contrariamente, para el sistema más amortiguado, $\alpha = \beta = 0.5$, la historia tiene mayor influencia. Efectivamente, con un máximo de $N/3$ y $N/10$ coeficientes, las mayores diferencias rozan el 0.6% y el 2.7%, respectivamente.

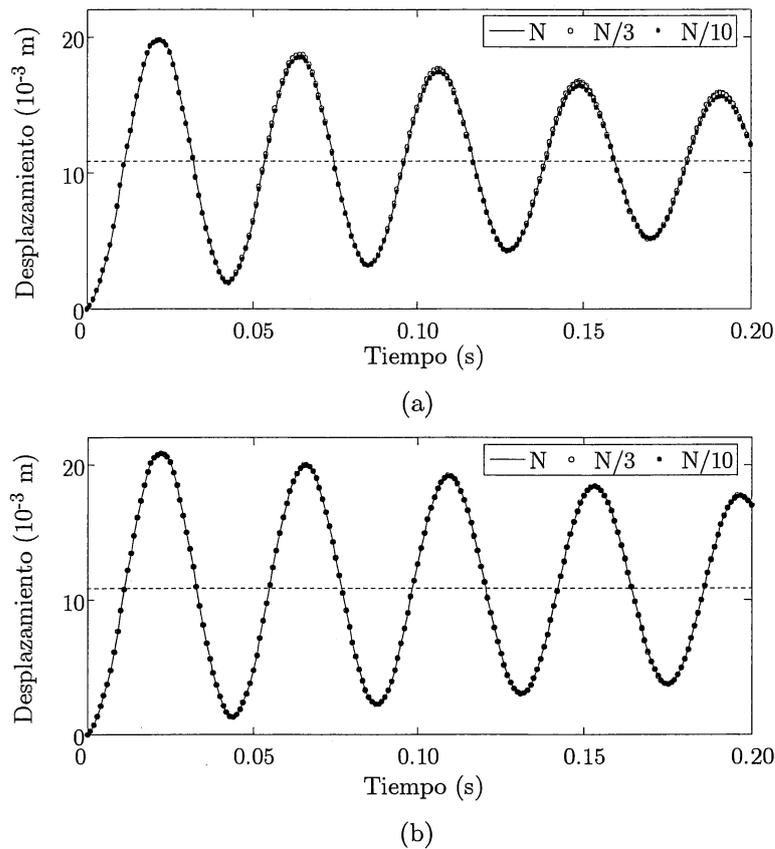


Figura 3.8. Respuesta forzada empleando la historia completa y troncada de para calcular las derivadas fraccionarias en el esquema M-K-F: (a) $\alpha = \beta = 0.5$ y (b) $\alpha = \beta = 0.9$.

3.4.5 Influencia del parámetro β

En todos los ejemplos anteriores se empleó un modelo FD de cuatro parámetros, $\alpha = \beta$, para representar el material viscoelástico. La influencia del parámetro β en un modelo FD de cinco parámetros fue analizado por Pritz (2003) en el dominio de la frecuencia, comprobando que el carácter asintótico del módulo de almacenamiento y la simetría del factor de pérdida se pierden, además de que este no se acerca a cero a medida que crece la frecuencia, sino que tiende un valor finito, como se puede observar en la Figura 1.2(b) del Capítulo 1.

En esta sección se muestra el ejemplo numérico que se llevó a cabo para manifestar la influencia del parámetro β en el dominio del tiempo, considerando la respuesta dinámica ante un escalón $H(t)$ para un modelo

FD de cuatro parámetros $\alpha = \beta = 0.9$, y otro de cinco parámetros con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 0.5$. Ambas respuestas se representan en la Figura 3.9, de donde se deduce que para la viga analizada, la disminución del parámetro β provoca asimismo una disminución del amortiguamiento del sistema, debido a la variación del módulo de almacenamiento y del factor de pérdida aludida con anterioridad.

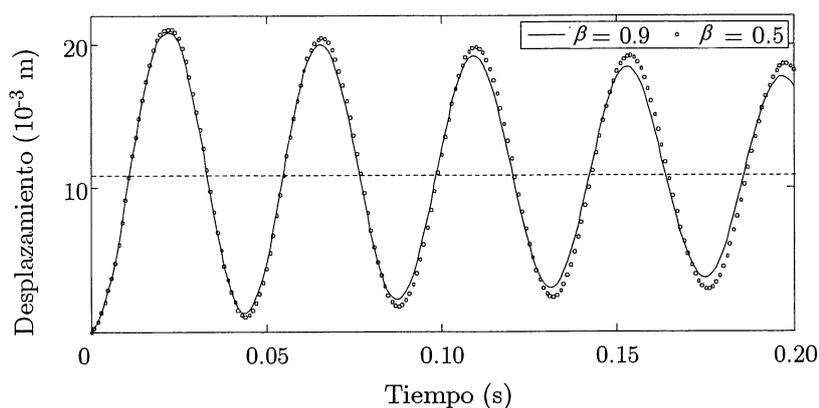


Figura 3.9. Respuesta forzada usando el esquema explícito **M-K-F** con el material viscoelástico caracterizado mediante modelos FD de cuatro y cinco parámetros.

3.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales con tratamiento viscoelástico en los que el material amortiguador se representa mediante un modelo fraccionario de cinco parámetros. Esta formulación se obtiene a partir de la ecuación local del balance de la cantidad de movimiento, en contraste a la de Padovan (1987) que se formula a partir del principio de los trabajos virtuales. La evaluación numérica del operador fraccionario se ha llevado a cabo por medio de la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria, lo que ha permitido desarrollar un esquema explícito y dos implícitos en los que se debe almacenar la historia de los desplazamientos y la de las fuerzas externas, pero no la de las tensiones, lo que reduce drásticamente el tiempo computacional y las necesidades de memoria. Se ha presentado un conjunto de aplicaciones numéri-

cas usando un modelo 2D de una viga en voladizo con tratamiento FLD, a partir de las cuales se han desprendido las siguientes conclusiones:

1. La formulación propuesta proporciona los mismos resultados que los de Padovan (1987), incluso con un grado de precisión ligeramente superior, puesto que esta precisa del cálculo aproximado de una integral para obtener las tensiones nodales.
2. El uso del esquema explícito **M-K-F** se ve considerablemente restringido debido a los problemas que presenta para proporcionar una solución estable.
3. Comparando los dos esquemas implícitos, la formulación **M-K-F** tiende a proporcionar soluciones menos amortiguadas, mientras que la formulación **M-C-K-F** sobreestima el amortiguamiento. Para el mismo paso de integración Δt , la formulación **M-K-F** presenta resultados más precisos, es decir, converge a la solución exacta con un mayor Δt . Pero el método de integración **M-C-K-F** es capaz de filtrar los ruidos parásitos que aparecen en la respuesta impulsiva de los sistemas estructurales.
4. La aproximación de Grünwald-Letnikov para el operador fraccionario involucra importantes inconvenientes en cuanto al número de operaciones que hay que realizar. Del estudio sobre el truncamiento de los coeficientes de Grünwald se puede concluir que el sistema con bajo amortiguamiento se puede resolver, sin sacrificar precisión, con la décima parte del número máximo de términos, lo que representa una memoria equivalente a la mitad del periodo del primer modo de vibración. Y para el caso con mayor amortiguamiento, la tercera parte de la historia, lo que equivale una memoria de 1.5 veces dicho periodo.

Finalmente, cabe destacar que este trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-c).

4

Análisis en frecuencia

En este capítulo se muestra un conjunto de algoritmos para el análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico. Para la caracterización de las matrices de amortiguamiento, se contemplan tanto modelos de amortiguamiento estructural como viscoso, conduciendo a sistemas de primer y de segundo orden, respectivamente.

En el caso más general, se considera que las propiedades del material viscoelástico son función de la frecuencia, por lo que los coeficientes de las matrices de amortiguamiento no son constantes. Este hecho conlleva a que el sistema estructural se define mediante un sistema de ecuaciones no lineales, perdiendo el carácter autoadjunto.

En primer lugar, se describen los métodos numéricos aproximados para la extracción de los valores y vectores propios complejos con los que, partiendo de la solución no amortiguada, se estiman los parámetros modales complejos a partir de las derivadas de los autovectores. En el caso en el que las propiedades del material viscoelástico dependan de la frecuencia, se propone un esquema iterativo que converge en un tiempo inferior al de otros métodos iterativos aproximados.

Asimismo, dado que para obtener la función de respuesta en frecuencia de los sistemas con amortiguamiento variable no se puede aplicar la superposición modal, se desarrolla una técnica de superposición de funciones de contribución modal que consiste en evaluar la respuesta particular de cada modo a las frecuencias de interés, teniendo en cuenta la variación de las propiedades modales.

4.1 Introducción

Los métodos numéricos que se presentan a continuación han sido especialmente concebidos para el análisis estacionario en el dominio de la frecuencia de sistemas estructurales sobre los que se aplica un tratamiento viscoelástico. Estos métodos permiten, por un lado, aproximar los autovalores y autovectores complejos, tanto para modelos de amortiguamiento constante como para los de variable en frecuencia. Por otro lado, permiten obtener la respuesta forzada mediante la superposición de la participación modal individual para el caso de sistemas con amortiguamiento variable, en los que se pierde el carácter autoadjunto.

Efectivamente, la dependencia en frecuencia de las propiedades mecánicas del material amortiguador introduce una no linealidad en el sistema, la cual no permite emplear los métodos clásicos para la resolución del problema generalizado de los valores propios, e impide igualmente aplicar la superposición modal para obtener la respuesta forzada. Por lo tanto, en este trabajo se ha desarrollado un conjunto de métodos numéricos para aproximar de forma eficiente tanto la solución del problema de los valores propios complejos, como la respuesta forzada a partir de lo que se ha denominado la superposición de funciones de contribución modal (MCF, del inglés *modal contribution functions*).

En relación a la extracción de los valores y vectores propios complejos, se propone una técnica que, partiendo de los modos normales del sistema no amortiguado y de sus derivadas, se aproxima el resultado complejo del sistema amortiguado mediante la estimación de la variación del autovector suscitada por el amortiguamiento introducido. Para los sistemas con amortiguamiento constante en frecuencia, este procedimiento proporciona resultados más precisos que el método MSE o el empleado en la técnica UMSM (véase la Sección 1.2.4.4 de la introducción). No obstante, como en el caso más general el amortiguamiento es variable en frecuencia, se desarrolla una modalidad iterativa que resuelve una única vez el sistema

no amortiguado y las iteraciones se llevan a cabo sobre los incrementos del autovector, mejorando así el tiempo de cálculo con respecto a otros métodos iterativos.

En lo concerniente a la respuesta en frecuencia de los sistemas con amortiguamiento variable, se propone una alternativa al método directo mediante la superposición de funciones de contribución modal (MCF), permitiendo así evaluar la participación individual de cada uno de los modos sobre la respuesta total, proporcionando información que de otra forma se pierde. En esta técnica, las MCF se construyen teniendo en cuenta que los parámetros modales varían con la frecuencia, de acuerdo con los métodos mencionados previamente.

Resumiendo, en primer lugar se revisan brevemente los procedimientos para calcular las derivadas de los autovalores y autovectores; seguidamente se presentan los métodos de resolución del problema de los valores propios complejos correspondientes a los sistemas de primer y de segundo orden, para modelos de amortiguamiento estructural y viscoso, respectivamente; a continuación se muestra el método de la superposición de funciones de contribución modal; y por último se verifica la eficiencia de los métodos desarrollados por medio de ejemplos numéricos. Para ello, se emplea un modelo bidimensional de viga en voladizo con recubrimiento amortiguador, donde el material viscoelástico se caracteriza mediante dos modelos diferentes: un modelo fraccionario de cinco parámetros y un modelo exponencial (o modelo de Zener), para los sistemas de primer y segundo orden, respectivamente. Los valores numéricos para la geometría de la viga, las propiedades físicas y los parámetros de los modelos de los materiales, se toman de los resultados de probetas ensayadas, recogidos en el Capítulo 2, con el fin de poder comparar asimismo los resultados de la simulación con la respuesta sísmica obtenida experimentalmente.

4.2 Derivadas de autovalores y autovectores

En esta sección se revisa de manera sucinta los métodos que permiten evaluar las derivadas de los valores y de los vectores propios en sistemas estructurales, tanto en los de primer como en los de segundo orden.

4.2.1 Sistemas de primer orden

Las derivadas de los autovalores y autovectores se emplean comúnmente en el análisis de sensibilidad y optimización de sistemas estructurales. Los métodos clásicos que permiten su cálculo en sistemas no amortiguados, simétricos y con autovalores no repetidos son el de Fox y Kapoor (1968) y el de Nelson (1976). Murthy y Haftka (1988) presentaron una revisión de métodos más modernos desarrollados hasta el final de la década de los ochenta, y en la literatura se pueden encontrar otros más recientes como los métodos algebraicos propuestos por Lee y Jung (1997a, 1997b).

En este trabajo se emplean exclusivamente los métodos de Fox y Kapoor (1968) y de Nelson (1976) para el cálculo de las derivadas de autovalores y autovectores en sistemas de primer orden dados por

$$(-\lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{K})\phi_r = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{K} son las matrices de masa y de rigidez de orden n , reales, simétricas y definidas positivas. Consecuentemente, tanto el autovalor λ_r como el autovector ϕ_r r -ésimos son reales. Este último puede ser normalizado arbitrariamente empleando la masa modal m_r según

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = m_r, \quad (4.2)$$

donde $(\bullet)^T$ representa el operador de la trasposición. Una técnica de normalización habitual es seleccionar la masa modal unidad, tal que $m_r = 1$.

Las derivadas del autovalor y del autovector se obtienen al diferenciar la ecuación (4.1),

$$-\lambda'_r \mathbf{M} \phi_r + (-\lambda_r \mathbf{M}' + \mathbf{K}') \phi_r + (-\lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi'_r = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

donde $(\bullet)'$ representa la derivada con respecto a un parámetro cualquiera. La multiplicación por ϕ_r^T en el lado izquierdo resulta

$$-\lambda'_r \phi_r^T \mathbf{M} \phi_r + \phi_r^T (-\lambda_r \mathbf{M}' + \mathbf{K}') \phi_r + \phi_r^T (-\lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi'_r = 0, \quad (4.4)$$

de modo que el último término del sumando es cero en virtud de la ecuación (4.1) y de la simetría de las matrices. Así, se puede despejar la derivada del autovalor r -ésimo λ'_r , satisfaciendo

$$\lambda'_r = \frac{\phi_r^T (-\lambda_r \mathbf{M}' + \mathbf{K}') \phi_r}{\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r}. \quad (4.5)$$

Para obtener la derivada del autovector ϕ'_r , en primer lugar se define el vector \mathbf{f}_r como sigue,

$$\mathbf{f}_r = -(-\lambda_r \mathbf{M}' + \mathbf{K}' - \lambda'_r \mathbf{M}) \phi_r, \quad (4.6)$$

de manera que la relación entre ϕ'_r y \mathbf{f}_r verifica

$$(-\lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi'_r = \mathbf{f}_r, \quad (4.7)$$

de donde ϕ'_r no puede ser despejado directamente puesto que la matriz $(-\lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{K})$ es singular. El método de Fox y Kapoor (1968) y el de Nelson (1976) permiten dar respuesta a este problema, como se enuncia a continuación.

El primero de ellos, conocido también como el método de la superposición modal, implica que la derivada del autovector ϕ'_r puede ser obtenida mediante una combinación de todos los autovectores del sistema,

$$\phi_r' = \Phi \mathbf{c}_r, \quad (4.8)$$

donde Φ indica la base modal completa. Para calcular el vector \mathbf{c}_r , la ecuación (4.8) se sustituye en (4.3) y se multiplica por la izquierda por el vector propio k -ésimo traspuesto ϕ_k^T , de forma que la propiedad de ortogonalidad respecto a las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} proporciona la siguiente relación,

$$\mathbf{c}_r(k) = \begin{cases} \frac{\phi_k^T \mathbf{f}_r}{\lambda_k - \lambda_r}, & \text{si } r \neq k \\ -\frac{1}{2} \phi_r^T \mathbf{M}' \phi_r, & \text{si } r = k, \end{cases} \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{c}_r(k)$ es el elemento k -ésimo del vector \mathbf{c}_r .

Este método es sencillo de implementar, sin embargo, para obtener la solución exacta, es preciso emplear la base modal completa. No obstante, en aplicaciones prácticas se puede obtener suficiente precisión truncando adecuadamente la base modal. Existen métodos como el de Wang (1991) y el de Zhang y Zerva (1996) que añaden un residuo a la solución truncada mejorando así la precisión.

Por el contrario, el método de Nelson (1976) sólo necesita el autovalor y autovector r -ésimos correspondientes para calcular la derivada del autovector ϕ_r' . Para ello, esta se descompone en una solución particular \mathbf{v}_r y en otra homogénea $c_r \phi_r$,

$$\phi_r' = \mathbf{v}_r + c_r \phi_r, \quad (4.10)$$

donde el escalar c_r se obtiene diferenciando previamente la ecuación (4.2),

$$2\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r' + \phi_r^T \mathbf{M}' \phi_r = 0, \quad (4.11)$$

pudiendo así combinar las ecuaciones (4.10) y (4.11) para satisfacer

$$c_r = -\frac{\phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r + \frac{1}{2} \phi_r^T \mathbf{M}' \phi_r}{\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r}, \quad (4.12)$$

aunque es habitual considerar la normalización de los autovectores respecto a la masa modal unidad, lo que conduce a

$$c_r = -\phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r - \frac{1}{2} \phi_r^T \mathbf{M}' \phi_r. \quad (4.13)$$

Finalmente, el vector \mathbf{v}_r se calcula mediante un procedimiento de pivotaje sobre la ecuación (4.7), tal y como propone Nelson (1976), con la desventaja de consumir mucho tiempo computacional.

4.2.2 Sistemas de segundo orden

El estudio de las derivadas en los sistemas no conservativos de segundo orden es más reciente que los mencionados en el apartado anterior. Los métodos más interesantes son los que trabajan sobre el espacio original, en oposición a los que lo hacen en el espacio de estado. En efecto, la ecuación cuadrática de los valores propios viene dada por

$$\left(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

donde se considera que las matrices de masa \mathbf{M} , de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} y de rigidez \mathbf{K} son reales, simétricas y de orden $n \times n$. Además, \mathbf{M} y \mathbf{K} son definidas positivas. Generalmente, tanto el autovalor s_r como el autovector \mathbf{u}_r r -ésimos son complejos (excepto si el sistema posee modos normales, en cuyo caso el autovector es real), por lo que no se acostumbra a denotar dicho carácter complejo con ningún símbolo. Los autovectores pueden ser normalizados según

$$\mathbf{u}_r^T (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_r = \frac{1}{\gamma_r}, \quad (4.15)$$

donde la constante de normalización γ_r se selecciona arbitrariamente. Por ejemplo, la alternativa más consistente con el análisis modal tradicional es

$$\gamma_r = \frac{1}{2s_r}, \quad (4.16)$$

puesto que para el caso no amortiguado, con $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, coincide con la normalización de la masa modal unidad.

Procediendo como en la sección anterior, las derivadas del autovalor s_r y del autovector \mathbf{u}_r se obtienen diferenciando previamente la ecuación (4.14) para dar

$$\begin{aligned} s'_r (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_r + (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r \\ + (s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}'_r = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

de forma que la multiplicación por la izquierda por el vector \mathbf{u}_r^T resulta

$$\begin{aligned} s'_r \mathbf{u}_r^T (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r^T (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r \\ + \mathbf{u}_r^T (s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}'_r = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde el último término del sumando se hace cero en virtud de la ecuación (4.14) y de la simetría de las matrices. Entonces, la derivada del autovalor r -ésimo s'_r verifica

$$s'_r = - \frac{\mathbf{u}_r^T (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^T (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_r}. \quad (4.19)$$

Para este tipo de sistemas, el vector \mathbf{f}_r se define de la manera siguiente,

$$\mathbf{f}_r = -s'_r (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_r - (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r, \quad (4.20)$$

y está relacionado con la derivada del autovector \mathbf{u}'_r tal que

$$(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}'_r = \mathbf{f}_r, \quad (4.21)$$

de modo que la derivada \mathbf{u}'_r no puede ser despejada directamente puesto que la matriz de rigidez dinámica $(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K})$ es singular. Adhikari

(1999) presentó un método de superposición modal equivalente al de Fox y Kapoor (1968), de manera que la derivada del autovector \mathbf{u}'_r satisface

$$\mathbf{u}'_r = -\frac{\gamma_r}{2} \left[\mathbf{u}_r^T (2s_r \mathbf{M}' + \mathbf{C}') \mathbf{u}_r \right] \mathbf{u}_r - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{2n} \left(\gamma_k \frac{\mathbf{u}_k^T (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r}{s_r - s_k} \mathbf{u}_k \right). \quad (4.22)$$

Un poco más actual es el método desarrollado por Friswell y Adhikari (2000), equivalente al de Nelson (1976), quienes descomponen la derivada del autovector en una solución particular \mathbf{b}_r y en otra homogénea $d_r \mathbf{u}_r$,

$$\mathbf{u}'_r = \mathbf{b}_r + d_r \mathbf{u}_r, \quad (4.23)$$

donde el escalar d_r viene dado por

$$d_r = -\gamma_r \left(\mathbf{u}_r^T (2s_r \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{b}_r + \mathbf{u}_r^T (s_r' \mathbf{M} + s_r \mathbf{M}' + \frac{1}{2} \mathbf{C}') \mathbf{u}_r \right) \quad (4.24)$$

y el vector \mathbf{b}_r se calcula mediante un procedimiento de pivotaje sobre la ecuación (4.21).

Aunque existen otros métodos recientes (Lee, Kim y Joung, 1999 y Choi, Jo, Kim y Lee, 2004), en esta investigación se usan exclusivamente el de Adhikari (1999) y el de Friswell y Adhikari (2000), que son los equivalentes a los que se han considerado en los sistemas de primer orden.

4.3 Extracción de autovalores y autovectores

A continuación, se describen los métodos que se han desarrollado para el problema de los autovalores complejos en sistemas de primer y de segundo orden, publicados en las revistas *Journal of Sound and Vibration* (Cortés y Elejabarrieta, 2006a) y *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (Cortés y Elejabarrieta, 2006b), respectivamente.

Antes de nada, se debe señalar que únicamente se estudian los autovalores y autovectores de los modos elásticos. En efecto, tal y como se indicó en la Sección 1.2.4.4, los modelos de amortiguamiento variable en frecuencia introducen modos extra en el sistema, que se denominan modos no viscosos, y que son modos con amortiguamiento supercrítico, por lo que no inducen un comportamiento vibratorio (véase también Adhikari (2002b) o Muller (2005) para más detalles). Por lo tanto, no son de interés en el análisis del comportamiento estacionario de los sistemas estructurales, por lo que a continuación sólo se estudian los modos elásticos.

4.3.1 Sistemas de primer orden

A continuación se describe el método que se ha desarrollado para resolver el problema complejo de los valores propios en sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico, dado por

$$\left(-\lambda_r^*(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^*(\omega)\right)\phi_r^* = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

donde $(\bullet)^*$ denota una magnitud compleja, y los subíndices $(\bullet)_e$ y $(\bullet)_v$ hacen referencia a las matrices de los materiales elásticos y viscoelásticos, respectivamente. La matriz de rigidez $\mathbf{K}_v^*(\omega)$ de los materiales viscoelásticos es compleja puesto que contiene el amortiguamiento del sistema, de manera que puede ser descompuesta en sus partes real e imaginaria, $\mathbf{K}_v^*(\omega) = \mathbf{K}_v(\omega) + i\mathbf{H}_v(\omega)$, donde $\mathbf{K}_v(\omega)$ representa la matriz de rigidez y $\mathbf{H}_v(\omega)$ la matriz de amortiguamiento estructural, todas ellas dependientes de la frecuencia ω , y que serán función del modelo de material empleado.

En primer lugar, se muestra el caso particular en el que el amortiguamiento es constante en frecuencia con el fin de presentar las bases del método. Posteriormente, se presenta la modalidad incremental para sistemas con elevado amortiguamiento, y finalmente se hace hincapié en el método iterativo que permite resolver el problema general dado por (4.25).

