

MONDRAGON UNIBERTSITATEA  
MONDRAGON GOI ESKOLA POLITEKNIKOA

**CONTROL ACTIVO ACÚSTICO  
ESTRUCTURAL EN ESTRUCTURAS  
CON ALTA RIGIDEZ MEDIANTE  
MATERIALES INTELIGENTES**

**Tesis Doctoral**

Aitziber Aizpuru Nazabal

Ingeniera Industrial por la Universidad de Navarra

Mayo de 2008



*Josebari*  
*eta*  
*gure txikiari*



# Eskerrak

Ondorengo pertsona eta instituzioei eskerrak eman nahi nizkieke tesi hau egiterakoan eskeinitako laguntzagatik.

José Manuel Abeteri tesia egiteko aukeragatik.

Ander Etxeberriri eskerrak eman nahi nizkieke bere zuzenketengatik.

Mondragon Goi Eskola Politeknikoari eta Mekanika Departamentuko kide guztiei, bereziki, María Jesús Elejabarrietari eta Unai Galfarsorori.

Nire doktoregai kideei, Laurentzi Aretxabaleta, Mikel Urtxegi eta María Arroyo. Kide berriei ere, Imanol Flores eta Javier Zurbitu.

Ikerlan eta CEIT-eko mekanika sailei abentura honetako azken eta hasierako bultzadagatik eskerrak eman nahi dizkiet ere.

Nire eskerrik beroena nire familiako kideei, nire gurasoei, Miguel eta Inaxiri, eta nire neba eta aizpari, Aitor eta Ainhoari. Nire eskerrik beroena ere nire senar Josebari, nire tesia sufritzeagatik eta beti beregan izan dudana laguntzagatik.

---

*Agradecimientos: Me gustaría agradecer a las siguientes personas e instituciones la ayuda ofrecida en la realización de esta tesis. A José Manuel Abete por la oportunidad de hacer la tesis. A Ander Etxeberria me gustaría darle las gracias por sus correcciones. A Mondragon Goi Eskola Politeknikoa y a todos los compañeros del Departamento de Mecánica, en especial a María Jesús Elejabarrieta y a Unai Galfarsoro. A mis compañeros de doctorado, Laurentzi Aretxabaleta, Mikel Urtxegi y María Arroyo. También a los nuevos compañeros, Imanol Flores y Javier Zurbitu. Agradezco también a los departamentos de mecánica de Ikerlan y del CEIT su empujón al final y al principio de esta aventura, respectivamente. Mi más cálido agradecimiento a los miembros de mi familia, mis padres, Miguel e Inaxi, y a mis hermanos, Aitor y Ainhoa. Mi más cálido agradecimiento también a mi marido Joseba, por haber sufrido mi tesis y por la ayuda que siempre he recibido de él.*



# Resumen

En los últimos años la contaminación acústica se ha convertido en una preocupación importante en las sociedades industriales. Un número elevado de los problemas relacionados con los niveles excesivos de ruido se concentra en las áreas industriales, especialmente en aquellas que cuentan con máquinas tales como prensas, punzonadoras, etc.

La aparición de nuevos tipos de actuadores piezoeléctricos de alta densidad de energía y bajo voltaje ofrece una inmejorable oportunidad de aplicar técnicas de *control activo acústico estructural* para reducir el ruido estructural a bajas frecuencias en estructuras con rigidez alta.