Así, si el amortiguamiento es constante, la ecuación (4.25) se simplifica tal que

$$\left(-\lambda_r^* \mathbf{M} + \mathbf{K}^*\right) \phi_r^* = \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v$ y $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v + i\mathbf{H}_v$ indican las matrices de masa y de rigidez del sistema completo. Inicialmente se parte de la solución del sistema no amortiguado,

$$\left(-\lambda_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \phi_{r,0} = \mathbf{0}, \quad (4.27)$$

donde $\lambda_{r,0}$ y $\phi_{r,0}$ expresan el autovector y autovector correspondientes, y $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$. Al introducir el amortiguamiento del sistema, la matriz de rigidez sufre un incremento $\Delta\mathbf{K}^* = i\mathbf{H}_v$ de modo que

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^*, \quad (4.28)$$

mientras que la matriz de masa no cambia, $\Delta\mathbf{M} = \mathbf{0}$. De esta forma, el autovalor y el autovector r -ésimos sufren sendas variaciones,

$$\lambda_r^* = \lambda_{r,0} + \Delta\lambda_r^* \quad (4.29)$$

y

$$\phi_r^* = \phi_{r,0} + \Delta\phi_r^*, \quad (4.30)$$

donde $\Delta\lambda_r^*$ y $\Delta\phi_r^*$ indican sus respectivos incrementos complejos. La aproximación de la formulación diferencial de la ecuación (4.3) por medio de variaciones finitas resulta

$$\left(-\Delta\lambda_r^* \mathbf{M} + \Delta\mathbf{K}\right) \phi_{r,0} + \left(-\lambda_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \Delta\phi_r^* = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

de modo que, a partir de la ecuación (4.5), el incremento del autovector verifica

$$\Delta\lambda_r^* = \frac{\phi_{r,0}^T \Delta K^* \phi_{r,0}}{\phi_{r,0}^T M \phi_{r,0}}. \quad (4.32)$$

De esta última ecuación se puede deducir que si se considera como hipótesis que los autovectores no se ven modificados por el amortiguamiento, $\Delta\phi_r^* = 0$, el autovalor sufre un incremento y el factor de pérdida modal η_r viene dado por

$$\eta_r = \frac{\phi_r^T H_v \phi_r}{\phi_r^T K \phi_r}, \quad (4.33)$$

lo cual concuerda con lo establecido por el método MSE. En cambio, si se considera que los autovectores varían según la ecuación (4.7), la sustitución de la derivada por un incremento finito satisface

$$(-\lambda_r M + K)\Delta\phi_r^* = \mathbf{f}_r^*, \quad (4.34)$$

donde

$$\mathbf{f}_r^* = -(-\Delta\lambda_r^* M + \Delta K^*)\phi_{r,0}. \quad (4.35)$$

El incremento $\Delta\phi_r^*$ puede ser resuelto por medio de los métodos de Fox y Kapoor (1968) o de Nelson (1976). Finalmente, haciendo uso del cociente de Rayleigh, el autovalor complejo correspondiente λ_r^* se puede actualizar tal que

$$\lambda_r^* = \frac{\phi_r^{*T} K^* \phi_r^*}{\phi_r^{*T} M \phi_r^*}. \quad (4.36)$$

La Tabla C.1 y la Tabla C.4 del Anexo C contienen sendos algoritmos empleando las derivadas de Fox y Kapoor (1968) y de Nelson (1976), respectivamente.

Aunque de las aplicaciones numéricas de la Sección 4.5 se desprende que este método es más preciso que el MSE, su exactitud puede verse mejorada mediante la modalidad incremental en la cual se divide la variación de la matriz de rigidez $\Delta K^* = iH_v$ en $q_{\text{máx}}$ incrementos iguales ΔK_q^* , de acuerdo con

$$\Delta \mathbf{K}_q^* = \frac{1}{q_{\text{máx}}} i \mathbf{H}_v. \quad (4.37)$$

Los algoritmos para esta modalidad también se recogen en el Anexo C, en la Tabla C.2 con el método de Fox y Kapoor (1968) y en la Tabla C.5 con el de Nelson (1976).

Finalmente, para resolver el sistema con amortiguamiento variable

$$\left(-\lambda_r^* (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega_r) + i \mathbf{H}_v(\omega_r) \right) \phi_r^* = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

donde la frecuencia natural ω_r del modo r -ésimo viene dada como la parte real de la raíz cuadrada del autovalor λ_r^* ,

$$\omega_r = \text{Re} \left(\sqrt{\lambda_r^*} \right), \quad (4.39)$$

se propone el algoritmo iterativo utilizando el método de Fox y Kapoor (1968) y el de Nelson (1976) mostrados en la Tabla C.3 y en la Tabla C.6 del Anexo C, respectivamente. Esta técnica comienza resolviendo el sistema real con las propiedades estáticas del material viscoelástico $\mathbf{K}_v^*(0)$, y se aproxima hacia la solución compleja mediante iteraciones sucesivas en las que la matriz de rigidez global compleja $\mathbf{K}^*(\omega_r)$ debe ser actualizada en función de la frecuencia natural ω_r , hasta que el error $\varepsilon_{r,j}$ de la iteración j -ésima sea menor que la tolerancia deseada. Dicho error $\varepsilon_{r,j}$ puede ser definido, por ejemplo, como

$$\varepsilon_{r,j} = \max \left(\frac{\text{Re}(\lambda_{r,j}^* - \lambda_{r,j-1}^*)}{\text{Re}(\lambda_{r,j-1}^*)}, \frac{\text{Im}(\lambda_{r,j}^* - \lambda_{r,j-1}^*)}{\text{Im}(\lambda_{r,j-1}^*)} \right), \quad (4.40)$$

con el objeto de que la solución converja tanto en su parte real como en la imaginaria, siendo esta última quien normalmente converge con mayor lentitud.

Este método, en oposición a la versión iterativa del método MSE (Trindade et ál. 2000) que debe resolver el problema de los valores propios sin amortiguamiento una vez en cada iteración, lo resuelve una única vez e itera sobre los incrementos, lo que implica una disminución importante del tiempo computacional.

Para concluir, cabe señalar que si la parte real de la matriz de rigidez global $\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega)$ presenta una fuerte dependencia en frecuencia, el método propuesto podría no proporcionar la precisión adecuada, por lo que habría que incluir la solución del sistema no amortiguado dentro de cada iteración, lo que no presenta ninguna ventaja respecto al método MSE iterativo en cuanto al tiempo computacional, aunque sí en cuanto a la precisión. Sin embargo, en el análisis de sistemas estructurales con tratamientos viscoelásticos, la rigidez de los materiales metálicos es mucho mayor que la de los amortiguadores, por lo que la componente real de la matriz de rigidez apenas varía significativamente.

4.3.2 Sistemas de segundo orden

En esta sección se presenta el método que se ha desarrollado para los sistemas en los que el amortiguamiento del material viscoelástico se caracteriza mediante la matriz de amortiguamiento $\mathbf{G}_v(t)$, de forma que el problema de los valores propios complejos viene dado por

$$\left(s_r^2(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + s_r \tilde{\mathbf{G}}_v(s_r) + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v \right) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (4.41)$$

donde $\tilde{\mathbf{G}}_v(s)$ indica la transformada de Laplace de $\mathbf{G}_v(t)$.

Al igual que en la sección previa, en primer lugar se contempla el caso particular en el que el sistema posee un amortiguamiento constante en frecuencia, o lo que es lo mismo, se caracteriza mediante la matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} , de forma que la ecuación (4.41) se escribe como

$$\left(s_r^2(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v \right) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}. \quad (4.42)$$

Siguiendo la misma metodología que para los sistemas de primer orden, inicialmente se debe resolver el sistema no amortiguado dado por el problema de los valores propios reales

$$(-\lambda_{r,0}\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{u}_{r,0} = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v$ y $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$. El autovalor $\lambda_{r,0}$ y el autovector $\mathbf{u}_{r,0}$ representan la solución no amortiguada, de forma que $s_{r,0} = i\sqrt{\lambda_{r,0}}$. Al introducir el amortiguamiento en el sistema, el autovalor s_r y el vector propio \mathbf{u}_r sufren sendas modificaciones dadas por

$$s_r = s_{r,0} + \Delta s_r \quad (4.44)$$

y por

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r,0} + \Delta\mathbf{u}_r, \quad (4.45)$$

respectivamente, de manera que a partir de las ecuaciones (4.19) y (4.21), considerando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{0}$ y $\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}$, los incrementos finitos Δs_r y $\Delta\mathbf{u}_r$ se pueden aproximar como

$$\Delta s_r = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,0}}{\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{r,0}} \quad (4.46)$$

y

$$(s_{r,0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Delta\mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r, \quad (4.47)$$

donde

$$\mathbf{f}_r = -\Delta s_r (2s_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,0}. \quad (4.48)$$

El incremento del autovector $\Delta\mathbf{u}_r$ puede ser resuelto de la ecuación (4.47) bien mediante el método AFK (método de Adhikari (1999) basado en el de Fox y Kapoor (1968)), o bien mediante el método FAN (método de Friswell y Adhikari (2000) basado en el de Nelson (1976)).

Una vez resuelto el autovector \mathbf{u}_r , se puede premultiplicar la ecuación (4.14) por el vector \mathbf{u}_r^H ,

$$\mathbf{u}_r^H (s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_r = 0, \quad (4.49)$$

donde $(\bullet)^H$ denota el operador de Hermite (el conjugado de la trasposición), de forma que tomando la nomenclatura de la Sección 2.7 del libro de Ewins (2000), el autovalor s_r se puede despejar de la ecuación de segundo grado

$$s_r^2 m_r + s_r c_r + k_r = 0, \quad (4.50)$$

donde

$$m_r = \mathbf{u}_r^H \mathbf{M} \mathbf{u}_r, \quad (4.51)$$

$$c_r = \mathbf{u}_r^H \mathbf{C} \mathbf{u}_r \quad (4.52)$$

y

$$k_r = \mathbf{u}_r^H \mathbf{K} \mathbf{u}_r, \quad (4.53)$$

de modo que m_r , c_r y k_r describen los parámetros modales de masa, amortiguamiento y rigidez, cuyo significado difiere con respecto al de los sistemas con modos normales (Ewins, 2000). A partir del autovalor s_r , se obtiene la frecuencia natural ω_r y el factor de amortiguamiento ζ_r modales. La frecuencia natural se obtiene a partir del módulo del autovalor,

$$\omega_r = |s_r|, \quad (4.54)$$

y el factor de amortiguamiento verifica

$$\zeta_r = -\frac{\operatorname{Re}(s_r)}{\omega_r}, \quad (4.55)$$

tales que

$$s_r = \omega_r \left(-\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right), \quad (4.56)$$

los cuales, para el caso de amortiguamiento constante en frecuencia, satisfacen

$$\omega_r^2 = \frac{\mathbf{u}_r^H \mathbf{K} \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^H \mathbf{M} \mathbf{u}_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (4.57)$$

y

$$\zeta_r = \frac{1}{2\omega_r} \frac{\mathbf{u}_r^H \mathbf{C} \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^H \mathbf{M} \mathbf{u}_r} = \frac{c_r}{2\omega_r m_r}. \quad (4.58)$$

Al considerar una aproximación en la que los autovectores no se ven modificados por el amortiguamiento del sistema, como sucede en los sistemas con amortiguamiento clásico, $\Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, entonces la aproximación del autovalor r -ésimo s_r deviene

$$s_r = \omega_{r,0} \left(-\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right), \quad (4.59)$$

donde $\omega_{r,0}$ es la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento y el factor de amortiguamiento ζ_r viene dado por

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,0}}{\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{K} \mathbf{u}_{r,0}}, \quad (4.60)$$

resultado que coincide con el que provee la hipótesis de Basile empleada en el método UMSM para sistemas con bajo amortiguamiento, $\zeta_r < 0.01$ (véase la Sección 1.2.4.4 de la introducción). Cuando el amortiguamiento no es pequeño, esta hipótesis deja de ofrecer resultados precisos.

A continuación se propone un método en un único paso para sistemas con amortiguamiento medio, en el que el incremento del autovector $\Delta \mathbf{u}_r$, ocasionado por el amortiguamiento se estima a partir de la ecuación (4.47), donde se emplea bien el método AFK o bien el método FAN, tal y como se recoge en la Tabla D.1 y en la Tabla D.4 del Anexo D, respectivamente.

Para sistemas con elevado amortiguamiento, se formula una modalidad mediante un procedimiento incremental. Para ello, se divide la variación de la matriz de amortiguamiento en $q_{\text{máx}}$ incrementos iguales, de acuerdo con

$$\Delta \mathbf{C}_q = \frac{1}{q_{\text{máx}}} \mathbf{C}, \quad (4.61)$$

de forma que los algoritmos se modifican según se indica en la Tabla D.2 para las derivadas AFK, y en la Tabla D.5 para las FAN.

Finalmente, cuando se contempla amortiguamiento no viscoso, se debe resolver el problema no lineal

$$\left(s_r^2 \mathbf{M} + s_r \tilde{\mathbf{G}}(s_r) + \mathbf{K}\right) \mathbf{u}_r = \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

Las derivadas de los autovalores y autovectores para este caso son presentadas por Adhikari (2002a), quien propone diferenciar la ecuación (4.62) de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} s_r' \left(2s_r \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}}(s_r)\right) \mathbf{u}_r + (s_r^2 \mathbf{M}' + s_r \tilde{\mathbf{G}}'(s_r) + \mathbf{K}') \mathbf{u}_r \\ + (s_r^2 \mathbf{M} + s_r \tilde{\mathbf{G}}(s_r) + \mathbf{K}) \mathbf{u}_r' = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

y descomponer la derivada total $\tilde{\mathbf{G}}'(s_r)$ en derivadas parciales,

$$\tilde{\mathbf{G}}'(s_r) = \frac{d\tilde{\mathbf{G}}(s_r)}{d\alpha} = \frac{\partial s_r}{\partial \alpha} \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_r} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}(s)}{\partial \alpha} \Big|_{s=s_r}, \quad (4.64)$$

donde α indica una variable independiente genérica. Pero el método que aquí se propone emplea incrementos totales de la matriz de amortiguamiento, por lo que la forma de la ecuación (4.63) con incrementos finitos, que para $\tilde{\mathbf{G}}(s_r) = \mathbf{0}$, $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{0}$ y $\Delta \tilde{\mathbf{G}}(s_r) = \tilde{\mathbf{G}}(s_r)$ resulta

$$s_r \left(2\Delta s_r \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}}(s_r)\right) \mathbf{u}_r + (s_r^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

Esta ecuación es equivalente a la del caso viscoso si se considera una matriz de amortiguamiento compleja \mathbf{C}_r^* definida como

$$\mathbf{C}_r^* = \tilde{\mathbf{G}}(s_r), \quad (4.66)$$

de forma que el carácter complejo de la matriz \mathbf{C}_r^* implica que su comportamiento no es puramente viscoso, si no que las componentes real e imagi-

naria inducen fuerzas disipadoras y elásticas, es decir, proporcionales a la velocidad y al desplazamiento, respectivamente. Cabe mencionar que las fuerzas elásticas generan variaciones en el módulo de almacenamiento. Pero el carácter complejo de C_r^* no impide que se puedan emplear las mismas ecuaciones (4.46)-(4.48) (aunque el tratamiento matemático se hace más laborioso), implementando de manera iterativa las derivadas AFK o FAN según se indica en los algoritmos de la Tabla D.3 y Tabla D.6 del Anexo D. Así, se comienza por resolver el sistema no amortiguado. Cuando la matriz de amortiguamiento se evalúa para el autovector considerado, se aplican las iteraciones correspondientes hasta alcanzar la precisión deseada, de forma que el error $\varepsilon_{r,j}$ tras cada iteración puede venir definido tal que

$$\varepsilon_{r,j} = \max \left(\frac{\operatorname{Re}(s_{r,j} - s_{r,j-1})}{\operatorname{Re}(s_{r,j-1})}, \frac{\operatorname{Im}(s_{r,j} - s_{r,j-1})}{\operatorname{Im}(s_{r,j-1})} \right), \quad (4.67)$$

de modo que, al igual que para los sistemas de primer orden, tiene el propósito de converger tanto en la parte real como en la imaginaria del autovector, aunque para este caso es la parte real quien presenta generalmente menor velocidad de convergencia.

4.4 Respuesta en frecuencia

A continuación se presenta el método de la superposición de las funciones de contribución modal (MCF), con el que se estima la respuesta en frecuencia de estructuras con amortiguamiento variable en frecuencia. Este método proporciona información sobre la participación individual de cada modo sobre la respuesta total, información que de otra forma se pierde al emplear métodos directos, y que resulta de interés en aplicaciones prácticas de ingeniería. En primer lugar se enuncia el método para los sistemas de primer orden, con modelos de amortiguamiento estructural variable en frecuencia, y después para los de segundo orden, con modelos de amortiguamiento no viscoso.

4.4.1 Sistemas de primer orden

La ecuación que representa un sistema estructural con amortiguamiento viscoelástico, donde el material amortiguador se caracteriza mediante el módulo complejo variable en frecuencia, viene dada por

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)) \mathbf{U}^* = \mathbf{F}^*, \quad (4.68)$$

donde \mathbf{U}^* y \mathbf{F}^* son las amplitudes complejas del vector de los desplazamientos y de las fuerzas externas.

El método que se propone (Cortés y Elejabarrieta, 2005a) toma sus bases del análisis modal clásico (Ewins, 2000). En este, considerando el carácter autoadjunto del sistema, la función de respuesta en frecuencia (FRF) compleja $H_{ij}(\omega)$, que relaciona los grados de libertad i y j , se evalúa mediante la participación individual de cada modo ${}_r H_{ij}(\omega)$, tal que

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n {}_r H_{ij}(\omega), \quad (4.69)$$

donde

$${}_r H_{ij}(\omega) = \frac{{}_r \phi_i^* {}_r \phi_j^*}{m_r^* (\lambda_r^* - \omega^2)}. \quad (4.70)$$

De igual manera, al considerar el amortiguamiento del sistema, la FRF $H_{ij}(\omega)$ se puede evaluar mediante la superposición de las funciones de contribución modal,

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n {}_r MCF_{ij}(\omega), \quad (4.71)$$

donde las MCF se construyen mediante modos variables (que no tienen el sentido de modos propios) cuyas propiedades modales $\lambda_r^*(\omega)$, $\phi_r^*(\omega)$ y $m_r^*(\omega)$ son función de la frecuencia de excitación ω , proporcionando

$${}_r MCF_{ij}(\omega) = \frac{{}_r \phi_i^*(\omega) {}_r \phi_j^*(\omega)}{m_r^*(\omega) (\lambda_r^*(\omega) - \omega^2)}. \quad (4.72)$$

Para obtener la FRF a las frecuencias que se desee, se debe resolver el problema complejo de los valores propios de forma que el tiempo computacional se reduce drásticamente si se emplea el método mostrado en la sección anterior, en comparación con los clásicos como el de Lanczos (1950) o el de Arnoldi (1951). De esta forma, al poder evaluar la contribución individual de cada modo a la respuesta total, se dispone de una información importante para aplicaciones de ingeniería, que de otra forma se pierde.

4.4.2 Sistemas de segundo orden

A continuación se presenta el método de la superposición de funciones de contribución modal adaptado a los sistemas de segundo orden. En efecto, la ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia viene dada por

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}^*(\omega) + \mathbf{K}) \mathbf{U}^* = \mathbf{F}^*, \quad (4.73)$$

que a diferencia de los sistemas con amortiguamiento viscoso (Ewins, 2000), la matriz $\mathbf{C}^*(\omega)$ es compleja y dependiente de la frecuencia de excitación. Esta matriz se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la matriz de amortiguamiento $\mathbf{G}(t)$.

Partiendo de la función de respuesta en frecuencia de un sistema con amortiguamiento viscoso, la MCF del modo r -ésimo relacionando los grados de libertad i y j resulta

$${}_r MCF_{ij}(\omega) = \frac{{}_r R_{ij}(\omega) + i {}_r S_{ij}(\omega) \frac{\omega}{\omega_r(\omega)}}{\omega_r^2(\omega) - \omega^2 + 2i\omega\omega_r(\omega)\zeta_r(\omega)}, \quad (4.74)$$

donde los coeficientes modales de frecuencia natural $\omega_r(\omega)$ y factor de amortiguamiento $\zeta_r(\omega)$ deben evaluarse a las frecuencias deseadas resolviendo previamente el problema de los valores propios, por ejemplo, como se mostró en la sección previa. Los coeficientes ${}_rR_{ij}(\omega)$ y ${}_rS_{ij}(\omega)$ representan la posición j -ésima de los vectores ${}_r\mathbf{R}_i(\omega)$ y ${}_r\mathbf{S}_i(\omega)$, dados por

$${}_r\mathbf{R}_i(\omega) = 2 \left(\zeta_r(\omega) \operatorname{Re}({}_r\mathbf{T}_i(\omega)) - \sqrt{1 - \zeta_r^2(\omega)} \operatorname{Im}({}_r\mathbf{T}_i(\omega)) \right) \quad (4.75)$$

y por

$${}_r\mathbf{S}_i(\omega) = 2 \operatorname{Re}({}_r\mathbf{T}_i(\omega)), \quad (4.76)$$

donde

$${}_r\mathbf{T}_i(\omega) = \begin{pmatrix} u_{ir}(\omega) \\ a_r(\omega) \end{pmatrix} \mathbf{u}_r(\omega), \quad (4.77)$$

de modo que el parámetro $a_r(\omega)$ proviene de

$$a_r(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r(\omega) \\ s_r(\omega)\mathbf{u}_r(\omega) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}^*(\omega) & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r(\omega) \\ s_r(\omega)\mathbf{u}_r(\omega) \end{Bmatrix}, \quad (4.78)$$

para $1 \leq r \leq n$.

Concluyendo, para los sistemas de segundo orden, la FRF se puede evaluar a cada frecuencia a partir de la superposición de las funciones de contribución modal de forma similar que para los sistemas de primer orden, pero se constata que las ecuaciones que se deben emplear son sensiblemente más complejas.

Por último, se debe remarcar que en la construcción de la respuesta, no se ha incluido el efecto de los modos con amortiguamiento supercrítico introducidos por el carácter no viscoso del amortiguamiento (véase la Sección 1.2.4.4 de la introducción, o bien los artículos de Adhikari (2002) y Muller (2005) para más detalles), puesto que su comportamiento es puramente transitorio y no tienen influencia en la respuesta estacionaria.

4.5 Aplicación numérica

En esta sección se presenta el conjunto de ejemplos numéricos llevados a cabo con los dos propósitos siguientes: (I) el de evaluar la rapidez y la precisión de los métodos propuestos para la extracción de los valores y vectores propios complejos, (II) y el de comparar la respuesta sísmica obtenida mediante la superposición de MCF con la del método directo y con resultados experimentales.

Para ello, se analizó el modelo de viga en voladizo con recubrimiento FLD de la Figura 4.1, que representa la probeta tipo AFLD-10-180 de las mediciones mostradas en el Capítulo 2. Así, la longitud, espesor y anchura de la capa metálica fueron 180 mm, 1.05 mm y 9.85 mm, respectivamente, y el espesor de la capa del recubrimiento fue 1.52 mm. El módulo de Young, densidad y coeficiente de Poisson del acero fueron $E_e = 176.2 \times 10^9$ Pa, $\rho_e = 7782$ kg/m³ y $\nu_e = 0.3$, y para el material viscoelástico, $\rho_v = 1429$ kg/m³ y $\nu_v = 0.3$.

Los algoritmos desarrollados para los sistemas de primer y de segundo orden se pusieron en práctica caracterizando el material viscoelástico mediante modelos de amortiguamiento estructural y viscoso, respectivamente. Para poder contemplar tanto casos de amortiguamiento constante como variable, en cada aplicación se definieron los parámetros adecuados, tomando como referencia los indicados en la Tabla 2.8 para el modelo con derivadas fraccionarias (FD) de cinco parámetros y el modelo Zener, respectivamente.

Al igual que en la aplicación numérica del Capítulo 3, cada capa de la viga se discretizó en elementos finitos rectangulares bilineales con hipótesis de tensión plana. Se empleó la matriz de masa consistente, y para la matriz de rigidez, se hizo uso de integración reducida con control de *hourglassing* de Kosloff y Frazier (1978). La formulación de dichas matrices se recoge en el Anexo B.

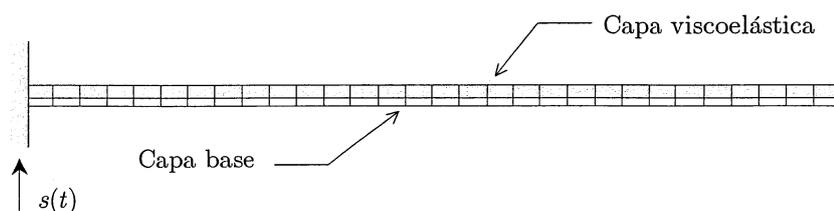


Figura 4.1. Modelo de viga en voladizo con recubrimiento FLD excitada por la base.

4.5.1 Extracción de autovalores y autovectores

A continuación se muestran las aplicaciones numéricas realizadas relativas a la extracción de los valores y vectores propios de la viga en voladizo. En primer lugar, se consideraron modelos de amortiguamiento constante en frecuencia, y seguidamente un modelo fraccionario (FD) de cinco parámetros y un modelo Zener. Estos últimos modelos permiten tener en cuenta la dependencia en frecuencia de las propiedades mecánicas del material amortiguador.

Para el sistema de primer orden se empleó un modelo de amortiguamiento estructural de forma que la matriz de rigidez del material viscoelástico se construyó con el módulo de almacenamiento promedio del modelo fraccionario, $E_v = \frac{1}{2}(E_0 + E_\infty) = 2.115 \times 10^9 \text{ Pa}$, y se tuvo en cuenta un factor de amortiguamiento equivalente a su máximo, $\eta_0 = 0.90$, tal que $\mathbf{H}_v = \eta_0 \mathbf{K}_v$. La solución exacta se obtuvo mediante el método IRAM (Sorensen, 1992).

Referente al sistema de segundo orden, para la matriz de rigidez se utilizó el módulo de almacenamiento estático del modelo Zener, $E_v = 0.371 \times 10^9 \text{ Pa}$, y se consideró un parámetro de amortiguamiento viscoso dado por $c = E_\infty \tau = 6.182 \times 10^6 \text{ Pa s}$. La solución exacta se obtuvo mediante la factorización QZ en el espacio de estado (Moler y Stewart, 1973).

La primera de las aplicaciones numéricas evalúa la rapidez de los métodos propuestos en función del tamaño del sistema, desde 62 hasta 302 grados de libertad (GDL), es decir, empleando 10, 20, 30, 40 y 50 elementos finitos en cada capa. En la Tabla 4.1 se muestra el tiempo, en segun-

dos, que fue necesario para resolver el problema no amortiguado (indicado por t_0) y para obtener todos los modos complejos mediante los métodos exactos IRAM y QZ, y por las diferentes modalidades del método propuesto. De estos resultados se desprende que el tiempo empleado para resolver el problema de los valores propios complejos crece exponencialmente en función de los GDL del sistema, aunque la tasa de crecimiento es diferente para cada uno de los métodos. Así, los métodos que se han desarrollado basados en la superposición modal son los más rápidos, consumiendo un tiempo algo mayor (pero aún así del mismo orden) del estrictamente necesario para resolver el problema no amortiguado. Por otro lado, excepto para los sistemas de tamaño más pequeño, los métodos exactos son algo más rápidos que los basados en las derivadas de Nelson (1976), pero aquellos dejan de ser eficientes en sistemas de gran tamaño cuando se requiere exclusivamente un número limitado de modos.

Tabla 4.1

Tiempo computacional en función de los GDL del sistema según diferentes métodos

GDL	62	122	182	242	302	
t_0	0.016	0.032	0.078	0.156	0.343	
Modelo FD						
IRAM	0.390	0.640	1.469	3.079	5.797	
Nuevo	{ Fox y Kapoor	0.048	0.095	0.234	0.468	0.937
	{ Nelson	0.078	0.469	1.797	4.640	7.472
Modelo Zener						
QZ	0.109	1.062	3.531	8.062	16.03	
Nuevo	{ AFK	0.047	0.126	0.250	0.422	0.843
	{ FAN	0.157	1.110	3.905	9.610	23.34

En efecto, tanto el método IRAM como el QZ, así como los basados en las derivadas de Fox y Kapoor (1968), dejan de ser eficientes cuando se estudian sistemas de gran tamaño sobre los que se desea una solución trunca- da. Por ejemplo, para estudiar únicamente los diez modos de frecuencia natural más baja en el sistema de 302 GDL usando las derivadas de Nelson (1978), se necesitan los resultados del sistema no amortiguado relativos únicamente a esos diez modos y el tiempo computacional se reduce en

aproximadamente a la décima parte, que aunque siendo del mismo orden que haciendo uso de las derivadas de Fox y Kapoor (1968), estas precisan de la base modal completa, requiriendo mayor espacio de memoria.

Con el fin de evaluar la precisión de los métodos desarrollados, en la Tabla 4.2 se muestran los resultados relativos al modelo de 302 GDL obtenidos por los métodos exactos, los aproximados MSE y UMSM, y los desarrollados en esta tesis.

Tabla 4.2

Resultados modales según diferentes métodos para amortiguamiento constante

	Modelo FD		
	IRAM	Nuevo (Nelson)	MSE
ω_1 (10^3 rad/s)	0.1625	0.1625	0.1612
η_1	0.2257	0.2257	0.2265
ω_2 (10^3 rad/s)	1.0188	1.0188	1.0109
η_2	0.2255	0.2255	0.2262
ω_3 (10^3 rad/s)	2.8555	2.8555	2.8335
η_3	0.2250	0.2250	0.2257
	Modelo Zener		
	QZ	Nuevo (FAN)	UMSM
ω_1 (10^3 rad/s)	0.1434	0.1434	0.1433
ζ_1	0.0685	0.0684	0.0684
ω_2 (10^3 rad/s)	0.9153	0.9141	0.8986
ζ_2	0.4355	0.4324	0.4284

Concerniente a la viga en voladizo modelada mediante un sistema de primer orden, en la Tabla 4.2 se muestra la frecuencia natural ω_r y el factor de pérdida η_r de los tres primeros modos, pudiéndose observar que el método propuesto provee la misma solución que el método IRAM, y el MSE comete errores del orden del 1%.

Las diferencias en la frecuencia natural ω_r y en el factor de amortiguamiento ζ_r modales son más patentes en el sistema de segundo orden, para el que únicamente se muestran los resultados de los dos primeros modos, puesto que a partir del tercero el amortiguamiento es supercrítico y el método QZ no proporciona resultados correctos. Mientras que para el mé-

todo aquí desarrollado las desviaciones no alcanzan el 0.7% para el factor de amortiguamiento del segundo modo, los errores cometidos por el UMSM son del orden del 2% tanto para el factor de pérdida como para la frecuencia natural.

En la Tabla 4.3 se muestran los resultados que se obtuvieron tomando los valores indicados en la Tabla 2.8 para los parámetros de los modelos FD y Zener, haciendo uso de los métodos desarrollados para amortiguamiento variable.

Tabla 4.3
Resultados modales según diferentes métodos iterativos para amortiguamiento variable

	Modelo FD			
	IRAM	Nuevo (Nelson)	MSE	
ω_1 (10^3 rad/s)	0.1516	0.1515	0.1515	
η_1	0.1273	0.1273	0.1273	
ω_2 (10^3 rad/s)	1.0518	1.0512	1.0512	
η_2	0.1258	0.1260	0.1260	
ω_3 (10^3 rad/s)	3.0618	3.0609	3.0609	
η_3	0.0850	0.0851	0.0851	
	Modelo Zener			
	QZ	Nuevo (Nelson)	Nuevo (FAN)	UMSM
ω_1 (10^3 rad/s)	0.1456	0.1458	0.1434	0.1433
ζ_1	0.0657	0.0576	0.0657	0.0660
ω_2 (10^3 rad/s)	1.0933	1.0689	0.9043	0.8983
ζ_2	0.0905	0.0807	0.1231	0.1301
ω_3 (10^3 rad/s)	3.0951	3.0967	2.5398	2.5190
ζ_3	0.0331	0.0334	0.0524	0.0557

De estos resultados se desprende que para el sistema con modelo FD, ambos métodos aproximados proporcionan la misma solución. La desviación máxima respecto al método IRAM no supera el 0.1% en ningún caso. En cuanto al tiempo computacional, cabe indicar que el método propuesto necesitó 1.28 segundos, mientras que el método MSE empleó 5.19.

Para el modelo Zener resolviendo un sistema de segundo orden, los errores superan incluso el 65% para los dos métodos aproximados. No obs-

tante, si se considera que el modelo Zener equivale a un modelo de amortiguamiento estructural tal que el módulo complejo varía en frecuencia según

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + iE_\infty\omega\tau}{1 + i\omega\tau}, \quad (4.79)$$

tal y como se indicó en la Sección 1.2.1.1, se puede resolver el mismo problema como un sistema de primer orden. Los resultados relativos a esta variante empleando las derivadas de Nelson (1978) también se reflejan en la Tabla 4.3, constatándose que aunque los resultados son en general algo mejores, no se alcanza la precisión que lograda con el modelo FD.

Concluyendo, los resultados mostrados han puesto de manifiesto que el método iterativo desarrollado para sistemas de primer orden con amortiguamiento estructural es más efectivo que otros métodos aproximados. Otros ejemplos numéricos para sistemas de primer y de segundo orden se pueden encontrar en las publicaciones derivadas del presente trabajo (Cortés y Elejabarrieta, 2006a, 2006b).

4.5.2 Respuesta a la excitación por la base

En este apartado se exponen los resultados obtenidos relativos a la respuesta de la viga en voladizo con recubrimiento FLD representada en la Figura 4.1, excitada por la base según un movimiento caracterizado por la función temporal $s(t)$. El desplazamiento del extremo libre fue calculado por un método directo y por la superposición de MCF. Como en el análisis mostrado en la sección anterior se dedujo que con el modelo FD se lograron resultados más precisos que con el de Zener, en el ejemplo numérico que se muestra a continuación se caracterizó el material viscoelástico mediante aquel, cuyos parámetros se toman de la Tabla 2.8.

La ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia dada por (4.68) puede ser escrito diferenciando entre los grados de libertad relativos al desplazamiento de la base y los desconocidos, indicados mediante los subíndices $(\bullet)_1$ y $(\bullet)_2$, respectivamente,

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^*(\omega) & \mathbf{K}_{12}^*(\omega) \\ \mathbf{K}_{21}^*(\omega) & \mathbf{K}_{22}^*(\omega) \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^* \\ \mathbf{U}_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^* \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (4.80)$$

donde \mathbf{R}^* denota el vector de la amplitud compleja de las reacciones en la base. El vector de desplazamientos \mathbf{U}_2^* se puede despejar mediante métodos directos a partir de la ecuación

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M}_{22} + \mathbf{K}_{22}^*(\omega) \right) \mathbf{U}_2^* = - \left(-\omega^2 \mathbf{M}_{21} + \mathbf{K}_{21}^*(\omega) \right) \mathbf{U}_1^*. \quad (4.81)$$

Para obtener la MCF r -ésima, se debe resolver a cada frecuencia ω que se desee el problema de los valores propios

$$\left(-\lambda_r^* \mathbf{M}_{22} + \mathbf{K}_{22}^*(\omega) \right) \Phi_r^* = \mathbf{0} \quad (4.82)$$

y pasar la ecuación (4.81) a la base modal para calcular el desplazamiento modal q_r^* dado por

$$\mathbf{U}_2^* = \Phi_r^* q_r^* \quad (4.83)$$

según

$$q_r^* = - \frac{\Phi_r^{*T} \left(-\omega^2 \mathbf{M}_{21} + \mathbf{K}_{21}^*(\omega) \right) \mathbf{U}_1^*}{\Phi_r^{*T} \left(-\omega^2 \mathbf{M}_{22} + \mathbf{K}_{22}^*(\omega) \right) \Phi_r^*}. \quad (4.84)$$

En la Figura 4.2 se representan el módulo y la fase de las tres primeras MCF relativas al desplazamiento del extremo derecho. Estas figuras aportan información sobre la participación individual de cada modo, información que se pierde cuando se emplea un método directo. Se contempla que el modo menos amortiguado es el primero, dada su mayor amplitud en la frecuencia de resonancia. El modo más amortiguado es el tercero, estando en fase con el primero, y estos dos en contrafase con el segundo.

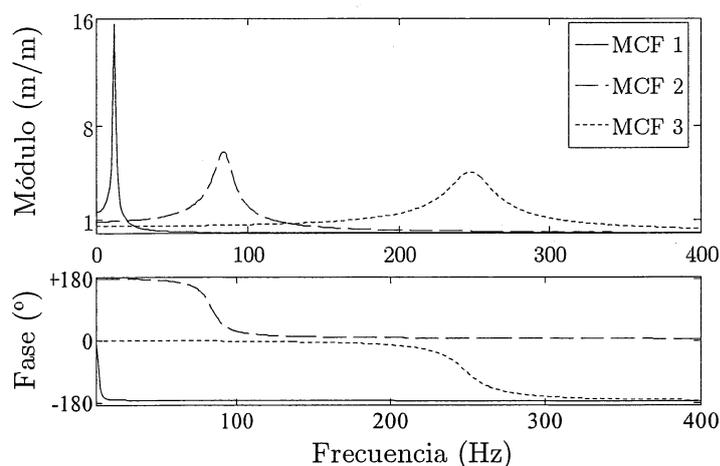


Figura 4.2. Tres primeras MCF de la respuesta sísmica de la viga en voladizo.

La respuesta proporcionada por la superposición de todas las MCF se representa en la Figura 4.3, que coincide con la proporcionada por el método directo. También se representa la solución superponiendo las tres primeras MCF, constatándose que alrededor de los tres picos de resonancia la solución coincide con la del método directo. Las mayores diferencias aparecen en la respuesta estática, y obviamente, a partir del tercer pico, al no tener en cuenta la contribución de modos de mayor orden.

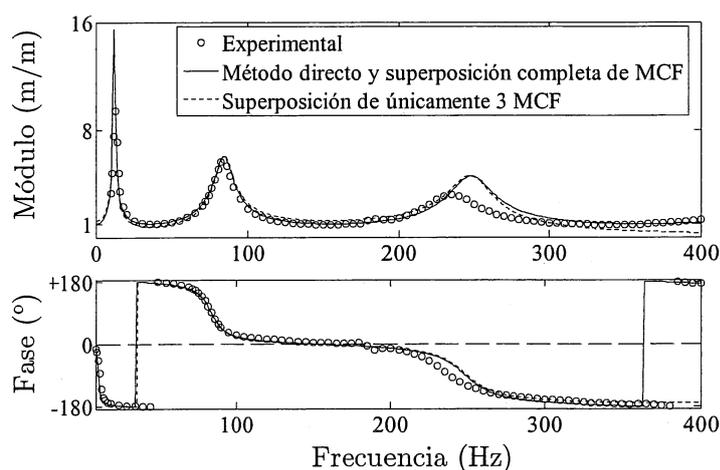


Figura 4.3. Respuesta sísmica de la probeta AFLD-10-180-1 obtenida empírica y numéricamente: método directo, superposición de tres y de todas las MCF.

Igualmente, la Figura 4.3 ilustra la respuesta experimental de la probeta AFLD-10-180-1, obtenida tal y como se indicó en el Capítulo 2. La

aproximación de la respuesta sísmica hasta 200 Hz, conteniendo las dos primeras resonancias, es admisible excepto en el primer cambio de signo de la fase, que en el caso experimental, está más retrasado. A partir de 200 Hz, el efecto de la sobreestimación del módulo de almacenamiento se hace patente. En efecto, el hecho de que el modelo considere una rigidez superior que la advertida empíricamente (véase la Figura 2.9), se traduce en un incremento de la tercera frecuencia propia, desplazando el pico de resonancia hacia la derecha, y en una disminución del amortiguamiento, por lo que se incrementa la amplitud de dicho pico.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se ha mostrado un conjunto de métodos numéricos aproximados (Cortés y Elejabarrieta, 2005a, 2006a, 2006b) desarrollados para el análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas estructurales con amortiguamiento viscoelástico. Se ha contemplado el caso en el que las propiedades dinámicas del material viscoelástico varían en frecuencia, caracterizándolas mediante un modelo FD de cinco parámetros y un modelo Zener.

Por un lado, se han presentado algoritmos para resolver el problema de los valores y vectores propios complejos en sistemas de primer y de segundo orden que, partiendo de la solución no amortiguada, estiman las propiedades modales a partir de las derivadas de los autovectores. Para el caso general en el que se considera la dependencia en frecuencia de las propiedades del material viscoelástico, se ha propuesto un esquema iterativo que converge en un tiempo muy inferior al de otros métodos iterativos. De las aplicaciones numéricas se desprende que la caracterización del material mediante el modelo FD, implicando un módulo complejo que permite estudiar el problema como un sistema de primer orden con matriz de rigidez compleja variable en frecuencia, ha proporcionado los mejores resultados.

Por otro lado, se ha propuesto un método para obtener la respuesta en frecuencia mediante la superposición de funciones de contribución mo-

dal, las cuales, a diferencia de los métodos directos, permiten evaluar de forma individual la participación de cada modo a la respuesta total. Al igual que en la superposición modal clásica, el número de MCF necesario para obtener la solución equivalente dada por los métodos directos es función del número de modos contenidos en el ancho de banda considerado, y de la cercanía del resto de los modos a las frecuencias de interés.

Comparando las respuestas numéricas con la experimental, se ha podido constatar que el exceso de rigidez que aporta el modelo FD a partir de 200 Hz, implica, por un lado, un incremento de la tercera frecuencia propia desplazando el pico de resonancia hacia la derecha, y por otro lado, un aumento de su amplitud.

5

Homogeneización de vigas

En este capítulo se presentan dos formulaciones homogeneizadas para la respuesta dinámica de vigas estructurales sobre las que se aplica un tratamiento superficial viscoelástico. La primera de ellas es válida para el estudio de la respuesta transitoria considerando que el material viscoelástico se caracteriza mediante un modelo fraccionario. La segunda permite el análisis en el dominio de la frecuencia de vigas cortas, o con capas gruesas, en las que las deformaciones debidas a los esfuerzos de cortadura adquieren importancia, y por consiguiente no pueden ser despreciados.

En efecto, los modelos homogeneizados simplifican el análisis de los sistemas estructurales compuestos por diferentes materiales, reduciendo el costo computacional. Para el caso de vigas con tratamiento viscoelástico en capa libre, la formulación de Oberst y Frankenfeld (1952) es la que comúnmente se emplea para obtener la respuesta estacionaria en el dominio de la frecuencia, pero no permite llevar a cabo análisis transitorios. Con este modelo se obtiene una rigidez compleja equivalente deducida a partir de la teoría de Euler-Bernoulli para vigas delgadas.

Así, las formulaciones que se presentan en este capítulo pretenden generalizar la de Oberst y Frankenfeld (1952) para su uso tanto en análisis transitorios, como para en estudios en el dominio de la frecuencia de vigas gruesas en las que los efectos de la cizalladura no son despreciables frente a los de flexión.

5.1 Introducción

En la actualidad, el análisis de vigas con tratamiento superficial viscoelástico en capa libre (FLD, del inglés *free layer damping*) en sus configuraciones asimétrica y simétrica (véase la Sección 1.2.3) se lleva a cabo mediante el modelo homogeneizado propuesto por Oberst y Frankenfeld (1952), con el fin de minimizar los recursos computacionales. Se trata de una formulación que, empleando la hipótesis de Euler-Bernoulli para vigas delgadas, conduce a una rigidez compleja equivalente B_{eq}^* dependiente de la frecuencia de excitación ω .

El uso de este modelo queda completamente relegado al dominio de la frecuencia, además de no contemplar los efectos de la cortadura, que pueden ser de importante consideración para el caso de vigas gruesas. Por lo tanto, el trabajo que se presenta en este capítulo tiene un doble propósito:

1. El primero de ellos, basándose en la formulación mostrada en el Capítulo 3, es el de desarrollar un modelo homogeneizado de elementos finitos (EF) para el análisis dinámico transitorio de vigas FLD, donde el material viscoelástico se caracteriza mediante un modelo con derivadas fraccionarias (FD) de cinco parámetros.
2. El segundo objetivo consiste en obtener una rigidez de flexión homogeneizada que tenga en cuenta los efectos de la cortadura para que pueda ser usada en el análisis en frecuencia de vigas FLD con capas gruesas.

En primer lugar, en la Sección 5.2 se presenta primeramente la formulación EF para el análisis transitorio de vigas FLD establecida a partir de la teoría de Euler-Bernoulli. Dicha formulación proporciona una ecuación del movimiento fraccionaria que se resuelve numéricamente mediante esquemas implícitos M-K-F y M-C-K-F, empleando la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria. Finalmente, se muestran ejemplos

numéricos con la determinación de comparar la respuesta de una viga FLD obtenida mediante un modelo 2D, con la proporcionada por el modelo homogeneizado propuesto.

Por último, en la Sección 5.3 se desarrolla una formulación para el análisis en frecuencia de vigas FLD compuestas por capas gruesas, proporcionando un modelo homogeneizado para la rigidez de flexión compleja que tiene en cuenta una tensión de cortadura cuadrática en cada capa mediante la teoría de Reddy-Bickford (Bickford, 1982; Reddy, 1984). En las aplicaciones numéricas, se comparan los resultados del problema de los valores propios y la respuesta forzada proporcionados por el nuevo modelo y por el de Oberst y Frankenfeld (1952) con la calculada mediante la técnica de los elementos finitos. El material viscoelástico se caracteriza por medio de un modelo en derivadas fraccionarias de cinco parámetros, de modo que dada la dependencia en frecuencia de la matriz de rigidez, tanto el problema de los valores propios como la respuesta forzada se resuelven mediante el método iterativo y la superposición de las funciones de contribución modal, respectivamente, ambos desarrollados en el Capítulo 4.

5.2 Formulación para el análisis transitorio

A continuación se presenta una formulación homogeneizada para la flexión de vigas FLD (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-d). En primer lugar, se exponen las bases teóricas con las que se obtiene una ecuación del movimiento fraccionaria. Después, se describen los métodos implícitos que permiten la integración numérica, haciendo uso de la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria. En último lugar, se muestran unos ejemplos numéricos con la intención de validar la formulación propuesta.

5.2.1 Desarrollo de la formulación homogeneizada

Para el caso de vigas estructurales lo suficientemente largas, los materiales se ven sometidos principalmente a tensión en la dirección longitudinal. La formulación se presenta para pequeñas deformaciones, de modo que los efectos de las fuerzas axiales y de los momentos flectores se encuentran desacoplados. Para el desarrollo del modelo homogeneizado, en primer lugar se considera que la tensión longitudinal se origina únicamente por los momentos de flexión, aunque al final se muestra el caso más general, teniendo en cuenta también el efecto de las fuerzas axiales.

La relación del campo de tensiones $\sigma(x,t)$ con el de deformaciones $\varepsilon(x,t)$ viene dada por

$$\sigma_e(x,t) = E_e \varepsilon_e(x,t) \quad (5.1)$$

para el material estructural, y por

$$\sigma_v(x,t) + \tau^\beta D^\beta \sigma_v(x,t) = E_0 \varepsilon_v(x,t) + E_\infty \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon_v(x,t) \quad (5.2)$$

para el material viscoelástico, donde x y t son las variables espacial y temporal; $D^{(\cdot)}$ es el operador de la derivada fraccionaria; E_e es el módulo de Young del material de la capa base; y E_0 , E_∞ , τ , α y β son los parámetros del modelo fraccionario del material viscoelástico. En la Figura 5.1 se representa una sección de viga (a) asimétrica y (b) simétrica, donde $M_{f,e}$, H_e , $M_{f,v}$ y H_v indican el momento flector y el espesor de las capas base y viscoelástica, respectivamente, y la posición del plano neutro con respecto a la cara inferior de la capa base viene representada por H_n .

Como se indica en el Capítulo 1, para el caso simétrico la posición del plano neutro se encuentra obviamente en el centro de la viga,

$$H_n = \frac{H_e}{2} + H_v, \quad (5.3)$$

y para el asimétrico, esta será considerada constante a lo largo del tiempo, y vendrá dada por

$$H_n = \frac{E_e H_e^2 + E_0 H_v (2H_e + H_v)}{2(E_e H_e + E_0 H_v)}, \quad (5.4)$$

hipótesis que se verifica si el material metálico es mucho más rígido que el viscoelástico.