El objetivo fundamental de esta tesis es el diseño y la validación experimental de un sistema de control activo acústico estructural para reducir el ruido radiado por los modos de bajo orden en estructuras de alta rigidez con la mayor parte del contorno en condiciones libres empleando actuadores piezoeléctricos. Para ello se han abordado tres tareas importantes: a) El estudio de la influencia de los parámetros del filtro de control de segundo orden de realimentación de la aceleración tanto en los modos que se desean controlar como en los modos no controlados; b) El diseño de un nuevo método de posicionamiento de actuadores y sensores, teniendo en cuenta tanto las leyes de control como los modos no controlados; y c) El desarrollo de una técnica de estabilización, mediante el empleo de sensores *casi-colocalizados*, de los modos no controlados que se puedan inestabilizar con el control de realimentación de la aceleración *no-colocalizado* con un filtro de segundo orden.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto general . . . . .	1
1.2. Control de ruido en máquina herramienta . . . . .	3
1.3. Control activo acústico estructural . . . . .	5
1.4. Objetivos de esta tesis . . . . .	8
1.5. Contenido de la memoria . . . . .	9
<b>2. Control acústico estructural: Estado del arte</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Fundamentos teóricos . . . . .	11
2.2.1. Fundamentos de vibración . . . . .	12
2.2.2. Fundamentos de radiación . . . . .	18
2.3. Técnicas de control acústico estructural . . . . .	30
2.3.1. Control pasivo . . . . .	31
2.3.2. Control semiactivo . . . . .	31
2.3.3. Control activo . . . . .	32
2.3.4. Absorbedores de vibración . . . . .	33
2.4. Componentes principales de un sistema de control . . . . .	34
2.4.1. Leyes de control . . . . .	34
2.4.2. Actuadores . . . . .	39
2.4.3. Sensores . . . . .	45
2.5. Optimización del sistema de control . . . . .	50
2.5.1. Posicionamiento del actuador y del sensor . . . . .	50

2.5.2. Diseño del controlador: sintonía de parámetros . . . . .	54
2.6. Estabilidad del sistema de control . . . . .	57
2.7. Análisis modal del sistema controlado . . . . .	61
2.7.1. Análisis modal del sistema original . . . . .	61
2.7.2. Análisis modal de la estructura controlada . . . . .	63
2.8. Aplicación del CAAE en una viga empotrada libre . . . . .	66
2.8.1. Respuesta vibratoria de una viga continua empotrada libre . . . . .	66
2.8.2. Modos de vibración de un sistema discreto . . . . .	74
2.8.3. Eficiencias de radiación . . . . .	74
2.8.4. Posicionamiento óptimo con el método de Gawronski . . . . .	77
2.8.5. Control de realimentación de segundo orden . . . . .	79
2.8.6. Sintonía del controlador <i>AFC</i> de 2° orden: Técnica del <i>punto de corte</i> . . . . .	82
2.8.7. Resultados vibroacústicos . . . . .	83
2.9. Conclusiones . . . . .	90
2.10. Aplicación del CAAE en una viga empotrada libre . . . . .	92
2.10.1. Respuesta vibratoria de una viga continua empotrada libre . . . . .	92
2.10.2. Modos de vibración de un sistema discreto . . . . .	100
2.10.3. Eficiencias de radiación . . . . .	100
2.10.4. Posicionamiento óptimo con el método de Gawronski . . . . .	103
2.10.5. Control de realimentación de segundo orden . . . . .	107
2.10.6. Sintonía del controlador <i>AFC</i> de 2° orden: Técnica del <i>punto de corte</i> . . . . .	108
2.10.7. Resultados vibroacústicos . . . . .	111
2.11. Conclusiones . . . . .	116
<b>3. Optimización del control modal <i>no-colocalizado</i></b> . . . . .	<b>119</b>
3.1. Introducción . . . . .	119
3.2. Descripción del modelo de la viga empotrada libre . . . . .	120
3.3. Diseño del controlador: Técnica del <i>punto de corte</i> . . . . .	121
3.3.1. La técnica del <i>punto de corte</i> . . . . .	121
3.3.2. Estudio de la influencia de los modos no controlados . . . . .	125