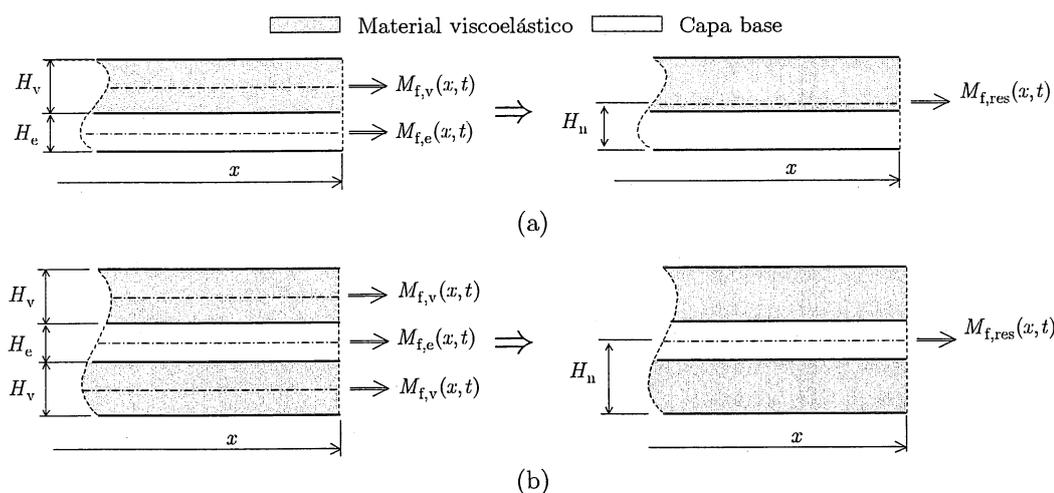


Figura 5.1. Momentos internos en una viga FLD para las configuraciones (a) asimétrica y (b) simétrica.

Considerando que la distribución de la deformación es lineal en cada una de las capas, los momentos flectores $M_{f,e}(x,t)$ y $M_{f,v}(x,t)$ se deducen integrando el momento inducido por las tensiones $\sigma_e(x,t)$ y $\sigma_v(x,t)$ respecto al plano neutro (véase algún texto sobre dinámica de sólidos, por ejemplo, Inman (1996), Capítulo 6), para verificar

$$M_{f,e}(x,t) = E_e I_e \frac{\partial^2 v_e(x,t)}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

y

$$(1 + \tau^\beta D^\beta) M_{f,v}(x,t) = E_0 I_v \left(1 + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha \right) \frac{\partial^2 v_v(x,t)}{\partial x^2}, \quad (5.6)$$

donde los momentos cuadráticos de la sección transversal de las capas elástica I_e y viscoelástica I_v vienen dados para el caso asimétrico por

$$I_e = \frac{bH_e^3}{12} + bH_e \left(H_n - \frac{H_e}{2} \right)^2 \quad (5.7)$$

y por

$$I_v = \frac{bH_v^3}{12} + bH_v \left(H_e + \frac{H_v}{2} - H_n \right)^2, \quad (5.8)$$

y para el simétrico por

$$I_e = \frac{bH_e^3}{12} \quad (5.9)$$

y por

$$I_v = \frac{bH_v^3}{6} + \frac{bH_v}{2} (H_e + H_v)^2, \quad (5.10)$$

respectivamente. Las curvaturas de ambas capas se indican mediante $\frac{\partial^2 v_e(x,t)}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 v_v(x,t)}{\partial x^2}$, donde $v(x,t)$ es el campo de desplazamientos transversales. El momento flector resultante $M_{f, \text{res}}(x,t)$ se obtiene al sumar las componentes individuales, para lo que se puede aplicar el operador $(1 + \tau^\beta D^\beta)$ sobre la ecuación (5.5),

$$(1 + \tau^\beta D^\beta) M_{f,e}(x,t) = E_e I_e (1 + \tau^\beta D^\beta) \frac{\partial^2 v_e(x,t)}{\partial x^2}, \quad (5.11)$$

resultando

$$\begin{aligned} (1 + \tau^\beta D^\beta) M_{f, \text{res}}(x,t) &= E_e I_e (1 + \tau^\beta D^\beta) \frac{\partial^2 v_e(x,t)}{\partial x^2} \\ &+ E_0 I_v \left(1 + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha \right) \frac{\partial^2 v_v(x,t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para resolver la ecuación (5.12), a continuación se hace uso de la hipótesis de Euler-Bernoulli, lo que implica que las dos capas presentan la misma curvatura,

$$\frac{\partial^2 v_e(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}. \quad (5.13)$$

Entonces, la ecuación (5.12) se transforma en

$$(1 + \tau^\beta D^\beta) M_{f, \text{res}}(x, t) = \left[E_e I_e (1 + \tau^\beta D^\beta) + E_0 I_v \left(1 + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha \right) \right] \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.14)$$

Esta ecuación debe ser combinada con la ecuación local del balance de la cantidad de movimiento, integrada en la sección transversal (véase, por ejemplo, Inman (1996) para los detalles),

$$\frac{\partial^2 M_{f, \text{res}}(x, t)}{\partial x^2} + b(\rho_e H_e + \rho_v H_v) \ddot{v}(x, t) = f(x, t), \quad (5.15)$$

donde $(\ddot{\cdot})$ indica la segunda derivada con respecto al tiempo; b es la anchura de la viga; ρ representa la masa específica de los materiales; y $f(x, t)$ es la densidad de fuerza transversal. Al aplicar el operador $(1 + \tau^\beta D^\beta)$ sobre la ecuación (5.15) y diferenciando dos veces la ecuación (5.14) respecto a la variable espacial x , la ecuación local fraccionaria resulta

$$b(\rho_e H_e + \rho_v H_v) (1 + \tau^\beta D^\beta) \ddot{v}(x, t) - (1 + \tau^\beta D^\beta) f(x, t) = \left[E_e I_e (1 + \tau^\beta D^\beta) + E_0 I_v \left(1 + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha \right) \right] \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}. \quad (5.16)$$

Al igual que en el Capítulo 3, a continuación se aplica sobre esta última ecuación el método de los residuos ponderados en un volumen finito de longitud ℓ_i , lo que proporciona la siguiente ecuación del movimiento para el elemento finito i -ésimo,

$$\begin{aligned} & \tau^\beta (\mathbf{M}_{e,i} + \mathbf{M}_{v,i}) D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + (\mathbf{M}_{e,i} + \mathbf{M}_{v,i}) \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + \tau^\beta \mathbf{K}_{e,i} D^\beta \mathbf{u}_i(t) \\ & + (E_\infty / E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_{v,i} D^\alpha \mathbf{u}_i(t) + (\mathbf{K}_{e,i} + \mathbf{K}_{v,i}) \mathbf{u}_i(t) \\ & = \mathbf{F}_i(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_i(t) + \int_{\ell_i} \mathbf{N}_i^T(x) f_i(x, t) \mathbf{N}_i(x) dx \\ & + \tau^\beta D^\beta \int_{\ell_i} \mathbf{N}_i^T(x) f_i(x, t) \mathbf{N}_i(x) dx, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde $\mathbf{M}_{e,i}$, $\mathbf{M}_{v,i}$, $\mathbf{K}_{e,i}$ y $\mathbf{K}_{v,i}$ son las matrices de masa y de rigidez de las capas base y amortiguadora, respectivamente; $\mathbf{u}_i(t)$ y $\mathbf{F}_i(t)$ son los vectores nodales de los desplazamientos y de las fuerzas externas; $\mathbf{N}_i(x)$ es la matriz de las funciones de interpolación; la integral representa la resultante de las fuerzas distribuidas $f_i(x,t)$; y $(\cdot)^T$ denota el operador de la trasposición.

Las matrices de masa y rigidez son las mismas que las proporcionadas por el problema elástico. Por ejemplo, para el elemento finito lineal que posee como grados de libertad los desplazamientos longitudinal y transversal $u(t)$ y $v(t)$ y la rotación $\theta(t)$ para los nodos de los extremos 1 y 2, $\mathbf{u}_i(t) = \{u_1(t) v_1(t) \theta_1(t) u_2(t) v_2(t) \theta_2(t)\}^T$, las matrices de masa consistente y de rigidez son

$$\mathbf{M}_{k,i} = \frac{\rho_k H_k b l_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l_i & 0 & 54 & -13l_i \\ 0 & 22l_i & 4l_i^2 & 0 & 13l_i & -3l_i^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l_i & 0 & 156 & -22l_i \\ 0 & -13l_i & -3l_i^2 & 0 & -22l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

y

$$\mathbf{K}_{k,i} = \frac{E_k I_k}{l_i^3} \begin{bmatrix} \frac{bH_k l_i^2}{I_k} & 0 & 0 & -\frac{bH_k l_i^2}{I_k} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l_i & 0 & -12 & 6l_i \\ 0 & 6l_i & 4l_i^2 & 0 & -6l_i & 2l_i^2 \\ -\frac{bH_k l_i^2}{I_k} & 0 & 0 & \frac{bH_k l_i^2}{I_k} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l_i & 0 & 12 & -6l_i \\ 0 & 6l_i & 2l_i^2 & 0 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

respectivamente, donde el subíndice $(\cdot)_k$ hace referencia a las capas elástica y viscoelástica, $(\cdot)_k = (\cdot)_e$ y $(\cdot)_v$, donde $E_v = E_0$. Al ensamblar todas las matrices y vectores, el sistema global resultante es

$$\begin{aligned}
& \tau^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) D^\beta \ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}(t) \\
& + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}(t) + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v) \mathbf{u}(t) \\
& = \mathbf{F}(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}(t),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

donde \mathbf{M}_e , \mathbf{M}_v , \mathbf{K}_e y \mathbf{K}_v son las matrices ensambladas de cada capa individual, y $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ son los vectores de desplazamientos y de fuerzas nodales globales, de forma que este último incluye las reacciones y la resultante de las fuerzas distribuidas.

En la sección siguiente se describen dos métodos implícitos para resolver numéricamente la ecuación (5.20), basados en lo desarrollado en el Capítulo 3.

Para finalizar, cabe señalar que la aplicación de la transformada de Fourier sobre la ecuación (5.20) proporciona

$$\left(-\omega^2 (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + \mathbf{K}_e + \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\beta} \frac{1}{E_0} \mathbf{K}_v \right) \tilde{\mathbf{u}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}(\omega), \tag{5.21}$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}(\omega)$ y $\tilde{\mathbf{F}}(\omega)$ representan la transformada de Fourier de $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$, lo que permite concluir que la formulación propuesta es equivalente a la provista por Oberst y Frankenfeld (1952) para en análisis frecuencial de vigas FLD donde el material viscoelástico se caracteriza por un modelo FD de cinco parámetros (si la posición de la fibra neutra se puede considerar constante a lo largo del tiempo).

5.2.2 Integración numérica

Para integrar numéricamente la ecuación (5.20), a continuación se presentan dos esquemas implícitos equivalentes a los empleados en el Capítulo 3: la formulación **M-K-F**, que proporciona resultados ligeramente más precisos, y la **M-C-K-F**, que filtra los picos parásitos en las respuestas impulsivas. Para ello, se parte de la ecuación (5.20) en el instante t_{n+1} ,

$$\begin{aligned}
& \tau^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) D^\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}_{n+1} \\
& + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}_{n+1} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v) \mathbf{u}_{n+1} \quad (5.22) \\
& = \mathbf{F}_{n+1} + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}_{n+1},
\end{aligned}$$

que debe ser resuelta para el desplazamiento \mathbf{u}_{n+1} . Realizando las transformaciones matemáticas de acuerdo con lo desarrollado en el Capítulo 3, la modalidad **M-K-F** consiste en resolver el sistema de segundo orden siguiente,

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}, \quad (5.23)$$

donde la matriz de masa equivalente $\bar{\mathbf{M}}$ verifica

$$\bar{\mathbf{M}} = \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) + \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v, \quad (5.24)$$

la matriz de rigidez equivalente $\bar{\mathbf{K}}$ satisface

$$\bar{\mathbf{K}} = \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v, \quad (5.25)$$

y la fuerza equivalente $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ viene dada por

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{F}}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} \\
&\quad - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j} \\
&\quad - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \\
&\quad - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j},
\end{aligned} \quad (5.26)$$

donde los parámetros $A_{\alpha,j+1}$ y $A_{\beta,j+1}$ son los coeficientes de Grünwald-Letnikov de orden α y β , respectivamente, y Δt es el paso de integración. De igual manera, la ecuación para el esquema **M-C-K-F** resulta

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}, \quad (5.27)$$

donde la matriz de masa equivalente $\bar{\mathbf{M}}$ es la misma que la del caso anterior dada por la ecuación (5.24); la matriz \mathbf{K} es la del sistema original, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$; la matriz de amortiguamiento viscoso equivalente $\bar{\mathbf{C}}$ se escribe como

$$\bar{\mathbf{C}} = \Delta t \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e + \Delta t \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v; \quad (5.28)$$

y la fuerza efectiva resultante $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ satisface

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{n+1} = & \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j} \\ & - \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\beta \mathbf{K}_e \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right) \\ & - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^\alpha \mathbf{K}_v \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Estas expresiones son equivalentes a las deducidas en el Capítulo 3, recogidas en el Anexo A.

5.2.3 Aplicación numérica

A continuación se presentan dos ejemplos numéricos llevados a cabo con el ánimo de comparar la respuesta transitoria proporcionada por la formulación homogeneizada desarrollada durante este trabajo con la del modelo 2D de la Sección 3.4. El primero de los ejemplos estudia la respuesta de una viga en voladizo, representada en la Figura 5.2, ante una fuerza escalón, y el segundo de ellos la respuesta impulsiva.

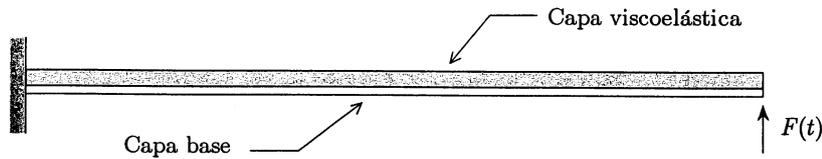


Figura 5.2. Viga FLD en voladizo sometida a una carga en su extremo libre.

Se consideró la geometría correspondiente a las probetas AFLD-10-180 (véase la Tabla 2.2), de modo que para la longitud, espesor y anchura de la capa metálica se tomó $L = 180$ mm, $H_e = 1.95$ mm y $b = 9.85$ mm, respectivamente, y el espesor de la capa viscoelástica fue $H_v = 1.52$ mm.

Las propiedades de los materiales se tomaron de la caracterización experimental mostrada en el Capítulo 2. Así, el módulo de elasticidad del acero y su densidad fueron $E_e = 176.2 \times 10^9$ Pa y $\rho_e = 7782$ kg/m³. Las propiedades del material amortiguador se eligieron a partir de los resultados del ajuste del modelo fraccionario a los datos experimentales, recogidos en la Tabla 2.8: los módulos estático y asintótico fueron $E_0 = 0.230 \times 10^9$ Pa y $E_\infty = 4.000 \times 10^9$ Pa, el tiempo de relajación $\tau = 2.036 \times 10^{-3}$ s, los órdenes de derivación fraccionaria $\alpha = 0.715$ y $\beta = 0.693$, y la densidad $\rho_v = 1423$ kg/m³. Para ambos materiales se consideró el mismo coeficiente de Poisson, $\nu_e = \nu_v = 0.3$.

Para el modelo 2D, la discretización se efectuó como se indica en la Sección 3.4, empleando en cada capa 30×1 elementos finitos rectangulares bilineales, con matriz de masa consistente y matriz de rigidez con integración reducida y control de *hourglassing* de Kosloff y Frazier (1978). Para el modelo 1D homogeneizado, la viga se discretizó también en 30 elementos finitos, cuyas matrices de masa y de rigidez vienen dadas por las ecuaciones (5.18) y (5.19).

En ambos ejemplos la integración numérica se llevó a cabo mediante el esquema de Newmark de aceleración constante (véase la Tabla 3.2) a lo largo de un intervalo de 0.20 s con un paso de integración de $\Delta t = 10^{-3}$ s.

5.2.3.1 Respuesta a una fuerza escalón

Se consideró una fuerza $F(t)$ unitaria y constante, representada por la función escalón de Heaviside, $H(t) = 1$ N, aplicada perpendicularmente sobre el extremo libre de la viga en voladizo. En la Figura 5.3 se representa la respuesta del punto de aplicación de la carga según el modelo 2D y según el modelo 1D homogeneizado. Ambas curvas se obtuvieron mediante la integración implícita M-K-F.

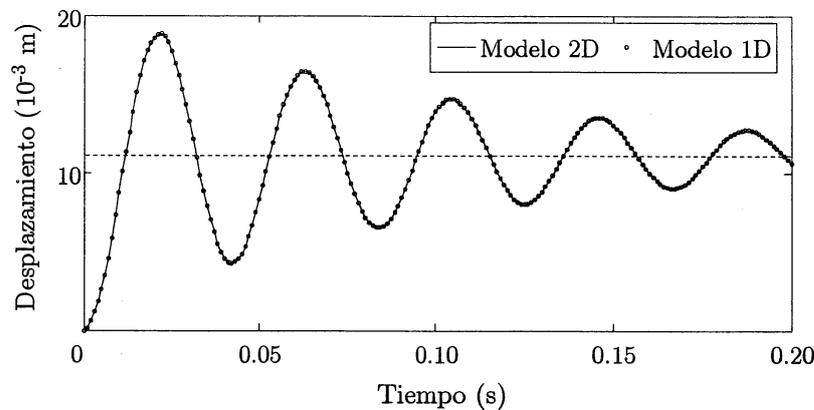


Figura 5.3. Respuesta forzada de la viga FLD obtenida mediante el modelo 2D y el 1D.

De la Figura 5.3 se desprende que ambos modelos proporcionan la misma respuesta, tendiendo hacia una respuesta estacionaria de 11.2 mm.

5.2.3.2 Respuesta impulsiva

También se obtuvo la respuesta de la viga en voladizo originada por un impacto caracterizado por una velocidad inicial del extremo derecho, $\dot{u}_0 = 1$ m/s. En la Figura 5.4 se representa el desplazamiento de dicho extremo calculado mediante el esquema M-C-K-F para los modelos 2D y 1D, de donde también se puede concluir que la respuesta proporcionada por ambos modelos es prácticamente la misma, resaltando que, como ya se mencionó en el Capítulo 3, el esquema M-C-K-F presenta la ventaja de filtrar los ruidos originados por los modos de alto orden en las respuestas impulsivas, como se puede apreciar en la Figura 3.4.

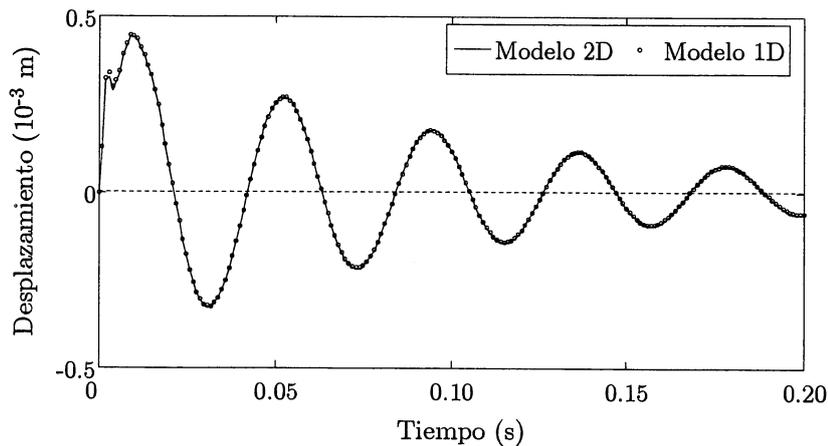


Figura 5.4. Respuesta impulsiva de la viga FLD obtenida mediante el modelo 2D y el 1D.

5.3 Formulación en frecuencia para vigas gruesas

En esta sección se presenta una formulación homogeneizada para el análisis en frecuencia de vigas FLD en las que se contempla el efecto de la tensión de cortadura (Cortés y Elejabarrieta, en revisión-a). Efectivamente, el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952), basado en la teoría de Euler-Bernoulli, no considera las deformaciones de cizalladura, por lo que su uso queda restringido a vigas en las que la relación entre la longitud y el espesor es lo suficientemente grande como para despreciar tales efectos.

Para una viga compuesta por un único material elástico, existen diferentes teorías que tienen en cuenta las deformaciones originadas por los esfuerzos cortantes, como la de Timoshenko (1921) o la de Bickford (1982). Aquella supone una tensión tangencial constante en el espesor, de forma que no verifica el equilibrio de fuerzas provisto por la teoría de la elasticidad, por lo que generalmente se emplea un factor de corrección. Sin embargo, la teoría de de Bickford (1982) admite una distribución cuadrática de la tensión de cortadura, por lo que sí confirma el equilibrio de fuerzas.

Independientemente, Reddy (1984) desarrolló una formulación generalizada para placas laminadas con tensión de cortadura cuadrática en cada capa, resultando ser una generalización de la de Bickford (1982) para vigas homogéneas, por lo que la teoría de vigas con tensión cuadrática es

conocida como la teoría de Reddy-Bickford (véase el libro de Wang, Reddy y Lee (2000) para más detalles).

A continuación se emplea la teoría de Reddy-Bickford para el desarrollo de un modelo de rigidez de flexión homogeneizada para vigas FLD gruesas. Durante el desarrollo teórico, con el ánimo de simplificar la nomenclatura, se considera que el módulo del material viscoelástico E_v es real, y será en las aplicaciones numéricas cuando se tenga en cuenta su carácter complejo. En tales ejemplos numéricos se comparan los resultados proporcionados por el nuevo modelo con los de Oberst y Frankenfeld (1952) y con los obtenidos mediante un modelo 2D, constatándose que ambos modelos homogeneizados proporcionan resultados similares en vigas delgadas, y a medida de que el espesor de la capa viscoelástica aumenta, las diferencias se vuelven más patentes.

5.3.1 Modelo homogeneizado

Bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos y de pequeñas deformaciones, el campo del desplazamiento transversal $v(x, t)$ de una viga puede ser desacoplado en un término $v_M(x, t)$, originado por el momento flector $M_f(x, t)$, y otro $v_T(x, t)$, debido a la fuerza transversal $T(x, t)$,

$$v(x, t) = v_M(x, t) + v_T(x, t). \quad (5.30)$$

El primero de los sumandos, $v_M(x, t)$, verifica la clásica relación momento flector-curvatura de la teoría de Euler-Bernoulli,

$$M_f(x, t) = B_{eq} \frac{\partial^2 v_M(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.31)$$

donde B_{eq} es la rigidez de flexión dada por el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952),

$$B_{eq} = B_e + B_v = E_e I_e + E_v I_v. \quad (5.32)$$

Respecto a la nomenclatura, los subíndices $(\bullet)_e$ y $(\bullet)_v$ hacen referencia a los materiales elástico y viscoelástico, E indica el módulo del material, e I es el momento cuadrático respecto al plano neutro.

Considerando un estado de tensión plana, la tensión tangencial $\tau(x, y, t)$ en cualquier punto material $P(x, y)$ de la viga viene dada por la fórmula de la cortadura (véase, por ejemplo, el Capítulo 10 de Megson (1996) u otro texto sobre mecánica de materiales para más detalles),

$$\tau(x, y, t) = \frac{Q(y)}{B_{eq}b} T(x, t), \quad (5.33)$$

donde las variables x e y indican las direcciones axial y transversal de la viga, y $Q(y)$ viene dado por

$$Q(y) = \int_{S'} y E(y) dS', \quad (5.34)$$

de modo que S' representa el área de la sección transversal que se encuentra más allá del punto $P(x, y)$, y $E(y)$ es el módulo de elasticidad, que puede variar en función de la capa considerada. La variable y de la ecuación (5.34) tiene por origen el plano neutro, de modo que su distancia H_n a la parte inferior de la capa base viene dada por las ecuaciones (5.3) y (5.4) para las configuraciones asimétrica y simétrica, respectivamente.

Según la teoría de Reddy-Bickford, la tensión se puede representar en cada capa por polinomios de segundo orden, de manera que, en virtud de las ecuaciones (5.33) y (5.34), la tensión de cortadura es continua en las intercaras y su máximo valor se alcanza en el plano neutro.

La relación $v_T(x, t) - T(x, t)$ se obtiene igualando el trabajo realizado por la fuerza transversal a la energía de deformación almacenada en un tramo de longitud dx ,

$$\frac{1}{2} T(x, t) dv_T(x, t) = \frac{1}{2} \left(\int_S \frac{\tau^2(x, t)}{G(y)} dS \right) dx, \quad (5.35)$$

donde S representa el área de la sección transversal completa, y G el módulo de rigidez transversal. Haciendo uso de (5.33), la ecuación anterior resulta

$$\frac{\partial v_T(x,t)}{\partial x} = T(x,t) \int_S \frac{Q(y)^2}{G(y)B_{eq}^2 b^2} dS, \quad (5.36)$$

la cual se puede escribir también como

$$T(x,t) = K_{eq} \frac{\partial v_T(x,t)}{\partial x}, \quad (5.37)$$

donde K_{eq} representa la rigidez transversal de la sección, que depende de la geometría y de las propiedades de los materiales. Esta rigidez transversal se puede descomponer según

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_v}, \quad (5.38)$$

donde K_e y K_v cumplen

$$\frac{1}{K_e} = \frac{E_e^2}{G_e B_{eq}^2 b^2} \int_{S_e} \bar{S}(y)^2 dS_e \quad (5.39)$$

y

$$\frac{1}{K_v} = \frac{E_v^2}{G_v B_{eq}^2 b^2} \int_{S_v} \bar{S}(y)^2 dS_v, \quad (5.40)$$

respectivamente. Para el caso asimétrico, estas integrales resultan

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_e} &= \frac{E_e^2 b}{4G_e B_{eq}^2} \int_{-H_n}^{-H_n+H_e} (H_n^2 - y^2)^2 dy \\ &= \frac{6}{5G_e b H_e (1 + r_1 M)^2 (1 + 3(r_n - 1)^2)^2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \frac{E_v^2 b}{4G_v B_{eq}^2} \int_{-H_n+H_e}^{-H_n+H_e+H_v} ((H_e + H_v - H_n)^2 - y^2)^2 dy \\ &= \frac{6M^2 T^4 (10r_n^2 - 40r_n - 25r_n T + 16T^2 + 50T + 40)}{5G_v b H_v (1 + r_1 M)^2 (1 + 3(r_n - 1)^2)^2}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde $M = E_v / E_e$, $T = H_v / H_e$, $r_n = 2H_n / H_e$ y $r_1 = I_v / I_e$, de modo que los momentos cuadráticos I_e y I_v vienen dados por las ecuaciones (5.7) y (5.8), respectivamente. Para el caso simétrico, los coeficientes de rigidez transversal K_e y K_v satisfacen

$$\frac{1}{K_e} = \frac{E_e^2 b}{4G_e B_{eq}^2} \int_{-H_e/2}^{+H_e/2} y^4 dy = \frac{6}{5G_e b H_e (1 + r_1 M)^2} \quad (5.43)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \frac{E_v^2 b}{4G_v B_{eq}^2} \times 2 \int_{H_e/2}^{H_e/2+H_v} ((H_e/2 + H_v)^2 - y^2)^2 dy \\ &= \frac{12M^2 T^4 (16T^3 + 25T^2 + 10)}{5G_v b H_v (1 + r_1 M)^2}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

respectivamente, donde, para este caso, los momentos cuadráticos I_e y I_v vienen dados por las ecuaciones (5.9) y (5.10).

A partir de estas ecuaciones, se deduce que si la viga se compusiera de un único material, la ecuación (5.33) se transformaría en la conocida ecuación

$$\tau(x, y, t) = \frac{\bar{S}}{Ib} T(x, t), \quad (5.45)$$

donde \bar{S} indica el momento de primer orden del área que se encuentra más allá del punto $P(x, y)$, y las ecuaciones (5.38)-(5.44) proporcionarían la expresión clásica para la rigidez de secciones rectangulares (véase, por ejemplo, el Capítulo 13 de Megson (1996) u otro texto sobre mecánica de materiales para más detalles)

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{6}{5GS}, \quad (5.46)$$

donde S es el área total de la sección transversal.

También es remarcable que para el caso particular en el que la base de la viga FLD se elabore con una capa metálica delgada en relación a la polimérica, el término $1/K_e$ puede ser despreciable en relación a $1/K_v$.

Considerando las deformaciones debidas a la cortadura, la ecuación de campo para las vibraciones libres de flexión viene dada por la ecuación de Timoshenko (1921)

$$\frac{B_{eq}}{\rho_\ell} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \frac{B_{eq}}{K_{eq}} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5.47)$$

donde $\rho_\ell = b(\rho_e H_e + \rho_v H_v)$ es la densidad lineal de la viga. La solución de esta ecuación depende de las condiciones de contorno, y en el Anexo E se resuelve para una viga simplemente apoyada. Para este caso, se busca una rigidez de flexión homogeneizada B_K que satisfaga la ecuación de Euler-Bernoulli

$$\frac{B_K}{\rho_\ell} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5.48)$$

en la cual se consideren los efectos de la cortadura. Dicha rigidez homogeneizada B_K verifica

$$B_K = \frac{B_{eq}}{\left(\sqrt{1 + \varphi^2(\omega)} + \varphi(\omega)\right)^2}, \quad (5.49)$$

donde la función $\varphi(\omega)$, dependiente de la frecuencia ω , viene dada por

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega \sqrt{\rho_\ell B_{eq}}}{2K_{eq}}. \quad (5.50)$$

De estas dos ecuaciones se puede deducir que si la rigidez K_{eq} tiende al infinito, es decir, si las deformaciones de cortadura son despreciables, la función $\varphi(\omega)$ tiende a cero y la rigidez de flexión equivalente B_K tiende al resultado clásico dado por B_{eq} .

Asimismo, también se puede apreciar que sendos valores estáticos, para $\omega = 0$, son también los mismos. En efecto, el criterio de equivalencia establecido por la ecuación (5.48) es un criterio dinámico, por lo que el modelo que se ha desarrollado no es capaz de considerar las deformaciones originadas por la cizalladura en los casos estáticos.

5.3.2 Aplicación numérica

Para validar el modelo desarrollado, se llevó a cabo un estudio por elementos finitos con el propósito de comparar sus resultados con los de un modelo 2D, el cual contemple las deformaciones de cortadura, y las inercias de extensión y de rotación. También se obtuvo la solución empleando el modelo de Oberst y Frankenfeld (1952), con la determinación de analizar la influencia del espesor de la capa viscoelástica en ambos modelos.

Se consideró una viga en voladizo de longitud $L = 120$ mm, anchura $b = 10$ mm, espesor de la capa base $H_e = 2$ mm, y tres espesores diferentes para la capa viscoelástica: $H_v = 2, 6$ y 10 mm. Se emplearon las mismas propiedades de los materiales que los de la Sección 5.2.3, es decir, el material de la base fue acero y el de la capa viscoelástica se caracterizó mediante el módulo complejo E_v^* , dado por el modelo FD de cinco parámetros. Así, el módulo de Young del acero y su densidad fueron $E_e = 176.2 \times 10^9$ Pa y $\rho_e = 7782$ kg/m³. Para el material viscoelástico, los módulos estático y asintótico fueron $E_0 = 0.230 \times 10^9$ Pa y $E_\infty = 4.000 \times 10^9$ Pa, el tiempo de relajación $\tau = 2.036 \times 10^{-3}$ s, los órdenes de derivación fraccionaria $\alpha = 0.715$ y $\beta = 0.693$, y la densidad $\rho_v = 1423$ kg/m³. Para ambos materiales se tomó el mismo coeficiente de Poisson, $\nu_e = \nu_v = 0.3$.

El modelo 2D consistió en una discretización en elementos finitos rectangulares bilineales con hipótesis de tensión plana, con matriz de masa consistente y matriz de rigidez con integración reducida y control de *hourglassing* de Kosloff y Frazier (1978), recogidas en el Anexo B. Se emplearon 4 elementos finitos en el espesor de cada capa para asegurar una evo-

lución de la tensión de cortadura, y 60 elementos en la longitud (véase la Figura 5.5) para asegurar suficiente precisión en los tres primeros modos de vibración. Este modelo 2D es capaz de reproducir el comportamiento dinámico de la viga en voladizo considerando deformaciones de extensión y de cortadura, e inercias transversales, de extensión y de rotación.

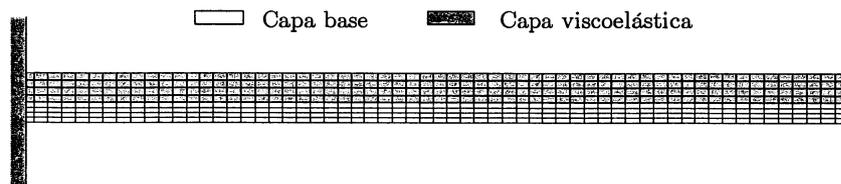


Figura 5.5. Modelo 2D para la viga FLD en voladizo.

Los modelos 1D de viga homogeneizada se construyeron con las matrices de masa y rigidez de flexión clásicas,

$$M_i = \frac{\rho \ell_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_i & 54 & -13\ell_i \\ 22\ell_i & 4\ell_i^2 & 13\ell_i & -3\ell_i^2 \\ 54 & 13\ell_i & 156 & -22\ell_i \\ -13\ell_i & -3\ell_i^2 & -22\ell_i & 4\ell_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

y

$$K_i = \frac{B}{\ell_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_i & -12 & 6\ell_i \\ 6\ell_i & 4\ell_i^2 & -6\ell_i & 2\ell_i^2 \\ -12 & -6\ell_i & 12 & -6\ell_i \\ 6\ell_i & 2\ell_i^2 & -6\ell_i & 4\ell_i^2 \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

donde ℓ_i es la longitud del elemento finito i -ésimo. La rigidez de flexión B viene dada según Oberst y Frankenfeld (1952) por $B = B_{eq}^*$, ecuación (5.32) para el modelo de viga delgada; y según $B = B_K^*$, ecuación (5.49), para el modelo de viga gruesa desarrollado en este trabajo. En ambos casos se considera el carácter complejo del material viscoelástico, y las vigas se discretizaron en 60 elementos finitos en toda su longitud.

5.3.2.1 Extracción de los valores propios

El problema no lineal de los valores propios complejos viene dado por

$$\left(-\lambda_r^* \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega_r)\right) \phi_r^* = \mathbf{0}, \quad (5.53)$$

donde λ_r^* y ϕ_r^* son el valor y el vector propios complejos del modo r -ésimo, respectivamente, \mathbf{M} es la matriz de masa y \mathbf{K}^* es la matriz de rigidez compleja dependiente de la frecuencia. La frecuencia natural ω_r es la parte real de la raíz cuadrada del autovector complejo,

$$\omega_r = \operatorname{Re}\left(\sqrt{\lambda_r^*}\right), \quad (5.54)$$

lo que introduce la no linealidad en la ecuación (5.53). Haciendo uso del método iterativo desarrollado en la Sección 4.3.1, se calcularon los tres primeros autovalores λ_r^* , a partir de los cuales se obtuvieron sus respectivos factor de pérdida η_r y frecuencia natural ω_r según la ecuación

$$\lambda_r^* = \omega_r^2(1 + i\eta_r), \quad (5.55)$$

los cuales son mostrados en la Tabla 5.1 para los tres espesores analizados.

Respecto a la frecuencia natural ω_r , en la Tabla 5.1 se ve que los resultados son similares con los tres modelos para el caso de la viga más delgada, y las diferencias entre los diferentes modelos se vuelven más patentes cuanto mayor es el espesor de la capa viscoelástica. Las diferencias más importantes se alcanzan en el tercer modo: en efecto, a medida que la frecuencia aumenta, los efectos de la cortadura adquieren mayor relevancia, disminuyendo la rigidez y, consecuentemente, disminuyendo asimismo las frecuencias propias. Al considerar los resultados del tercer modo para $H_v = 6 \text{ mm}$, el modelo de viga delgada se desvía un 8.4% respecto al modelo 2D, mientras que el modelo de viga gruesa lo hace solamente en un 2.1%. Esta mejora se manifiesta con mayor evidencia para el caso de la

viga más gruesa, $H_v = 10$ mm : las diferencias disminuyen desde un 38% hasta el 5.5% al pasar del modelo de viga delgada al de gruesa.

Tabla 5.1

Resultados modales de la viga FLD para tres espesores: $H_v = 2, 6$ y 10 mm

	Modelo 2D	Modelo de viga delgada resultado (% error)	Modelo de viga gruesa resultado (% error)
Espesor de la capa viscoelástica $H_v = 2$ mm			
ω_1 (10^3 rad/s)	0.6676	0.6678 (<0.1)	0.6677 (<0.1)
ω_2 (10^3 rad/s)	4.3421	4.3517 (0.2)	4.3455 (<0.1)
ω_3 (10^3 rad/s)	12.244	12.307 (0.5)	12.256 (<0.1)
η_1	0.0742	0.0743 (0.1)	0.0743 (0.1)
η_2	0.0415	0.0418 (0.6)	0.0417 (0.4)
η_3	0.0263	0.0267 (1.4)	0.0265 (0.8)
Espesor de la capa viscoelástica $H_v = 6$ mm			
ω_1 (10^3 rad/s)	1.0133	1.0195 (0.6)	1.0157 (0.2)
ω_2 (10^3 rad/s)	6.9697	7.2341 (3.8)	7.0753 (1.5)
ω_3 (10^3 rad/s)	19.178	20.787 (8.4)	19.587 (2.1)
η_1	0.2910	0.2911 (<0.1)	0.2919 (0.3)
η_2	0.1158	0.1153 (-0.4)	0.1180 (0.2)
η_3	0.0713	0.0712 (-0.1)	0.0757 (6.1)
Espesor de la capa viscoelástica $H_v = 10$ mm			
ω_1 (10^3 rad/s)	1.6570	1.6899 (2.0)	1.6693 (0.7)
ω_2 (10^3 rad/s)	10.538	11.766 (12)	11.009 (4.5)
ω_3 (10^3 rad/s)	27.083	33.723 (38)	28.563 (5.5)
η_1	0.2830	0.2803 (-1.0)	0.2851 (0.7)
η_2	0.1107	0.1051 (-5.0)	0.1159 (4.7)
η_3	0.0722	0.0670 (-7.2)	0.0837 (16)

En referencia al factor de pérdida modal η_r , en la Tabla 5.1 se puede apreciar que los resultados de los tres modelos para la viga más delgada, $H_v = 2$ mm, son prácticamente los mismos, aunque el modelo de viga gruesa los mejora ligeramente. Para las otras dos vigas más gruesas, $H_v = 6$ mm y $H_v = 10$ mm, se puede remarcar que el modelo de viga delgada proporciona valores menores que el modelo 2D, mientras que los del modelo de viga gruesa son mayores. Este hecho se debe a que el amortiguamiento del material depende de la frecuencia, y como las frecuencias

naturales para los modelos de viga delgada y gruesa son tan dispares entre sí, este parámetro no puede ser comparado directamente. En su lugar, a continuación se comparan las amplitudes de los picos de resonancia de la respuesta forzada.

5.3.2.2 Función de respuesta en frecuencia

Seguidamente se muestra el análisis realizado concerniente a la respuesta forzada de la viga en voladizo, sobre la que actúa una fuerza armónica unitaria en el extremo libre, $F(t) = 1 \times e^{i\omega t}$ N. El sistema matricial viene dado por

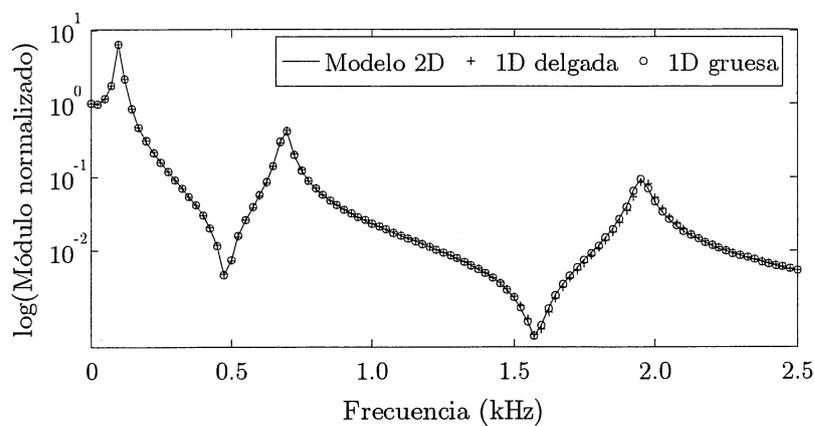
$$\left(-\omega_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega_k)\right) \mathbf{U}_k^* = \mathbf{F}^*, \quad (5.56)$$

donde \mathbf{F}^* y \mathbf{U}_k^* son los vectores de la amplitud compleja de las fuerzas y de los desplazamientos, respectivamente. La dependencia en frecuencia de la matriz de rigidez compleja \mathbf{K}^* implica que no se puede emplear el método de la superposición modal. En su lugar, la respuesta se obtuvo mediante el método de la superposición de las funciones de contribución modal (MCF), presentado en el Capítulo 4.

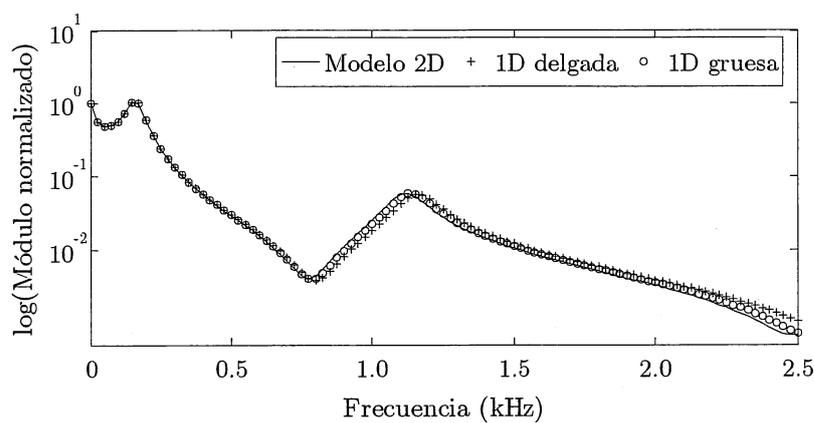
La Figura 5.6 muestra la respuesta en frecuencia del extremo libre superponiendo todas las MCF, hasta 2.5 kHz, con una resolución de 25 Hz. Esta banda de frecuencias permite considerar como mínimo dos modos en todos los casos. Las curvas, en escala logarítmica, se encuentran normalizadas respecto a la respuesta estática: 0.48, 0.40 y 0.26 mm/N para los casos (a), (b) y (c) respectivamente.

En la Figura 5.6(a) se puede apreciar que las tres curvas son prácticamente iguales, lo que implica que los tres modelos proporcionan la misma solución cuando el espesor de la capa viscoelástica es pequeño es relación a la longitud de la viga. No obstante, en las frecuencias más altas se comienza a discernir cómo la curva relativa al modelo de Oberst y Frankenfeld (1952) se desplaza ligeramente hacia la derecha, puesto que la cor-

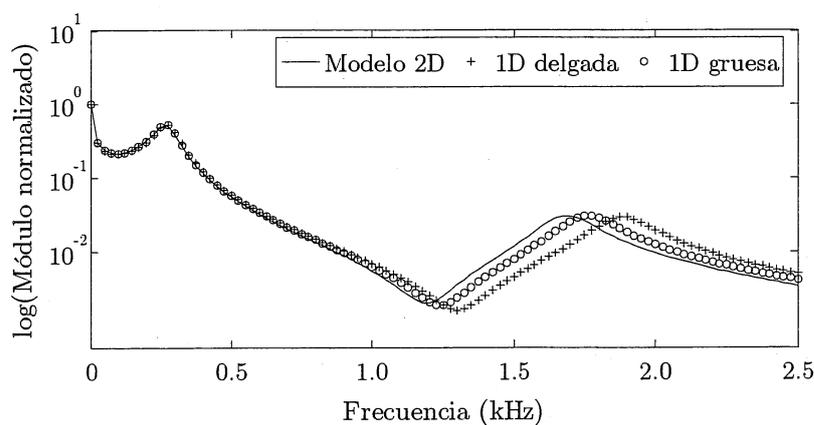
tadura va adquiriendo mayor protagonismo a medida que la frecuencia aumenta.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6. Módulo de la FRF del extremo libre de la viga en voladizo para tres espesores de capa amortiguadora: (a) $H_v = 2$ mm , (b) $H_v = 6$ mm y (c) $H_v = 10$ mm .

Sin embargo, la Figura 5.6(b) y la Figura 5.6(c) muestran un desplazamiento hacia la derecha de las curvas de los modelos 1D homogeneizados, principalmente para el segundo pico de resonancia. En efecto, en las cercanías de la primera frecuencia de resonancia, apenas se disciernen diferencias para las tres curvas, pero sí en las del segundo modo. Este hecho está directamente relacionado con la sobrestimación de las frecuencias naturales, como se remarcó en la Tabla 5.1. Las diferencias se vuelven más patentes cuanto mayor es el espesor de la capa viscoelástica, principalmente para el modelo de viga delgada.

En lo correspondiente a la amplitud de los picos de resonancia, no se constatan importantes diferencias. A partir del análisis numérico de las curvas se deduce que los errores más importantes aparecen en el segundo modo del caso (c). En efecto, el modelo de viga delgada proporciona un máximo un 3.4% más bajo que el del modelo 2D, mientras que el modelo de viga gruesa no presenta ninguna desviación.

5.4 Conclusiones

En este capítulo se han presentado dos formulaciones homogeneizadas para el análisis dinámico de vigas FLD.

La primera de las formulaciones, aceptada para su publicación en la revista *Computational Mechanics* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-d), ha sido concebida para el análisis transitorio de vigas FLD en las que el material viscoelástico se caracteriza mediante un modelo fraccionario de cinco parámetros. Se aplica el método de los elementos finitos sobre la ecuación de campo proporcionando una ecuación del movimiento fraccionaria compuesta por matrices de masa y de rigidez clásicas. Se hace uso de la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria para poder integrar numéricamente la ecuación del movimiento, conduciendo a dos esquemas implícitos **M-K-F** y **M-C-K-F**, análogos a los desarrollados en el Capítulo 3. Esta formulación se ha aplicado al estudio de la respuesta dinámica transitoria de una viga FLD en voladizo, sometida por un lado a

una fuerza escalón, y por otro lado a una velocidad inicial en el extremo libre de la misma. En el primero de los ejemplos numéricos se ha empleado el esquema M-K-F, y para el segundo, el M-C-K-F, ya que este último esquema es capaz de filtrar los ruidos introducidos por los modos de alto orden, ruidos que son habituales en las respuestas impulsivas.

La segunda formulación homogeneizada (Cortés y Elejabarrieta, en revisión-a), permite el análisis frecuencial de vigas FLD compuestas por capas gruesas, en las que las deformaciones debidas a los esfuerzos transversales pueden no ser despreciables. Se ha deducido un modelo homogeneizado de rigidez de flexión para la viga simplemente apoyada a partir de una tensión de cortadura cuadrática usando la teoría de Reddy-Bickford. Como ejemplo numérico, se ha estudiado el comportamiento dinámico de una viga en voladizo con tres espesores diferentes haciendo uso de la técnica de los elementos finitos. Debido a la dependencia en frecuencia de la matriz de rigidez, los valores propios y la respuesta en frecuencia se obtuvieron por sendos métodos presentados en el Capítulo 4. De los resultados numéricos se puede concluir que el modelo clásico de Oberst y Frankfeld (1952) es aplicable en un amplio rango de frecuencias y para un abanico considerable de espesores de la capa viscoelástica. No obstante, se ha podido constatar que el modelo desarrollado durante la presente tesis para vigas cortas mejora sustancialmente el Oberst y Frankfeld (1952) en lo relativo a las frecuencias propias, y por lo tanto, también en lo relativo a la respuesta en frecuencia. Cabe señalar que aunque el modelo se deduce para una viga simplemente apoyada, se puede emplear para vigas en voladizo. Los resultados del modelo desarrollado podrían ser mejorados si además de las deformaciones debidas a la cortadura, también se contemplase la inercia rotacional.

Concluyendo, las formulaciones homogeneizadas propuestas permiten reproducir la respuesta dinámica de vigas FLD, bien para el análisis temporal de vigas delgadas contemplando modelos fraccionarios, bien para el análisis de vigas gruesas en el dominio de la frecuencia, reduciendo así considerablemente los esfuerzos computacionales.

6

Conclusiones

En esta memoria de tesis se ha presentado el estudio llevado a cabo en relación a la reducción de la vibración estructural mediante técnicas de amortiguación pasiva, más concretamente mediante recubrimientos viscoelásticos. Generalmente, estos recubrimientos se realizan con materiales poliméricos, cuyas propiedades mecánicas son dependientes de la frecuencia de excitación. Por un lado, esta dependencia en frecuencia implica que la caracterización experimental del material sea más laboriosa, y por otro lado, entraña una dificultad añadida a la hora de emplear técnicas de simulación, por ejemplo, mediante el método de los elementos finitos.

A partir de la revisión de la literatura, se ha podido constatar que en la actualidad las ecuaciones constitutivas con derivadas fraccionarias son las más eficientes a la hora de reproducir el comportamiento dinámico de los polímeros, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Por lo tanto, durante la presente investigación, se ha prestado especial atención al desarrollo de métodos numéricos que faciliten la aplicación de dichas ecuaciones en modelos estructurales de elementos finitos.

Mientras que las conclusiones particulares de cada capítulo se han presentado al final de los mismos, a continuación se enuncian las aportaciones principales que se derivan del trabajo desarrollado. Para finalizar, se sugiere un conjunto de líneas futuras de investigación que se abren como fruto del trabajo realizado hasta el momento.