---

3.3.3.	Influencia de los parámetros del controlador en los espectros de vibraciones y de ruido . . . . .	132
3.4.	Posicionamiento óptimo . . . . .	146
3.4.1.	Posicionamiento de actuador y sensor: Técnica de Gawronski . . . . .	146
3.4.2.	Posicionamiento óptimo basado en los polos en lazo cerrado . . . . .	151
3.4.3.	Comparación de las dos técnicas de posicionamiento óptimo . . . . .	165
3.5.	Conclusiones . . . . .	166
<b>4.</b>	<b>Métodos de estabilidad del control modal <i>no-colocalizado</i></b> . . . . .	<b>169</b>
4.1.	Introducción . . . . .	169
4.1.1.	Descripción del modelo de la viga empotrada libre con el actuador, el sensor y el sistema de control <i>no-colocalizado</i> . . . . .	170
4.2.	Estudio de la estabilidad del control <i>no-colocalizado</i> . . . . .	171
4.2.1.	Sistema representado por tres modos . . . . .	172
4.2.2.	Limitación del control modal <i>no-colocalizado</i> con un actuador y un sensor . . . . .	181
4.3.	Estabilidad del sistema controlado . . . . .	181
4.3.1.	Método del sensor <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	186
4.3.2.	Método del sensor <i>colocalizado</i> . . . . .	195
4.4.	Conclusiones . . . . .	206
<b>5.</b>	<b>Resultados experimentales</b> . . . . .	<b>207</b>
5.1.	Introducción . . . . .	207
5.2.	Viga empotrada libre . . . . .	208
5.2.1.	Descripción de la plataforma de ensayo . . . . .	208
5.2.2.	Experimentos en la plataforma de ensayo de la viga empotrada libre . . . . .	212
5.2.3.	Resultados del control activo acústico estructural . . . . .	230
5.3.	Aplicación en una maqueta del bastidor de una punzonadora . . . . .	242
5.3.1.	Introducción . . . . .	242
5.3.2.	Descripción de la plataforma de ensayo . . . . .	243
5.3.3.	Ajuste de parámetros . . . . .	248
5.4.	Resultados estructurales y acústicos con control . . . . .	261

5.5. Conclusiones . . . . .	264
<b>6. Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>267</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	268
6.2. Futuras líneas de investigación . . . . .	269
<b>Bibliografía</b>	<b>271</b>

# Índice de figuras

2.1. FRF de un sistema <i>colocalizado</i> . . . . .	17
2.2. FRF de un sistema <i>no-colocalizado</i> . . . . .	18
2.3. Sistema de coordenadas en una placa dentro de un deflector infinito .	21
2.4. Zona subsónica y supersónica . . . . .	22
2.5. Eficiencias de radiación . . . . .	23
2.6. Distribución de velocidad de los seis primeros modos de radiación en una placa rectangular . . . . .	25
2.7. Estructuras inteligentes . . . . .	32
2.8. Tipos de controles activos . . . . .	33
2.9. Principios del control <i>feedback</i> . . . . .	34
2.10. Filtros de control de primer y segundo orden . . . . .	36
2.11. Principio del control <i>feedforward</i> . . . . .	37
2.12. Principio del control <i>feedforward</i> adaptativo . . . . .	37
2.13. Actuador piezoeléctrico situado paralelamente a la viga . . . . .	44
2.14. Sistema <i>colocalizado</i> (a) y sistema <i>no-colocalizado</i> (b) . . . . .	51
2.15. Mapa de polos y ceros de un sistema <i>colocalizado</i> (a) y de otro <i>no-colocalizado</i> (b) . . . . .	51
2.16. FRF $\left(\frac{\ddot{x}}{F}\right)$ de un sistema <i>colocalizado</i> (a) y de uno <i>no-colocalizado</i> (b)	52
2.17. Sistema <i>colocalizado</i> . . . . .	57
2.18. Control <i>colocalizado</i> . . . . .	58
2.19. Sistema <i>no-colocalizado</i> . . . . .	58
2.20. Control <i>no-colocalizado</i> . . . . .	59
2.21. Elemento diferencia de la viga empotrada libre con un momento . . .	67