6.1 Aportaciones más relevantes

A continuación, se detallan las aportaciones más significativas derivadas de la investigación desarrollada respecto a las técnicas de análisis de la reducción de la vibración estructural por medio de tratamientos superficiales viscoelásticos. Haciendo referencia al análisis de la revisión bibliográfica, y en consecuencia a los objetivos de la tesis, las aportaciones de este trabajo se enmarcan dentro de: (I) las técnicas experimentales de caracterización de materiales viscoelásticos; (II) los modelos de comportamiento de material; (III) los métodos numéricos para el análisis por elementos finitos de la respuesta transitoria de sistemas estructurales conteniendo modelos fraccionarios; los métodos aproximados para (IV) el problema de los valores propios complejos y (V) para la respuesta en frecuencia de sistemas con amortiguamiento variable en frecuencia; y la homogenización de vigas con tratamiento FLD (VI) incluyendo modelos fraccionarios y (VII) considerando las deformaciones originadas por la cortadura.

1. Respecto al procedimiento experimental descrito en el Capítulo 2, se ha presentado una técnica para extraer el módulo complejo de materiales poliméricos a partir de probetas FLD. En dicha técnica, se propone sustituir el uso de la respuesta forzada en la que se basa la norma ASTM E 756-04, por el de la respuesta sísmica obtenida mediante la excitación de la base. Con dicha modificación de la norma se evita emplear transductores de fuerza sin contacto, simplificando así la cadena de medida. Este trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista *Materials & Design* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-a).
2. También en el Capítulo 2, relativo a la caracterización de materiales viscoelásticos, se ha presentado una función de relajación que reproduce el comportamiento detectado en algunos materiales compuestos cuyo módulo de almacenamiento permanece constante en frecuencia mientras

que el factor de pérdida presenta el pico característico de los materiales viscoelásticos. Se ha proporcionado un sentido físico a los parámetros de este modelo, que ha sido validado mediante el ajuste a resultados experimentales de probetas de hormigón polímero. Este trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista *International Journal of Solids and Structures* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-b).

3. En el Capítulo 3 se ha presentado una formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales en los que se incluyen modelos fraccionarios. A diferencia de la de Padovan (1987), con esta formulación se evita evaluar y almacenar en cada paso de integración el estado tensional, de modo que los recursos computacionales se reducen considerablemente. Esta trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-c).

4. Respecto a la extracción de autovalores y autovectores en sistemas estructurales con tratamiento viscoelástico, en el Capítulo 4 se han presentado un conjunto de métodos aproximados que, partiendo del sistema sin amortiguar, permiten estimar la solución compleja haciendo uso de las derivadas de los autovectores. Por un lado, se ha obtenido un método que resuelve de forma sencilla los sistemas con amortiguamiento no clásico. Por otro lado, se ha logrado un algoritmo iterativo que aproxima eficientemente la solución del problema con amortiguamiento variable en frecuencia. Los métodos desarrollados para sistemas de primer orden con matriz de amortiguamiento estructural han sido publicados en la revista *Journal of Sound and Vibration* (Cortés y Elejabarrieta, 2006a), y los generados para sistemas de segundo orden con matriz de amortiguamiento viscoso, en *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (Cortés y Elejabarrieta, 2006b). Un resumen de estos trabajos fue presentado en el Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005 (Cortés y Elejabarrieta, 2005b) y en el *XVII Congrès*

Français de Mécanique (Cortés y Elejabarrieta, 2005c), que tuvieron lugar en Granada y en Troyes, respectivamente.

5. El método de la superposición de las funciones de contribución modal, que se ha presentado en el Capítulo 4, permite obtener la respuesta en frecuencia de sistemas con amortiguamiento variable. En efecto, este tipo de sistemas pierden el carácter autoadjunto, por lo que no se puede emplear la superposición modal, si no que se utilizan métodos directos para determinar su respuesta en frecuencia. Por lo tanto, el método desarrollado, que fue presentado en París en la *6th European Conference on Structural Dynamics* (Cortés y Elejabarrieta, 2005a), recupera la información sobre la participación de los modos de vibración en la respuesta total del sistema.
6. Las técnicas de homogenización en sistemas compuestos por diferentes materiales simplifican el análisis y permiten reducir considerablemente los costos de computación. En este sentido, en el Capítulo 5 se ha presentado una formulación homogeneizada para vigas con recubrimiento viscoelástico, desarrollada para el análisis dinámico transitorio contemplando modelos constitutivos con derivadas fraccionarias. Este trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista *Computational Mechanics* (Cortés y Elejabarrieta, en imprenta-d).
7. Por último, también referente a la homogenización de vigas con tratamiento viscoelástico del Capítulo 5, se ha presentado una formulación para vigas gruesas en las que se incluyen las deformaciones ocasionadas por la cortadura. Aunque se ha podido verificar que la formulación de Oberst y Frankenfeld (1952) posee un amplio rango de aplicación, la formulación propuesta, recogida en el trabajo enviado a la revista *Journal of Applied Mechanics* (Cortés y Elejabarrieta, en revisión-a), mejora sustancialmente los resultados en aquellos casos en los que la cortadura adquiere un protagonismo relevante.

Por último, aunque ha quedado excluido de la presente memoria, durante el periodo de formación para la obtención de la suficiencia investigadora se realizó el análisis de las vibraciones longitudinales de una barra amortiguada. De este análisis, se extrajeron nuevos resultados que facilitan la comprensión del comportamiento de los sistemas amortiguados. La primera parte de este trabajo, relativo a las frecuencias naturales y a las funciones modales complejas, ha sido publicada en la revista *International Journal of Mechanical Sciences* (Cortés y Elejabarrieta, 2006c), y la segunda parte, haciendo referencia a la respuesta en frecuencia, se encuentra en revisión en la misma revista (Cortés y Elejabarrieta, en revisión-b) en el instante del depósito de la presente memoria de tesis.

6.2 Líneas futuras

Para finalizar, se debe remarcar que a medida que se ha avanzado en la investigación, han ido quedando abiertos temas que pueden ser abordados en trabajos futuros, los cuales se exponen a continuación.

1. En lo referente a la técnica experimental, el movimiento sísmico de la base de las probetas se logró gracias a un excitador electrodinámico. Debido a resonancias inherentes al propio excitador, el rango de frecuencias de ensayo útiles fue limitado. Por lo tanto, es conveniente comprobar si emplazando las probetas sobre un soporte debidamente guiado, cuyo movimiento sísmico sea provocado por el excitador, se logra filtrar los eventuales ruidos que se inducen.
2. El ajuste del modelo fraccionario de cinco parámetros llevado a cabo sobre las medidas experimentales del material ensayado, no reproduce con precisión los resultados de su módulo complejo. Se sugiere comprobar si un modelo fraccionario con más parámetros es capaz de reproducir con mayor exactitud los resultados experimentales.

3. El modelo hereditario desarrollado para materiales con módulo de almacenamiento constante consta de tres parámetros. Se propone el análisis de modelos con mayor número de parámetros, con el fin de presentar mayor flexibilidad a la hora de ajustarse a eventuales resultados experimentales.
4. En la formulación de elementos finitos para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales en los que se incluyen modelos fraccionarios, se ha empleado la definición de Grünwald-Letnikov, también llamado método G1, para la integración numérica. Se propone comprobar la eficiencia de otros métodos en la formulación propuesta, como el G2, u otros de los revisados.
5. En relación a los métodos desarrollados para la extracción de los valores propios, se propone llevar a cabo una variante para el caso de sistemas con autovalores repetidos. Asimismo, sería interesante realizar un análisis sobre la precisión de los métodos en función de las propiedades del sistema, como estudiar el efecto de la segunda derivada de los autovectores sobre la efectividad de los métodos.
6. En cuanto a la formulación homogeneizada para el análisis dinámico transitorio de vigas FLD usando operadores fraccionarios, esta se puede comparada con la de Galucio et ál. (2004) para vigas CLD en las que el espesor de la capa de confinamiento tienda a acero.
7. Relativo a la otra de las formulaciones homogeneizadas, la referente a vigas FLD con capas gruesas para el análisis en frecuencia, se propone desarrollar un modelo válido para la respuesta dinámica transitoria con operadores fraccionarios, aunque sólo si las frecuencias de interés son lo suficientemente altas como para que dicho estudio se vea justificado, ya que se ha podido comprobar que el modelo de viga delgada proporciona una precisión aceptable en un amplio ancho de banda. Asimismo, se

propone una investigación sobre un modelo que tenga en cuenta las inercias rotacionales.

Por último, cabe destacar que todos los algoritmos propuestos se han implementado en un entorno de elementos finitos programado en Matlab, lo que presenta serias limitaciones. Para que dichos métodos puedan ser empleados en aplicaciones prácticas aprovechando todos los recursos que ofrecen los programas de elementos finitos comerciales, en la actualidad se está llevando a cabo un proyecto dirigido por la Dra. María Jesús Elejabarrieta, directora asimismo de la presente tesis, en el que se están programando los algoritmos desarrollados en el entorno de ABAQUS.

Anexos

A

Fórmulas del Capítulo 3

En este Anexo se resumen las ecuaciones obtenidas en la formulación de elementos finitos desarrollada en el Capítulo 3 para el análisis dinámico transitorio de sistemas estructurales con un tratamiento superficial viscoelástico, en los que la ecuación constitutiva del material amortiguador viene dada por el modelo fraccionario de cinco parámetros

$$\sigma(t) + \tau^\beta D^\beta \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_\infty \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \quad (\text{A.1})$$

donde $D^{(\bullet)}$ indica el operador de la derivada fraccionaria; α y β son los órdenes de derivación, de modo que $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$; E_0 representa el módulo estático; E_∞ indica el módulo asintótico si $\beta = \alpha$; y τ es el tiempo de relajación. La ecuación de movimiento fraccionaria satisface

$$\begin{aligned} \tau^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) D^\beta \ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ + \tau^\beta \mathbf{K}_e D^\beta \mathbf{u}(t) + (E_\infty/E_0) \tau^\alpha \mathbf{K}_v D^\alpha \mathbf{u}(t) \\ + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v) \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) + \tau^\beta D^\beta \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{K} indican las matrices de masa y de rigidez; los subíndices $(\bullet)_e$ y $(\bullet)_v$ hacen referencia al material elástico y al viscoelástico, respectivamente; y $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ son los vectores de aceleraciones, desplazamientos y fuerzas nodales.

La aplicación de la definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria sobre la ecuación (A.2) permite desarrollar un esquema de integración directa explícito que conduce a la resolución de un sistema de segundo orden del tipo $\mathbf{M-K-F}$, y otros dos implícitos: uno de ellos conlleva también un sistema $\mathbf{M-K-F}$ y el otro, deriva en uno del tipo $\mathbf{M-C-K-}$

\mathbf{F} , cuyas matrices y vector de fuerzas equivalentes se recogen en la Tabla A.1.

Tabla A.1

Matrices y vector de fuerzas equivalentes para el sistema $\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t)$

Método explícito M-K-F	
$\bar{\mathbf{M}}$	$= \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v$
$\bar{\mathbf{K}}$	$= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$
$\bar{\mathbf{F}}_n$	$= \mathbf{F}_n + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n-j} - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n-j}$ $- \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e \sum_{j=0}^{n-1} A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n-j} - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v \sum_{j=0}^{n-1} A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n-j}$
Método implícito M-K-F	
$\bar{\mathbf{M}}$	$= \left[1 + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta\right] (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v)$
$\bar{\mathbf{K}}$	$= \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e + \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$
$\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$	$= \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j}$ $- \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j}$
Método implícito M-C-K-F	
$\bar{\mathbf{M}}$	$= \left[1 + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta\right] (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v)$
$\bar{\mathbf{C}}$	$= \Delta t \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e + \Delta t \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v$
$\bar{\mathbf{K}}$	$= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v$
$\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$	$= \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \sum_{j=0}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{F}_{n+1-j} - \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-j}$ $- \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\beta \mathbf{K}_e \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\beta,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right) - \frac{E_\infty}{E_0} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^\alpha \mathbf{K}_v \left(\mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^n A_{\alpha,j+1} \mathbf{u}_{n+1-j} \right)$

En esta tabla, Δt representa el paso de integración, y los parámetros $A_{\alpha,j+1}$ y $A_{\beta,j+1}$ son los coeficientes de Grünwald-Letnikov de orden α y β , respectivamente.

B

Matrices de los elementos finitos de los modelos 2D

En los ejemplos numéricos de los capítulos tercero, cuarto y quinto se ha hecho uso de un modelo 2D en tensión plana para una viga en voladizo. A continuación se muestra la formulación que permite obtener las matrices de masa, de amortiguamiento viscoso y de rigidez de los elementos finitos empleados. Para más detalles sobre el método de los elementos finitos, consúltese, por ejemplo, los libros de Bathe (1996), de Hughes (2000) o de Zienkiewicz y Taylor (2004).

A continuación se considera un elemento finito rectangular de cuatro nodos, de dimensiones $a \times b$, representado en la Figura B.1(a).

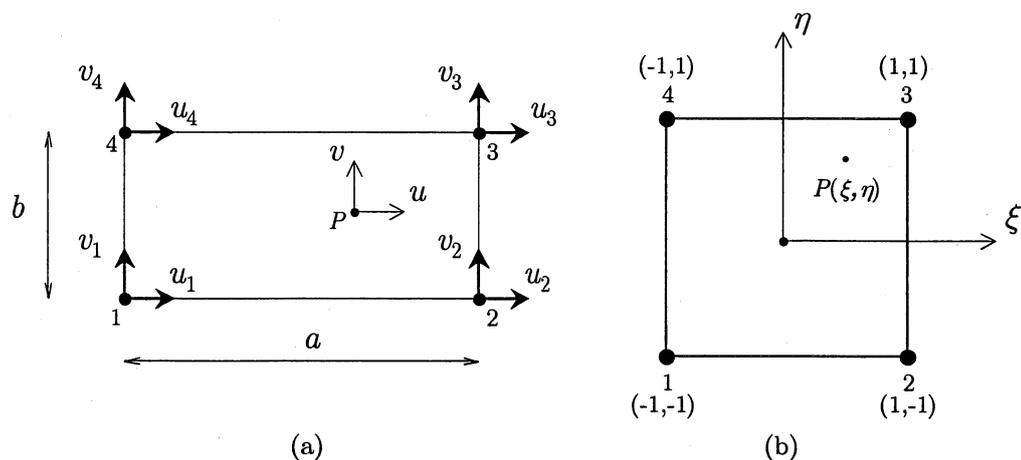


Figura B.1. Elemento finito rectangular de cuatro nodos (a) original y (b) padre.

El vector de los desplazamientos \mathbf{u}_P de cualquier punto P perteneciente a dicho elemento finito se descompone en sus componentes u y v , tal que

$$\mathbf{u}_P = [u \quad v]^T, \quad (\text{B.1})$$

donde $(\bullet)^T$ es el operador de la trasposición. Dichos desplazamiento se interpolan a partir de los desplazamientos de los nodos i -ésimos u_i y v_i . Para ello, se emplea la formulación isoparamétrica, lo que significa que las funciones de interpolación para los desplazamientos son las mismas que con las que se interpola la geometría del elemento finito. Así, utilizando las coordenadas naturales o intrínsecas (ξ, η) , que permiten definir la geometría del elemento padre representado en la Figura B.1(b), las funciones de interpolación bilineales N_i vienen dadas por

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (\text{B.2})$$

donde ξ_i y η_i son las coordenadas naturales del nodo i -ésimo. Entonces, la aproximación del desplazamiento \mathbf{u}_P satisface

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad (\text{B.3})$$

donde \mathbf{N} es la matriz de las funciones de interpolación, dada por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

y \mathbf{u} representa el vector de los desplazamientos nodales

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T. \quad (\text{B.5})$$

La matriz de masa consistente \mathbf{M}_c se puede obtener a partir de la energía cinética del elemento finito, tal que

$$\mathbf{M}_c = t \iint_S \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dS, \quad (\text{B.6})$$

donde t y S indican el espesor y el área del elemento finito, y ρ es la densidad del material. Como el elemento finito es rectangular, la integral doble de la ecuación (B.6) se resuelve con sencillez, resultando

$$\mathbf{M}_c = \frac{\rho abt}{36} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & 2 \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Para el esquema de integración directa explícito se ha empleado la matriz de masa concentrada \mathbf{M}_1 , que al ser diagonal, simplifica los cálculos. Esta se obtiene considerando el desacoplamiento de la matriz, concentrando toda la masa en la diagonal principal de la misma, proporcionando

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{4} \rho abt \mathbf{I}, \quad (\text{B.8})$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad.

La matriz de rigidez se puede obtener a partir de la energía de deformación del elemento finito, satisfaciendo

$$\mathbf{K} = t \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad (\text{B.9})$$

donde la matriz \mathbf{D} representa la matriz de elasticidad del material, que relaciona las tensiones originadas por las fuerzas elásticas σ_e con las deformaciones ϵ ,

$$\sigma_e = \mathbf{D} \epsilon, \quad (\text{B.10})$$

que para un estado de tensión plana, esta viene dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

de modo que E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, respectivamente.

La matriz \mathbf{B} de la ecuación (B.9) es la que relaciona las deformaciones ϵ con los desplazamientos \mathbf{u} ,

$$\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (\text{B.12})$$

tal que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N}. \quad (\text{B.13})$$

La integral de la ecuación (B.9) suele ser resuelta mediante integración numérica. La técnica más sencilla es la integración reducida, suponiendo que el integrando toma un valor constante, el evaluado en el centroide del elemento finito. Este tipo de integración puede originar problemas de *hourglassing*, término con el que se conoce el caso de una energía de deformación nula si el centroide coincide con un punto material que no se deforma. Para solventar esta contrariedad, en los modelos utilizados en este trabajo se ha incluido el control de *hourglassing* de Kosloff y Frazier (1978), de modo que la integral de rigidez resulta

$$\mathbf{K} = \frac{Et}{24\gamma(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_2^T & \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

donde

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 3(1-\nu) + 2\gamma^2(4-\nu^2) & 3\gamma(1+\nu) & 3(1-\nu) - 2\gamma^2(4-\nu^2) & -3\gamma(1-3\nu) \\ & 3\gamma^2(1-\nu) + 2(4-\nu^2) & 3\gamma(1-3\nu) & -3\gamma^2(1-\nu) + 2(2+\nu^2) \\ & & 3(1-\nu) + 2\gamma^2(4-\nu^2) & -3\gamma(1+\nu) \\ & & & 3\gamma^2(1-\nu) + 2(4-\nu^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

y

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -3(1-\nu) - 2\gamma^2(2+\nu^2) & -3\gamma(1+\nu) & -3(1-\nu) + 2\gamma^2(2+\nu^2) & 3\gamma(1-3\nu) \\ & -3\gamma^2(1-\nu) - 2(2+\nu^2) & -3\gamma(1-3\nu) & 3\gamma^2(1-\nu) - 2(4-\nu^2) \\ & & -3(1-\nu) - 2\gamma^2(2+\nu^2) & 3\gamma(1+\nu) \\ & & & -3\gamma^2(1-\nu) - 2(2+\nu^2) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

donde γ es la relación de aspecto, definida como

$$\gamma = b/a. \quad (\text{B.17})$$

La matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} se puede obtener a partir de la energía de disipación,

$$\mathbf{C} = t \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{V} \mathbf{B} dS, \quad (\text{B.18})$$

donde \mathbf{V} representa la matriz que relaciona las tensiones originadas por las fuerzas viscosas σ_v con la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$,

$$\sigma_v = \mathbf{V} \dot{\epsilon}, \quad (\text{B.19})$$

que para el caso de un estado plano de tensiones, dada la similitud entre las ecuaciones (B.10) y (B.19), esta matriz viene dada por

$$\mathbf{V} = \frac{c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

donde c representa la viscosidad del material. Si por el contrario el material se caracteriza mediante un modelo de amortiguamiento no viscoso, la matriz de amortiguamiento $\tilde{\mathbf{G}}(s)$ en el dominio de Laplace satisface

$$\tilde{\mathbf{G}}(s) = t \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{V}(s) \mathbf{B} dS, \quad (\text{B.21})$$

donde ahora, la matriz $\mathbf{V}(s)$ no es constante, si no que se representa por medio de

$$\mathbf{V}(s) = \frac{c\tilde{g}(s)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

donde $\tilde{g}(s)$ es la transformada de Laplace de la función de amortiguamiento, que para el caso del modelo exponencial, satisface

$$\tilde{g}(s) = \frac{1}{1+s\tau}, \quad (\text{B.23})$$

donde τ indica el tiempo de relajación.

C

Algoritmos para el problema de los valores propios en sistemas de primer orden

En las seis tablas que se muestran a continuación se recogen los algoritmos que se han descrito en el Capítulo 4 para resolver de forma aproximada el problema de los valores propios en sistemas con matriz de amortiguamiento estructural. Se incluyen las versiones en un único paso, incremental e iterativa, esta última para sistemas con matriz de amortiguamiento estructural dependiente de la frecuencia. Los métodos se diferencian entre los que emplean las derivadas de Fox y Kapoor (1968) y las de Nelson (1976).

En dichos algoritmos, n indica el orden de las matrices del sistema, r es el índice del modo que se está analizando, $r_{\text{máx}}$ el número máximo de modos bajo estudio, y el subíndice $(\bullet)_0$ hace referencia a las propiedades modales del problema resuelto sin amortiguamiento.

En los algoritmos relacionados con las derivadas de Fox y Kapoor (1968), m denota el número de modos que contiene la base modal truncada $\bar{\Phi}$. Si se emplease la base modal completa Φ , entonces $m = n$.

En la versión incremental, el número de incrementos a efectuar es $q_{\text{máx}}$, y el índice que indica el incremento actual viene dado por q .

Del mismo modo, para los esquemas iterativos, el índice de cada iteración viene dado por j , y se propone que el proceso de cálculo concluya si se alcanza un máximo número de iteraciones $j_{\text{máx}}$ o si se logra un error $\varepsilon_{r,j}$ inferior a la tolerancia de convergencia adecuada tol . Este error $\varepsilon_{r,j}$ se ha definido mediante la expresión

$$\varepsilon_{r,j} = \max \left(\frac{\operatorname{Re}(\lambda_{r,j}^* - \lambda_{r,j-1}^*)}{\operatorname{Re}(\lambda_{r,j-1}^*)}, \frac{\operatorname{Im}(\lambda_{r,j}^* - \lambda_{r,j-1}^*)}{\operatorname{Im}(\lambda_{r,j-1}^*)} \right), \quad (\text{C.1})$$

con la finalidad de que los autovalores complejos converjan tanto en su parte real como en la imaginaria.

Tabla C.1

Algoritmo del método simple empleando las derivadas de Fox y Kapoor

1. Resolver el problema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi_0 = \mathbf{0}$, donde $\phi_0^T \mathbf{M} \phi_0 = 1$.

2. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:

3. Calcular $\mathbf{f}_{r,0} := -\mathbf{H} \phi_{r,0}$.

4. Construir el vector \mathbf{c}_r de dimensión $m \leq n$ tal que:

para $k := 1$ hasta m hacer:

$$\text{si } k \neq r \text{ entonces } \mathbf{c}_r(k) := \frac{\phi_{k,0}^T \mathbf{f}_r}{\lambda_{k,0} - \lambda_{r,0}},$$

$$\text{si } k = r \text{ entonces } \mathbf{c}_r(k) := 0.$$

5. Calcular $\Delta \phi_r^* := i \bar{\Phi}_0 \mathbf{c}_r$.

6. Obtener $\phi_r^* := \phi_{r,0} + \Delta \phi_r^*$.

7. Normalizar $\phi_r^* := \frac{\phi_r^*}{\sqrt{\phi_r^{*T} \mathbf{M} \phi_r^*}}$.

8. Obtener $\lambda_r^* := \phi_r^{*T} \mathbf{K} \phi_r^*$.

9. Fin.

Tabla C.2

Algoritmo del método incremental empleando las derivadas de Fox y Kapoor

1. Resolver el problema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi_0 = \mathbf{0}$, donde $\phi_0^T \mathbf{M} \phi_0 = 1$.

2. Calcular $\mathbf{h}^* := \frac{1}{q_{\text{máx}}} \mathbf{iH}$.

3. Para $q := 1$ hasta $q_{\text{máx}}$ hacer:

4. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:

5. Calcular $\mathbf{f}_{r,q}^* := -\mathbf{h}^* \phi_{r,q-1}^*$.

6. Construir el vector $\mathbf{c}_{r,q}^*$ de dimensión $m \leq n$ tal que:

para $k := 1$ hasta m hacer:

$$\text{si } k \neq r \text{ entonces } \mathbf{c}_{r,q}^*(k) := \frac{\phi_{k,q-1}^{*T} \mathbf{f}_{r,q}^*}{\lambda_{k,q-1}^* - \lambda_{r,q-1}^*},$$

$$\text{si } k = r \text{ entonces } \mathbf{c}_{r,q}^*(k) := 0.$$

7. Memorizar $\Delta \phi_{r,q}^* := \bar{\Phi}_{q-1}^* \mathbf{c}_{r,q}^*$.

8. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:

9. Obtener $\phi_{r,q}^* = \phi_{r,0} + \Delta \phi_{r,q}^*$.

10. Normalizar $\phi_{r,q}^* := \frac{\phi_{r,q}^*}{\sqrt{\phi_{r,q}^{*T} \mathbf{M} \phi_{r,q}^*}}$.

11. Obtener $\lambda_{r,q}^* := \phi_{r,q}^{*T} (\mathbf{K} + q \mathbf{h}^*) \phi_{r,q}^*$.

12. Fin.

Tabla C.3

Algoritmo del método iterativo empleando las derivadas de Fox y Kapoor

1. Resolver el sistema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^*(0)) \boldsymbol{\phi}_0 = \mathbf{0}$, con $\boldsymbol{\phi}_0^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_0 = 1$.

2. Inicializar $j := 1$.

3. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:

4. Repetir:

5. Obtener la frecuencia natural $\omega_{r,j-1} := \text{Re}(\sqrt{\lambda_{r,j-1}^*})$.

6. Calcular $\Delta \mathbf{K}_{r,j-1}^* := \mathbf{K}_v^*(\omega_{r,j-1}) - \mathbf{K}_v^*(0)$.

7. Calcular $\mathbf{f}_{r,j}^* := -\Delta \mathbf{K}_{r,j-1}^* \boldsymbol{\phi}_{r,0}$.

8. Construir el vector $\mathbf{c}_{r,j}^*$ de dimensión $m \leq n$ tal que:

para $k := 1$ hasta m hacer:

$$\text{si } k \neq r \text{ entonces } \mathbf{c}_{r,j}^*(k) := \frac{\boldsymbol{\phi}_{k,0}^T \mathbf{f}_{r,j}^*}{\lambda_{k,0} - \lambda_{r,0}},$$

$$\text{si } k = r \text{ entonces } \mathbf{c}_{r,j}^*(k) := 0.$$

9. Calcular $\Delta \boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \bar{\boldsymbol{\Phi}}_0 \mathbf{c}_{r,j}^*$.

10. Obtener $\boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \boldsymbol{\phi}_{r,0} + \Delta \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*$.

11. Normalizar $\boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \frac{\boldsymbol{\phi}_{r,j}^*}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_{r,j}^{*T} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*}}$.

12. Obtener $\lambda_{r,j}^* := \boldsymbol{\phi}_{r,j}^{*T} \mathbf{K}^*(\omega_{r,j-1}) \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*$.

13. Estimar el error $\varepsilon_{r,j}$ e incrementar $j := j + 1$.

Hasta que $\varepsilon_{r,j} \leq \text{tol}$ o $j > j_{\text{máx}}$.

14. Fin.

Tabla C.4

Algoritmo del método simple empleando las derivadas de Nelson

1. Resolver el problema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi_0 = \mathbf{0}$, donde $\phi_0^T \mathbf{M} \phi_0 = 1$.
 2. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 3. Calcular $\Delta \lambda_r := \phi_{r,0}^T \mathbf{H} \phi_{r,0}$.
 4. Calcular $\mathbf{f}_r := -(-\Delta \lambda_r \mathbf{M} + \mathbf{H}) \phi_{r,0}$.
 5. Obtener $\mathbf{D}_r := -\lambda_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{K}$.
 6. Encontrar en $\phi_{r,0}$ la posición k -ésima del elemento de mayor valor absoluto.
 7. Construir $\bar{\mathbf{D}}_r$ haciendo 0 la fila y columna k -ésimas de \mathbf{D}_r , y 1 su diagonal.
 8. Construir $\bar{\mathbf{f}}_r$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de \mathbf{f}_r .
 9. Resolver \mathbf{v}_r del sistema de ecuaciones lineales $\bar{\mathbf{D}}_r \mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{f}}_r$.
 10. Calcular $c_r := -\phi_{r,0}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r$.
 11. Calcular $\Delta \phi_r^* := i(\mathbf{v}_r + c_r \phi_{r,0})$.
 12. Obtener $\phi_r^* := \phi_{r,0} + \Delta \phi_r^*$.
 13. Normalizar $\phi_r^* := \frac{\phi_r^*}{\sqrt{\phi_r^{*T} \mathbf{M} \phi_r^*}}$.
 14. Obtener $\lambda_r^* := \phi_r^{*T} \mathbf{K} \phi_r^*$.
 15. Fin.
-

Tabla C.5

Algoritmo del método incremental empleando las derivadas de Nelson

1. Resolver el problema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi_0 = \mathbf{0}$, donde $\phi_0^T \mathbf{M} \phi_0 = 1$.
 2. Calcular $\mathbf{h}^* := \frac{1}{q_{\text{máx}}} \mathbf{iH}$.
 3. Para $q := 1$ hasta $q_{\text{máx}}$ hacer:
 4. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 5. Calcular $\Delta \lambda_{r,q-1}^* := \phi_{r,q-1}^{*\text{T}} \mathbf{h}^* \phi_{r,q-1}^*$.
 6. Calcular $\mathbf{f}_{r,q}^* := -(-\Delta \lambda_{r,q-1}^* \mathbf{M} + \mathbf{h}^*) \phi_{r,q-1}^*$.
 7. Calcular $\mathbf{D}_{r,q}^* := -\lambda_{r,q-1}^* \mathbf{M} + \mathbf{K} + (q-1) \mathbf{h}^*$.
 8. Encontrar la posición k -ésima del término de mayor valor absoluto del vector $\phi_{r,q-1}^*$.
 9. Construir $\bar{\mathbf{D}}_{r,q}^*$ poniendo 0 en la fila y columna k -ésimas de $\mathbf{D}_{r,q}^*$, y 1 en el término de la diagonal.
 10. Construir $\bar{\mathbf{f}}_{r,q}^*$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de $\mathbf{f}_{r,q}^*$.
 11. Resolver $\mathbf{v}_{r,q}^*$ del sistema de ecuaciones lineales $\bar{\mathbf{D}}_{r,q}^* \mathbf{v}_{r,q}^* = \bar{\mathbf{f}}_{r,q}^*$.
 12. Calcular $c_{r,q}^* := -\phi_{r,q-1}^{*\text{T}} \mathbf{M} \mathbf{v}_{r,q}^*$.
 13. Memorizar $\Delta \phi_{r,q}^* := \mathbf{v}_{r,q}^* + c_{r,q}^* \phi_{r,q-1}^*$.
 14. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 15. Obtener $\phi_{r,q}^* := \phi_{r,q-1}^* + \Delta \phi_{r,q}^*$.
 16. Normalizar $\phi_{r,q}^* := \frac{\phi_{r,q}^*}{\sqrt{\phi_{r,q}^{*\text{T}} \mathbf{M} \phi_{r,q}^*}}$.
 17. Obtener $\lambda_{r,q}^* := \phi_{r,q}^{*\text{T}} (\mathbf{K} + q \mathbf{h}^*) \phi_{r,q}^*$.
18. Fin.
-

Tabla C.6

Algoritmo del método iterativo empleando las derivadas de Nelson

1. Resolver el sistema no amortiguado $(-\lambda_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^*(0)) \boldsymbol{\phi}_0 = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{\phi}_0^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_0 = 1$.
2. Inicializar $j := 1$.
3. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 4. Encontrar la posición k -ésima del elemento de mayor valor absoluto del vector $\boldsymbol{\phi}_{r,0}$.
 5. Repetir:
 6. Obtener la frecuencia natural $\omega_{r,j-1} := \text{Re}(\sqrt{\lambda_{r,j-1}^*})$.
 7. Calcular $\Delta \mathbf{K}_{r,j-1}^* := \mathbf{K}_v^*(\omega_{r,j-1}) - \mathbf{K}_v^*(0)$.
 8. Calcular $\Delta \lambda_{r,j-1}^* := \boldsymbol{\phi}_{r,0}^T \Delta \mathbf{K}_{r,j-1}^* \boldsymbol{\phi}_{r,0}$.
 9. Calcular $\mathbf{f}_{r,j}^* := -(-\Delta \lambda_{r,j-1}^* \mathbf{M} + \Delta \mathbf{K}_{r,j-1}^*) \boldsymbol{\phi}_{r,0}$.
 10. Calcular $\mathbf{D}_{r,j}^* := -\lambda_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^*(\omega_{r,j-1})$.
 11. Construir $\bar{\mathbf{D}}_{r,j}^*$ poniendo 0 en la fila y columna k -ésimas de $\mathbf{D}_{r,j}^*$, y 1 en el término de la diagonal.
 12. Construir $\bar{\mathbf{f}}_{r,j}^*$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de $\mathbf{f}_{r,j}^*$.
 13. Resolver $\mathbf{v}_{r,j}^*$ del sistema de ecuaciones lineales $\bar{\mathbf{D}}_{r,j}^* \mathbf{v}_{r,j}^* = \bar{\mathbf{f}}_{r,j}^*$.
 14. Calcular $\mathbf{c}_{r,j}^* := -\boldsymbol{\phi}_{r,0}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{r,j}^*$.
 15. Calcular $\Delta \boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \mathbf{v}_{r,j}^* + \mathbf{c}_{r,j}^* \boldsymbol{\phi}_{r,0}$.
 16. Obtener $\boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \boldsymbol{\phi}_{r,0} + \Delta \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*$.
 17. Normalizar $\boldsymbol{\phi}_{r,j}^* := \frac{\boldsymbol{\phi}_{r,j}^*}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_{r,j}^{*T} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*}}$.
 18. Obtener $\lambda_{r,j}^* := \boldsymbol{\phi}_{r,j}^{*T} \mathbf{K}^*(\omega_{r,j-1}) \boldsymbol{\phi}_{r,j}^*$.
 19. Calcular el error $\varepsilon_{r,j}$ e incrementar $j := j + 1$.

Hasta que $\varepsilon_{r,j} < \text{tol}$ o $j > j_{\text{máx}}$.

20. Fin.

D

Algoritmos para el problema de los valores propios en sistemas de segundo orden

En las tablas de este Anexo se muestran los algoritmos presentados en el Capítulo 4 para aproximar los valores y vectores propios complejos en sistemas con matriz de amortiguamiento viscoso. Se incluyen las versiones en un único paso, incremental e iterativa, esta última para el caso de amortiguamiento no viscoso. Los métodos se diferencian entre los que utilizan las derivadas AFK y FAN.

De forma análoga al anexo anterior, n indica el orden de las matrices del sistema, r es el índice del modo que se está analizando, $r_{\text{máx}}$ el número máximo de modos bajo estudio, y el subíndice $(\cdot)_0$ hace referencia a las propiedades modales del problema resuelto sin amortiguamiento.

En los algoritmos relacionados con las derivadas AFK, m indica el número de modos que contiene la base modal truncada $\bar{\Phi}$. Si se emplea la base modal completa Φ , entonces $m = n$.

En la versión incremental, el número de incrementos a efectuar es $q_{\text{máx}}$, y el índice que indica el incremento actual es q .

Asimismo, para los esquemas iterativos, el índice de cada iteración viene dado por j , y se propone que el proceso de cálculo concluya si se alcanza un máximo número de iteraciones $j_{\text{máx}}$ o si se logra un error $\varepsilon_{r,j}$ inferior a la tolerancia de convergencia adecuada tol . Este error $\varepsilon_{r,j}$ se define mediante la expresión

$$\varepsilon_{r,j} = \max \left(\frac{\operatorname{Re}(s_{r,j} - s_{r,j-1})}{\operatorname{Re}(s_{r,j-1})}, \frac{\operatorname{Im}(s_{r,j} - s_{r,j-1})}{\operatorname{Im}(s_{r,j-1})} \right), \quad (\text{D.1})$$

con el fin de que los autovalores complejos converjan tanto en su parte real como en la imaginaria.

Tabla D.1

Algoritmo del método simple empleando las derivadas AFK

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
2. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 3. Calcular $\mathbf{f}_r := -s_{r,0} \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,0}$.
 4. Calcular $\Delta \mathbf{u}_r := -\frac{1}{4s_{r,0}} (\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,0}) \mathbf{u}_{r,0} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{2n} \frac{s_{r,0}}{2s_{k,0}} \frac{\mathbf{u}_{k,0}^T \mathbf{f}_r \mathbf{u}_{r,0}}{s_{r,0} - s_{k,0}} \mathbf{u}_{k,0}$.
 5. Obtener $\mathbf{u}_r := \mathbf{u}_{r,0} + \Delta \mathbf{u}_r$.
 6. Obtener s_r con las ecuaciones (4.50)–(4.53).
 7. Normalizar \mathbf{u}_r según la ecuación (4.15).
8. Fin.

Tabla D.2

Algoritmo del método incremental empleando las derivadas AFK

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
2. Calcular $\Delta \mathbf{C} := \frac{1}{q_{\text{máx}}} \mathbf{C}$.
3. Para $q := 1$ hasta $q_{\text{máx}}$ hacer:
 4. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 5. Calcular $\mathbf{f}_{r,q} := -s_{r,q-1} \Delta \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,q-1}$.
 6. Memorizar $\Delta \mathbf{u}_{r,q} := -\frac{1}{4s_{r,q-1}} (\mathbf{u}_{r,q-1}^T \Delta \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,q-1}) \mathbf{u}_{r,q-1} - \frac{1}{4s_{r,q-1}} (\mathbf{u}_{r,q-1}^T \Delta \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,q-1}) \mathbf{u}_{r,q-1} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{2n} \frac{s_{r,q-1}}{2s_{k,q-1}} \frac{\mathbf{u}_{k,q-1}^T \mathbf{f}_{r,q} \mathbf{u}_{r,q-1}}{s_{r,q-1} - s_{k,q-1}} \mathbf{u}_{k,q-1}$.
 7. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 8. Obtener $\mathbf{u}_{r,q} := \mathbf{u}_{r,q-1} + \Delta \mathbf{u}_{r,q}$.
 9. Obtener $s_{r,q}$ con las ecuaciones (4.50)–(4.53) donde $c_{r,q} := \mathbf{u}_{r,q}^H (q \Delta \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,q}$.
 10. Normalizar $\mathbf{u}_{r,q}$ con la ecuación (4.15).
11. Fin.

Tabla D.3

Algoritmo del método iterativo empleando las derivadas AFK

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
2. Inicializar $j := 1$.
3. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 4. Repetir
 5. Calcular $\mathbf{C}_{r,j-1}^* := \tilde{\mathbf{G}}(s_{r,j-1})$.
 6. Calcular $\mathbf{f}_{r,j} := -s_{r,0} \mathbf{C}_{r,j-1}^* \mathbf{u}_{r,0}$.
 7. Calcular $\Delta \mathbf{u}_{r,j} := -\frac{1}{4s_{r,0}} (\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C}_{r,j}^* \mathbf{u}_{r,0}) \mathbf{u}_{r,0} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{2n} \frac{s_{r,0}}{2s_{k,0}} \frac{\mathbf{u}_{k,0}^T \mathbf{f}_{r,j} \mathbf{u}_{r,0}}{s_{r,0} - s_{k,0}} \mathbf{u}_{k,0}$.
 8. Obtener $\mathbf{u}_{r,j} := \mathbf{u}_{r,0} + \Delta \mathbf{u}_{r,j}$.
 9. Obtener $s_{r,j}$ según las ecuaciones (4.50)–(4.53).
 10. Normalizar $\mathbf{u}_{r,j}$ con la ecuación (4.15).
 11. Estimar el error $\varepsilon_{r,j}$ e incrementar $j := j + 1$.
 - Hasta que $\varepsilon_{r,j} \leq \text{tol}$ o $j > j_{\text{máx}}$.
12. Fin.

Tabla D.4

Algoritmo del método simple empleando las derivadas FAN

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
2. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 3. Calcular $\Delta s_{r,0} := -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,0}$.
 4. Calcular $\mathbf{f}_r := -s_{r,0} (2\Delta s_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,0}$.
 5. Obtener $\mathbf{D}_r := s_{r,0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$.
 6. Encontrar en $\mathbf{u}_{r,0}$ la posición k -ésima del elemento de mayor valor absoluto.
 7. Construir $\bar{\mathbf{D}}_r$ haciendo 0 la fila y columna k -ésimas de \mathbf{D}_r , y 1 la diagonal.
 8. Construir $\bar{\mathbf{f}}_r$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de \mathbf{f}_r .
 9. Resolver \mathbf{b}_r del sistema de ecuaciones lineales $\bar{\mathbf{D}}_r \mathbf{b}_r = \bar{\mathbf{f}}_r$.
 10. Calcular $d_r := -\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{M} \mathbf{b}_r - \frac{1}{4s_r} \mathbf{u}_{r,0}^T (2\Delta s_{r,0} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,0}$.
 11. Calcular $\Delta \mathbf{u}_r := \mathbf{b}_r + d_r \mathbf{u}_{r,0}$.
 12. Obtener $\mathbf{u}_r := \mathbf{u}_{r,0} + \Delta \mathbf{u}_r$.
 13. Obtener s_r con las ecuaciones (4.50)–(4.53).
 14. Normalizar \mathbf{u}_r con la ecuación (4.15).
15. Fin.

Tabla D.5

Algoritmo del método incremental empleando las derivadas FAN

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
 2. Calcular $\Delta \mathbf{C} := \frac{1}{q_{\text{máx}}} \mathbf{C}$.
 3. Para $q := 1$ hasta $q_{\text{máx}}$ hacer:
 4. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 5. Calcular $\Delta s_{r,q-1} := -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{r,q-1}^T \Delta \mathbf{C} \mathbf{u}_{r,q-1}$.
 6. Calcular $\mathbf{f}_{r,q} := -s_{r,q-1} \left(2\Delta s_{r,q-1} \mathbf{M} + \left(1 + \frac{q-1}{s_{r,q-1}} \right) \Delta \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{r,q-1}$.
 7. Obtener $\bar{\mathbf{D}}_{r,q} := s_{r,q-1}^2 \mathbf{M} + s_{r,q-1} (q-1) \Delta \mathbf{C} + \mathbf{K}$.
 8. Encontrar la posición k -ésima del elemento de mayor valor absoluto del vector $\mathbf{u}_{r,q-1}$.
 9. Construir $\bar{\mathbf{D}}_{r,q}$ poniendo 0 en la fila y columna k -ésimas de $\mathbf{D}_{r,q}$, y 1 en el término de la diagonal.
 10. Construir $\bar{\mathbf{f}}_{r,q}$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de $\mathbf{f}_{r,q}$.
 11. Resolver $\mathbf{b}_{r,q}$ del sistema de ecuaciones lineales $\bar{\mathbf{D}}_{r,q} \mathbf{b}_{r,q} = \bar{\mathbf{f}}_{r,q}$.
 12. Calcular $d_{r,q} := -\frac{1}{2s_{r,q-1}} \mathbf{u}_{r,q-1}^T \left[(2s_{r,q-1} \mathbf{M} + (q-1) \Delta \mathbf{C}) \mathbf{b}_{r,q} + (\Delta s_{r,q-1} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,q-1} \right]$.
 13. Memorizar $\Delta \mathbf{u}_{r,q} := \mathbf{b}_{r,q} + d_{r,q} \mathbf{u}_{r,q-1}$.
 14. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 15. Obtener $\mathbf{u}_{r,q} := \mathbf{u}_{r,q-1} + \Delta \mathbf{u}_{r,q}$.
 16. Obtener $s_{r,q}$ con las ecuaciones (4.50)–(4.53) donde $c_{r,q} := \mathbf{u}_{r,q}^H (q \Delta \mathbf{C}) \mathbf{u}_{r,q}$.
 17. Normalizar $\mathbf{u}_{r,q}$ con la ecuación (4.15).
 18. Fin.
-

Tabla D.6

Algoritmo del método iterativo empleando las derivadas FAN

1. Resolver el problema no amortiguado $(s_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = 1$.
 2. Para $r := 1$ hasta $r_{\text{máx}}$ hacer:
 3. Calcular $\mathbf{D}_r := s_{r,0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$.
 4. Encontrar la posición k -ésima del elemento de mayor valor absoluto de $\mathbf{u}_{r,0}$.
 5. Construir $\bar{\mathbf{D}}_r$ haciendo 0 la fila y columna k -ésimas de \mathbf{D}_r , y 1 la diagonal.
 6. Inicializar $j := 1$.
 7. Repetir
 8. Calcular $\mathbf{C}_{r,j-1}^* := \bar{\mathbf{G}}(s_{r,j-1})$.
 9. Calcular $\Delta s_{r,j-1} := -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{C}_{r,j-1}^* \mathbf{u}_{r,0}$.
 10. Calcular $\mathbf{f}_{r,j} := -s_{r,0} (2\Delta s_{r,j-1} \mathbf{M} + \mathbf{C}_{r,j-1}^*) \mathbf{u}_{r,0}$.
 11. Construir $\bar{\mathbf{f}}_{r,j}$ haciendo 0 el elemento k -ésimo de $\mathbf{f}_{r,j}$.
 12. Resolver $\mathbf{b}_{r,j}$ del sistema $\bar{\mathbf{D}}_{r,j} \mathbf{b}_{r,j} = \bar{\mathbf{f}}_{r,j}$.
 13. Calcular

$$d_{r,j} := -\mathbf{u}_{r,0}^T \mathbf{M} \mathbf{b}_{r,j} - \frac{1}{4s_{r,0}} \mathbf{u}_{r,0}^T (2\Delta s_{r,j-1} \mathbf{M} + \mathbf{C}_{r,j-1}^*) \mathbf{u}_{r,0}.$$
 14. Calcular $\Delta \mathbf{u}_{r,j} := \mathbf{b}_{r,j} + d_{r,j} \mathbf{u}_{r,0}$.
 15. Obtener $\mathbf{u}_{r,j} := \mathbf{u}_{r,0} + \Delta \mathbf{u}_{r,j}$.
 16. Obtener $s_{r,j}$ con las ecuaciones (4.50)–(4.53).
 17. Normalizar $\mathbf{u}_{r,j}$ según la ecuación (4.15).
 18. Calcular el error $\varepsilon_{r,j}$ e incrementar $j := j + 1$.
- Hasta que $\varepsilon_{r,j} < \text{tol}$ o $j > j_{\text{máx}}$.

19. Fin.

E

Rigidez de flexión homogeneizada

En este Anexo se obtiene la rigidez de flexión equivalente para la formulación homogeneizada de vigas FLD con capas gruesas desarrollada en el Capítulo 5, en la que las deformaciones provocadas por la cortadura no son despreciables. El objetivo de este análisis es deducir una rigidez de flexión homogeneizada B_K en la que se contemplen los efectos de la cortadura, y que satisfaga al mismo tiempo la hipótesis de Euler–Bernoulli

$$B_K \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = M_f(x,t), \quad (\text{E.1})$$

por lo tanto, verifique la ecuación de campo

$$B_K \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \rho_\ell \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{E.2})$$

donde x y t son las variables espacial y temporal; $M_f(x,t)$ y $v(x,t)$ representan los campos del momento flector y del desplazamiento transversal; y ρ_ℓ es la densidad lineal de la viga.

Primeramente se obtiene la ecuación de campo teniendo en cuenta las deformaciones ocasionadas por la cortadura. Para ello, se debe partir de la ecuación del balance del momento lineal sobre un tramo de viga de longitud dx ,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \rho_\ell \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}, \quad (\text{E.3})$$

y de la del balance del momento angular despreciando la inercia rotacional de la sección transversal,

$$\frac{\partial M_f(x,t)}{\partial x} + T(x,t) = 0, \quad (\text{E.4})$$

donde $T(x,t)$ representa el campo de la fuerza transversal.

Bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos y de pequeñas deformaciones, a continuación se considera el caso en el que los efectos producidos por el momento flector y por la fuerza transversal pueden ser desacoplados. Esta situación se da en vigas isótropas, o en vigas ortótropas en las que las direcciones de los planos de ortotropía coinciden con las direcciones principales de inercia de la sección transversal. Entonces, el campo del desplazamiento trasversal se puede descomponer como se indica,

$$v(x,t) = v_M(x,t) + v_T(x,t), \quad (\text{E.5})$$

donde los subíndices $(\bullet)_M$ y $(\bullet)_T$ hacen referencia a los desplazamientos producidos individualmente por el momento flector y por la fuerza transversal, respectivamente. El desplazamiento $v_M(x,t)$ originado por el momento flector verifica la hipótesis de Euler-Bernoulli,

$$B_{\text{eq}} \frac{\partial^2 v_M(x,t)}{\partial x^2} = M_f(x,t), \quad (\text{E.6})$$

donde B_{eq} es la rigidez de flexión equivalente de la sección, dada por la ecuación (5.32). El desplazamiento $v_T(x,t)$ causado por la fuerza transversal se relaciona con esta por medio de la ecuación

$$K_{\text{eq}} \frac{\partial v_T(x,t)}{\partial x} = T(x,t), \quad (\text{E.7})$$

donde K_{eq} representa la rigidez transversal equivalente, analizada en el Capítulo 5 y dada por las ecuaciones (5.38)–(5.40).

A continuación se resuelve el sistema de cinco ecuaciones (E.3)–(E.7) con cinco incógnitas $v(x,t)$, $v_M(x,t)$, $v_T(x,t)$, $M_f(x,t)$ y $T(x,t)$. Para ello, se diferencia la ecuación (E.3) dos veces respecto a la variable espacial x ,

$$\frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^3} = \rho_l \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (\text{E.8})$$

una vez la ecuación (E.4),

$$\frac{\partial^2 M_f(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \quad (\text{E.9})$$

cuatro veces la ecuación (E.5),

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 v_M(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v_T(x,t)}{\partial x^4}, \quad (\text{E.10})$$

dos veces la ecuación (E.6),

$$B_{\text{eq}} \frac{\partial^4 v_M(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 M_f(x,t)}{\partial x^2}, \quad (\text{E.11})$$

y tres veces la ecuación (E.7),

$$K_{\text{eq}} \frac{\partial^4 v_T(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^3}. \quad (\text{E.12})$$

Combinando estas últimas cinco ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación de campo descrita en términos del desplazamiento transversal $v(x,t)$,

$$\frac{B_{\text{eq}}}{\rho_l} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \frac{B_{\text{eq}}}{K_{\text{eq}}} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{E.13})$$

también conocida como la ecuación de Timoshenko (1921) para vigas gruesas, donde se ha despreciado la inercia rotacional de la sección transversal.

Para obtener la rigidez a flexión homogeneizada B_K , primeramente se resuelve el campo del momento flector $M_f(x, t)$ en función del desplazamiento transversal $v(x, t)$ combinando las ecuaciones (E.5), (E.6), (E.7) y (E.9), para dar

$$M_f(x, t) = B_{\text{eq}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho_l B_{\text{eq}}}{K_{\text{eq}}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad (\text{E.14})$$

que junto a (E.2), resulta

$$M_f(x, t) = B_{\text{eq}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{B_K B_{\text{eq}}}{K_{\text{eq}}} \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}, \quad (\text{E.15})$$

y junto a la hipótesis de Euler–Bernoulli de la ecuación (E.1), finalmente se obtiene

$$B_K \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = B_{\text{eq}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{B_K B_{\text{eq}}}{K_{\text{eq}}} \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}. \quad (\text{E.16})$$

A diferencia del caso particular en el que la rigidez transversal K_{eq} tienda a infinito, con lo que $B_K = B_{\text{eq}}$, la solución general de la ecuación (E.16) es función del propio desplazamiento transversal $v(x, t)$, o sea, de las condiciones de contorno. Considerando la separabilidad de variables para el caso particular de las vibraciones libres de una viga apoyada en sus dos extremos, la expansión modal del desplazamiento $v(x, t)$ implica que este se puede desarrollar en una serie biarmónica tal que

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin(\lambda_r x) \sin(\omega_r t - \phi_r), \quad (\text{E.17})$$

donde A_r es la amplitud del modo r -ésimo, ϕ_r es el desfase, ω_r es la frecuencia natural y λ_r el número de onda. Estos dos últimos parámetros están relacionados mediante la ecuación

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{B_K}{\rho_l}}, \quad (\text{E.18})$$

Así, para una frecuencia ω cualquiera, la ecuación (E.16) se transforma en

$$B_K = B_{\text{eq}} - \frac{\omega B_{\text{eq}} \sqrt{\rho_l B_K}}{K_{\text{eq}}}, \quad (\text{E.19})$$

de donde finalmente se despeja B_K para obtener

$$B_K = \frac{B_{\text{eq}}}{\left(\sqrt{1 + \varphi^2(\omega)} + \varphi(\omega)\right)^2}, \quad (\text{E.20})$$

donde la función $\varphi(\omega)$, dependiente de la frecuencia ω , viene dada por

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega \sqrt{\rho_l B_{\text{eq}}}}{2K_{\text{eq}}}. \quad (\text{E.21})$$

Referencias

Acoustical Solutions Inc. Disponible en:

<http://www.acousticalsolutions.com>.

Adhikari, S. (1999). Rates of change of eigenvalues and eigenvectors in damped dynamic system. *AIAA Journal*, 37(11), 1452–1457.

Adhikari, S. (2000). *Damping models for structural vibration*. Tesis doctoral: Cambridge University.

Adhikari, S. (2001). Classical normal modes in nonviscously damped linear systems. *AIAA Journal*, 39(5), 978–980.

Adhikari, S. (2002a). Derivative of eigensolutions of nonviscously damped linear systems. *AIAA Journal*, 40(10) 2061–2069.

Adhikari, S. (2002b). Dynamics on nonviscously damped linear systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(3) 328–339.

Adhikari, S., Wagner, N. (2004). Direct time-domain integration method for exponentially damped linear systems. *Computers and Structures*, 82(29–30), 2453–2461.

Adhikari, S., & Woodhouse, J. (2001). Identification of damping. Part 2: non-viscous damping. *Journal of Sound and Vibration*, 243(1), 63–88.

Adolfsson K., & Enelund, M. (2003). Fractional derivative viscoelasticity at large deformations. *Nonlinear Dynamics*, 33(3), 301–321.

Adolfsson K., Enelund, M., & Larsson, S. (2004). Adaptive discretization of fractional order viscoelasticity using sparse time story. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(42–44), 4567–4590.

Adolfsson K., Enelund, M., & Olsson, P. (2005). On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 9(1), 15–34.

Arnoldi, W.E. (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, 17–29.

- Arrhenius, S. (1889). Ober die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker durch Säuren. *Z. Physik. Chem.*, 4, 226–248.
- ASTM E 756–04 (2004). *Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials*. American Society for Testing and Materials.
- Atanackovic, T.M. (2002). A modified Zener model of a viscoelastic body. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14(2), 137–148.
- Bagley, R.L., & Torvik, P.J. (1979). A generalized derivative model for an elastomers damper. *Shock and Vibration Bulletin*, 49(2), 135–143.
- Bagley, R.L., & Torvik, P.J. (1983a). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3), 201–210.
- Bagley, R.L., & Torvik, P.J. (1983b). Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21(5), 741–748.
- Bagley, R.L., & Torvik, P.J. (1985). Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 23(6), 918–925.
- Bagley, R.L., & Torvik, P.J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour. *Journal of Rheology*, 30(1), 133–155.
- Bajer, A., Belsky, V., & Zeng, L.J. (2003). Combining a non-linear static analysis and complex eigenvalue extraction in brake squeal simulation. *Sae Technical Paper Series*, 2003–01–3349.
- Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
- Bickford, W.B. (1982). A consistent higher order beam theory. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, 11, 137–150.
- Bilbao, A., Avilés, R., Agirrebeitia, J., & Ajuria, J. (2006). Proportional damping approximation for structures with added viscoelastic dampers. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(6), 492–502.

- Biot, M.A. (1955). Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. *Physical Review*, 97, 1463–1469.
- Boltzmann, L. (1876). Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. *Pogg. Ann. Phys. Chem.*, 7, 624–654.
- Caputo, M., & Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91, 134–147.
- Caracciolo, R., Gasparetto, A., & Giovagnoni, M. (2004). An experimental technique for complete dynamic characterization of a viscoelastic material. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3–5), 1013–1032.
- Caughey, T.K. (1960) Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27, 269–271.
- Caughey, T.K., & O'Kelly, M.E.J. (1965). Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, 32, 583–588.
- Chatein, F. (1993). *Eigenvalues of matrices*. New York: John Wiley & sons.
- Choi, K.M., Jo, H.K., Kim, W.H., & Lee, I.W. (2004). Sensitivity analysis of non-conservative eigensystems. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3–5), 997–1011.
- Cortés, F., & Castillo, G. (en imprenta). Comparison between the dynamical properties of polymer concrete and grey cast iron for machine tool applications. *Materials & Design*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2005a). Complex modes superposition in non-classically damped structures. *Proceedings of EASD's Sixth European Conference on Structural Dynamics*, pp. 2171–2176.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2005b). Método aproximado para resolver el problema de los autovalores complejos en sistemas con matriz de amortiguamiento estructural. *Libro de Resúmenes del Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005*, p. 94.

- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2005c). Une méthode pour approcher les valeurs et vecteurs propres complexes en systèmes amortis avec matrice d'amortissement hystérétique variable en fréquence. *CD-rom du XVII Congrès Français de Mécanique*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2006a). An approximate numerical method for the complex eigenproblem in systems characterised by a structural damping matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 296(1–2), 166–182.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2006b). Computational methods for complex eigenproblems in finite element analysis of structural systems with viscoelastic damping treatments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44–47), 6448–6462.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (2006c). Longitudinal vibration of a damped rod. Part I: complex natural frequencies and mode shapes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(9), 969–975.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en imprenta–a). Viscoelastic materials characterisation using the seismic response. *Materials & Design*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en imprenta–b). Modelling viscoelastic materials whose storage modulus is constant with frequency. *International Journal of Solids and Structures*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en imprenta–c). Finite element formulations for transient dynamic analysis in structural systems with viscoelastic treatments containing fractional derivative models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en imprenta–d). Homogenised finite element for transient dynamic analysis of unconstrained layer damping beams involving fractional derivative models. *Computational Mechanics*.
- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en revisión–a). Structural vibration reduction in flexural elements using thick unconstrained layer damping. *Journal of Applied Mechanics*.

- Cortés, F., & Elejabarrieta, M.J. (en revisión-b). Longitudinal vibration of a damped rod. Part II: forced response. *International Journal of Mechanical Sciences*.
- Crawford, R.J. (1998). *Plastics Engineering*, p. 48. Oxford: Butterworth Heinemann.
- Da Silva, L.A. (2003). *Internal variable and temperature modeling behaviour of viscoelastic structures - a control analysis*. Tesis doctoral: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., & Luchko, Y. (2005). Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(6-8), 743-773.
- DiTaranto, R.A. (1965). Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *Journal of Applied Mechanics*, 87, 881-886.
- Eldred, L.B., Baker, W.P., & Palazotto, A.N. (1995). Kelvin-Voigt vs. fractional derivate model as constitutive relations for viscoelastic materials. *AIAA Journal*, 33(3), 547-550.
- Eldred, L.B., Baker, W.P., & Palazotto, A.N. (1996). Numerical application of fractional derivative model constitutive relations for viscoelastic materials. *Computers & Structures*, 60(6), 875-882.
- Enelund, M., & Josefson, B.L. (1997). Time-domain finite element analysis of viscoelastic structures with fractional derivatives constitutive relations. *AIAA Journal*, 35(10), 1630-1637.
- Enelund, M., & Lesieutre, G.A. (1999). Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, 36(29), 4447-4472.

- Enelund, M., Mähler, L., Runesson, K., & Josefson, B.L. (1999). Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws. *International Journal of Solids and Structures*, 36(16), 2417–2442.
- Enelund, M., & Olsson, P. (1999). Damping described by fading memory – analysis and application to fractional derivative models. *International Journal of Solids and Structures*, 36(7), 939–970.
- Escobedo-Torres, J., & Ricles, J.M. (1998). The fractional order elastic-viscoelastic equations of motion: formulation and solution methods. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9, 489–502.
- Ewins, D.J. (2000). *Modal testing* (2^a ed.). Baldock, Hertfordshire, Gran Bretaña: Research Studies Press.
- Ferry, J.D. (1961). *Viscoelastic properties of polymers*. New York: John Wiley & sons.
- Fischer, P. (2000). Eigensolution of nonclassically damped structures by complex subspace iteration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(1), 149–166.
- Fox, R.L., & Kapoor, M.P. (1968). Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6(12), 2426–2429.
- Friswell, M.I., & Adhikari, S. (2000). Derivatives of complex eigenvectors using Nelson's method, *AIAA Journal*, 38(12), 2355–2356.
- Friswell, M.I., Inman, D.J., & Lam, M.J. (1997). On the realisation of GHM models in viscoelasticity. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8(11), 986–993.
- Fung, E.H.K., & Yau, D.T.W. (2004). Vibration characteristics of a rotating flexible arm with ACLD treatment. *Journal of Sound and Vibration*, 269(1–2), 165–182.
- Galucio, A.C., Deü, J.F., & Ohayon, R. (2004). Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, 33(4), 282–291.

- Garg, D.P., & Anderson G.L. (2003). Structural vibration suppression via active/passive techniques. *Journal of Sound and Vibration* 262(3), 739–751.
- Germant, A. (1936). A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics*, 7, 311–317.
- Germant, A. (1938). On fractional differentials. *The Philosophical Magazine*, 25, 540–549.
- Gil-Negrete, N. (2004). *On the modelling and dynamic stiffness prediction of rubber isolators*. Tesis doctoral: Universidad de Navarra.
- Golla, D.F., & Hughes, P.C. (1985). Dynamics of viscoelastic structures – a time domain finite element formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 52(4), 897–906.
- Goodman, L.E. (1996). Material damping and slip damping. C.M. Harris (Ed.), *Shock and vibration Handbook*. (4^a ed.), cap. 36. New York: McGraw-Hill.
- Gusella, V., & Terenzi, G. (2001). Time-domain analysis of structures with dampers modelled by fractional derivatives. *Transactions on the Built Environment*, 57, 251–260.
- Hernández-Jiménez, A., Hernández-Santiago, J., Macías-García, A., & Sánchez-González, J. (2002). Relaxation modulus in PMMA and PTFE fitting by fractional Maxwell model. *Polymer Testing*, 21(3), 325–331.
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., & Taylor, R.L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5, 283–292.
- Hilfer, R. (Ed.) (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. Singapur: World Scientific.
- Hillström, L., Mossberg, M., & Lundberg, B. (2000). Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares. *Journal of Sound and Vibration*, 230(3), 689–707.

Hodgson & Hodgson Group Ltd. Disponible en:

<http://www.acoustic.co.uk>.

Houbolt, J.C. (1950). A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17, 540–550.

Hughes, T.J.R. (2000). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. New York: Dover Publications.

Ingman, D., & Suzdalnitsky, J. (2001). Iteration method for equation of viscoelastic motion with fractional differential operator of damping. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37–38), 5027–5036.

Inman, D.J. (1996). *Engineering vibration*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Johnson, C.D., Kienholz, D.A., & Rogers, L.C. (1981). Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, 51(1), 71–81.

Johnson, C.D., & Kienholz, D.A. (1982). Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal*, 20(9), 1284–1290.

Jones, D.I.G. (1974). Temperature–frequency dependence of dynamic properties of damping materials. *Journal of Sound and Vibration*, 33(4), 451–470.

Jones, D.I.G. (2001). *Handbook of viscoelastic vibration damping*. Chichester, Gran Bretaña: John Wiley & sons.

Kilbas, A.A., Srivastara, H.M., & Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Boston: Elsevier Science Ltd.

Kosloff, D., & Frazier, G.A. (1978). Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2, 57–72.

- Kluesener, M.F., & Drake, M.L. (1982). Damped structure design using finite element analysis. *Shock and Vibration Bulletin*, 52, 1–12.
- Lam, M.J. (1997). *Hybrid active/passive models with frequency dependent damping*. Tesis doctoral: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Lanczos, C. (1950). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45(4), 255–282.
- Lee, I.W., & Jung, G.H. (1997a). An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities. Part I: distinct natural frequencies. *Computers & Structures*, 62(3), 429–435.
- Lee, I.W., & Jung, G.H. (1997b). An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities. Part II: multiple natural frequencies. *Computers & Structures*, 62(3), 437–443.
- Lee, I.W., Kim, D.O., & Jung, G.H. (1999). Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems. Part I: distinct natural frequencies. *Journal of Sound And Vibration*, 223(3), 399–412.
- Lehoucq, R.B., Sorensen, D.C., & Yang, C. (1998). *Arpack user's guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. Philadelphia: SIAM. Disponible en:
<http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>.
- Lesieutre, G.A., & Bianchini, E. (1995). Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(4), 424–430.
- Lesieutre, G.A., & Mingori, D.L. (1990). Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. *Journal of Guidance and Control*, 13(6), 1040–1050.
- Leung, A.Y.T. (1995). Subspace iterations for complex symmetric eigenproblems. *Journal of Sound and Vibration*, 184(4), 627–637.

- Li, Z., & Crocker, M.J. (2005). A review on vibration damping in sandwich composite structures. *International Journal of Acoustics and Vibrations*, 10(4), 159–169.
- Liu, Z., Trogdon, A., & Yong, J. (1999). Modeling and analysis of a laminated beam. *Mathematical and Computer Modelling*, 30(1–2), 149–167.
- Macé, M. (1994). Damping of beam vibrations by means of a thin constrained viscoelastic layer: evaluation of a new theory. *Journal of sound and Vibration*, 172(5), 577–591.
- MATLAB Version 6* (2001). Natick, USA: The MathWorks Inc.
- MatWeb Material Property Data. Disponible en:
<http://www.matweb.com>.
- McTavish, D. J., & Hughes, P.C. (1993). Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(1), 103–110.
- Mead, D.J., & Markus, S. (1969). The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 83(3), 363–377.
- Megson, T.H.G. (1996). *Structural and stress analysis*. Bodmin: Butterworth-Heinemann.
- Menard, K.P. (1999). *Dynamic mechanical analysis: a practical introduction*. Boca Raton: CRC Press.
- Miller, K.S., & Ross, B. (1993). *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*. New York: John Wiley & sons.
- Moler, C.B., & Stewart, G.W. (1973). An algorithm for generalized matrix eigenvalue problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(2), 241–256.
- Muller, P. (2005). Are the eigensolutions of a 1-d.o.f. system with viscoelastic damping oscillatory or not? *Journal of Sound and Vibration*, 285(1–2), 501–509.

- Murthy, D.V., & Haftka, R.T. (1988). Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of a general complex matrix. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(9), 293–311.
- Myklestad, N.O. (1952). The concept of complex damping. *Journal of Applied Mechanics*, 19, 284–288.
- Nashif, A.D., Jones, D.I.G., & Henderson, J.P. (1985). *Vibration damping*. New York: John Wiley & sons.
- Nelder, J.A., & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7, 308–313.
- Nelson, R.N. (1976). Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, 14(9), 1201–1205.
- Newmark, N.M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Engineering mechanics division*, v. 85, pp. 67–93.
- Nutting, P.G. (1921). A new general law of deformation. *Journal of the Franklin Institute*, 191, 679–685.
- Oberst, H., & Frankenfeld, K. (1952). Über die Dämpfung Biegeschwingungen Dunner Blech Durch fest Haftende Belage. *Acustica*, 4, 184–194.
- Oldham, K.B., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus*. New York: Academic Press.
- Ouis, D. (2003). Combination of a standard viscoelastic model and fractional derivative calculus to the characterization polymers. *Materials Research Innovations.*, 7(1), 42–46.
- Özgülven, H.N. (2002). Twenty years of computational methods for harmonic response analysis of non-proportionally damped systems. *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, pp. 390–396.
- Padovan, J. (1987). Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics*, 2(4), 271–287.

- Park, S.W. (2001). Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45), 8065-8092.
- Perkin Elmer. Disponible en: <http://www.perkinelmer.com>.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press.
- Pritz, T. (1996). Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 195(1), 103-115.
- Pritz, T. (2003). Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5), 935-952.
- Rao, M.D. (2003). Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. *Journal of Sound and Vibration*, 262(3), 457-474.
- Rao, Y.V.K.S., & Nakra, B.C. (1974). Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 34(3), 309-326.
- Rayleigh, J.W.S. (1877). *Theory of sound* (2 volúmenes). New York: Dover Publications. 2ª edición en 1945.
- Reddy, J.N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2), 745-752.
- Ross, D., Ungar, E.E., & Kerwin, E.M. Jr. (1959). Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate. *Structural Damping*, 49-88. New York: ASME.
- Ruge, P. (1998). Eigenvalues of damped structures: vector iteration in the original space of DOF. *Computational Mechanics*, 22(2), 167-173.
- Saad, Y. (1992). *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. John Wiley & sons. Disponible en:
<http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>.

- Salençon, J. (2001). *Mécanique des milieux continus*. Palaiseau, Francia: Éditions de l'École Polytechnique.
- Schmidt, A., & Gaul, L. (2002). Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 37-55.
- Schmidt, A., & Gaul, L. (2006a). On a critique of a numerical scheme for the calculation of fractionally damped dynamical systems. *Mechanics Research Communications*, 33(1), 99-107.
- Schmidt, A., & Gaul, L. (2006b). On the numerical evaluation of fractional derivatives in multi-degree-of-freedom systems. *Signal Processing*, 86(10), 2592-2601.
- Soni, M.L. (1981). Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 51(2), 97-108.
- Soni, M.L., & Bogner, F.K. (1982). Finite element vibration analysis of damped structures. *AIAA Journal*, 20(5), 700-707.
- Sorensen, D.C. (1992). Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13(1), 357-385.
- Soundown Corporation. Disponible en: <http://www.soundown.com>.
- Stankovik, B., & Atanackovik, T.M. (2002). Dynamics of a rod made of generalized Kelvin-Voigt visco-elastic material. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 268(2), 550-563.
- Subramanian, S., Surampudi, R., Thomson, K.R., & Vallurupalli, S. (2004). Optimization of damping treatments for structure borne noise reduction. *Sound & Vibration*, 38(9), 14-17.
- Sun, C.T., & Lu, Y.P. (1995). *Vibration damping of structural elements*. New Jersey: Prentice Hall.
- TA Instruments. Disponible en: <http://www.tainstruments.com>.

- Teng, T.L., & Hu, N.K. (2001). Analysis of damping characteristics for laminated beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(29–30), 3881–3892.
- Timoshenko, S.P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for the transverse vibration of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41, 744–746.
- Tomlinson, G.R. (2001). SD 2000 State of the art review: damping. D.J. Ewins y D.J. Inman (Eds.), *Structural dynamics @ 2000: current status and future directions*. Philadelphia: Research Studies Press.
- Torvik, P.J., & Bagley, R.L. (1984). On the appearance of fractional derivative in the behaviour of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2), 294–298.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A., & Ohayon, R. (2000). Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122(2), 169–174.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A., & Ohayon, R. (2001). Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams. Part 1: formulation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 51(7), 835–854.
- Turner, S. (2^a ed.) (1983). *Mechanical testing of plastic*. Harlow: G. Godwin.
- Wang, B.P. (1991). Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics. *AIAA Journal*, 29(6), 1018–1020.
- Wang, C.M., Reddy, J.N., & Lee, K.H. (2000). *Shear deformable beams and plates*. Kidlington: Elsevier Science Ltd.
- Wang, G. (2001). *Analyses of sandwich beams and plates with viscoelastic cores*. Tesis doctoral: Faculty of the Graduate School of The University of Maryland.

- Ward, I.M., & Hadley D.W. (1993). *An introduction to the mechanical properties of polymers*. Chichester, Gran Bretaña: John Wiley & sons.
- Wardle Storeys (Blackburn) Ltd. Disponible en: <http://www.wsbl.co.uk>.
- Wilson, E.L. (1962). Dynamic response by step-by-step matrix analysis, *Proceedings, Symposium On The Use of Computers in Civil Engineering*, Labortorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, October 1-5.
- Wilson, E.L., Farhoomand, I., & Bathe, K.J. (1973). Non-linear dynamic analysis of complex structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, 241-252.
- Yang, M.J., & Dowell, E.H. (1972). Governing equations for vibrating constrained-layer damping of sandwich beams and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4), 1041-1046.
- Yuan, L., & Agrawal, O.P. (2002). A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124(2), 321-324.
- Zener, C. (1948). *Elasticity and anelasticity of metals*. Chicago: Chicago University Press.
- Zhang, O., & Zerva, A. (1996). Iterative method for calculating derivatives of eigenvectors, *AIAA Journal*, 34(5), 1088-1090.
- Zienkiewicz, O.C., & Taylor, R.L. (2004). *El método de los elementos finitos* (5ª ed.). Barcelona: CIMNE.