2.22. Viga empotrada libre con un momento aplicado . . . . .	68
2.23. FRF <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> (un momento aplicado) . . . . .	72
2.24. Viga empotrada libre con dos momentos aplicados . . . . .	72
2.25. FRF <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> (dos momentos aplicados) . . . . .	74
2.26. Modelo de elementos finitos de la viga empotrada libre . . . . .	74
2.27. Primeros dos modos de flexión . . . . .	75
2.28. Tercer y cuarto modos de flexión . . . . .	75
2.29. Modos de vibración y transformación al dominio de número de onda . . . . .	76
2.30. Eficiencias de radiación . . . . .	77
2.31. Posiciones posibles de actuadores y sensores . . . . .	79
2.32. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el primer modo . . . . .	80
2.33. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el segundo modo . . . . .	80
2.34. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el tercer modo . . . . .	80
2.35. Diagrama de bloques AFC . . . . .	81
2.36. FRF y lugar geométrico de las raíces del primer modo . . . . .	84
2.37. FRF y lugar geométrico de las raíces del segundo modo . . . . .	84
2.38. FRF y lugar geométrico de las raíces del tercer modo . . . . .	84
2.39. FRF del modelo de cinco modos . . . . .	85
2.40. Primer modo de flexión con y sin control . . . . .	86
2.41. Segundo modo de flexión con y sin control . . . . .	86
2.42. Tercer modo de flexión con y sin control . . . . .	86
2.43. Directividad del primer modo de flexión . . . . .	88
2.44. Directividad del segundo modo de flexión . . . . .	88
2.45. Directividad del tercer modo de flexión . . . . .	88
2.46. Radiación del primer modo de flexión . . . . .	89
2.47. Radiación del segundo modo de flexión . . . . .	89
2.48. Radiación del tercer modo de flexión . . . . .	89
2.49. Elemento diferencia de la viga empotrada libre con un momento . . . . .	92
2.50. Viga empotrada libre con un momento aplicado . . . . .	94
2.51. FRF <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> (un momento aplicado) . . . . .	98
2.52. Viga empotrada libre con dos momentos aplicados . . . . .	98

2.53. FRF <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> (dos momentos aplicados) . . . . .	100
2.54. Modelo de elementos finitos de la viga empotrada libre . . . . .	100
2.55. Primeros dos modos de flexión . . . . .	101
2.56. Tercer y cuarto modos de flexión . . . . .	101
2.57. Modos de vibración y transformación al dominio de número de onda .	102
2.58. Eficiencias de radiación . . . . .	103
2.59. Posiciones posibles de actuadores y sensores . . . . .	105
2.60. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el primer modo . . . . .	106
2.61. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el segundo modo . . . . .	106
2.62. Posiciones óptimas de actuador y sensor para el tercer modo . . . . .	106
2.63. Diagrama de bloques AFC . . . . .	107
2.64. FRF y lugar geométrico de las raíces del primer modo . . . . .	110
2.65. FRF y lugar geométrico de las raíces del segundo modo . . . . .	110
2.66. FRF y lugar geométrico de las raíces del tercer modo . . . . .	110
2.67. FRF del modelo de cinco modos . . . . .	111
2.68. Primer modo de flexión con y sin control . . . . .	113
2.69. Segundo modo de flexión con y sin control . . . . .	113
2.70. Tercer modo de flexión con y sin control . . . . .	113
2.71. Directividad del primer modo de flexión . . . . .	114
2.72. Directividad del segundo modo de flexión . . . . .	114
2.73. Directividad del tercer modo de flexión . . . . .	114
2.74. Radiación del primer modo de flexión . . . . .	115
2.75. Radiación del segundo modo de flexión . . . . .	115
2.76. Radiación del tercer modo de flexión . . . . .	115
3.1. Modelo físico de la viga empotrada libre . . . . .	120
3.2. Modelo de elementos finitos de la viga empotrada libre . . . . .	121
3.3. Viga empotrada libre con actuador y sensor modelizados idealmente .	121
3.4. Diagrama de bloques del control de realimentación de la aceleración .	122
3.5. Variación de la frecuencia del <i>punto de corte</i> y de los amortiguamientos relativos en función del número de modos . . . . .	128

3.6. Polos en lazo cerrado del modo controlado y del controlador en función del número de modos . . . . .	128
3.7. FRF-s en lazo cerrado con diferente número de modos; solo se ha representado en el rango del primer modo ( $g=10$ ) . . . . .	129
3.8. FRF-s del cero y de la multiplicación del polo del modo por el del controlador . . . . .	131
3.9. FRF-s de los dos polos y de la multiplicación de los dos polos con el cero	131
3.10. Variación de la frecuencia del <i>punto de corte</i> y de los amortiguamientos relativos . . . . .	134
3.11. Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación de la frecuencia natural . . . . .	134
3.12. FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores de estimación . . . . .	136
3.13. FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores extremos de estimación	136
3.14. Variación de la frecuencia del <i>punto de corte</i> y de los amortiguamientos relativos en función del error cometido en el amortiguamiento relativo	138
3.15. Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación del amortiguamiento relativo . . . . .	138
3.16. FRF-s en lazo cerrado para el error de subestimación del amortiguamiento relativo de 90% . . . . .	139
3.17. Variación de la frecuencia del <i>punto de corte</i> y de los amortiguamientos relativos en función del error cometido en el residuo . . . . .	141
3.18. Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación del residuo . . . . .	141
3.19. FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores de estimación del residuo y del sistema original sin control . . . . .	142
3.20. FRF-s con un error del residuo de +90%, -90%, sin error y del sistema original sin control . . . . .	142
3.21. FRF-s del sistema original sin control y con control con un error de subestimación de 100% . . . . .	143
3.22. Posición del micrófono para la medida de radiación . . . . .	144
3.23. Presión sonora con diferentes parámetros del controlador . . . . .	145
3.24. Actuador y sensor en una de las posibles posiciones . . . . .	146
3.25. Posibles posiciones de sensor y de actuador en una viga . . . . .	148
3.26. Posicionamiento óptimo de actuador y sensor del modo 1 . . . . .	149
3.27. Posicionamiento óptimo de actuador y sensor de los modos 2, 3 y 4 . .	150



3.28. Comandos de ABAQUS para la obtención de $[M]$ y $[K]$ . . . . .	153
3.29. Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con $g = 1$ . (* indica el modo controlado) . . . . .	156
3.30. Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con $g = 10$ . (* indica el modo controlado) . . . . .	157
3.31. Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con $g = 20$ . (* indica el modo controlado) . . . . .	158
3.32. Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos en la posición (3-27) . . . . .	160
3.33. Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos en la posición (7-27) . . . . .	160
3.34. Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el segundo modo con $g = 1$ . (* indica el modo controlado) . . . . .	162
3.35. Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos para las posiciones (7-27) y (17-27) . . . . .	163
3.36. Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el tercer modo con $g = 0,1$ . (* indica el modo controlado) . . . . .	164
3.37. Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos para las posiciones (9-27) y (21-27) . . . . .	165
4.1. Modelo de viga empotrada libre con un actuador . . . . .	170
4.2. Esquema del modelo de viga empotrada libre con un actuador . . . . .	170
4.3. FRF entre el actuador y el sensor . . . . .	172
4.4. Diagrama de bloques del sistema representado mediante tres modos . . . . .	173
4.5. Diagrama de bloques de cada uno de los modos . . . . .	175
4.6. Viga empotrada libre con actuador y el sensor en el extremo libre . . . . .	175
4.7. FRF-s en lazo abierto y lugar geométrico de las raíces de los tres primeros modos, controlando el segundo modo con $g = 2$ . . . . .	176
4.8. Respuestas en lazo abierto a una entrada sinusoidal . . . . .	177
4.9. FRF-s y representación de los polos y ceros del sistema controlado representado por tres modos . . . . .	178

4.10. FRF-s en lazo abierto y lugar geométrico de las raíces de los tres primeros modos, controlando el segundo modo con $g = 3$ . . . . .	179
4.11. Respuestas en lazo abierto a una entrada sinusoidal . . . . .	180
4.12. Representación de los polos y ceros del sistema controlado . . . . .	180
4.13. Representación de un sistema de control con un actuador y dos sensores	182
4.14. Diagrama de bloques del sistema representado mediante $n$ modos . . .	184
4.15. Diagrama de bloques de cada uno de los modos con dos controles . . .	184
4.16. Posiciones posibles del sensor <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	186
4.17. Signo del residuo en función de la posición del sensor y del modo . . .	187
4.18. Viga empotrada libre con un actuador y dos sensores . . . . .	188
4.19. FRF entre el actuador y el sensor <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	188
4.20. FRF en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer modo; controlando el segundo modo con $g = 3$ y el tercero con $g = 0,03$	189
4.21. FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con $g = 3$ y el tercero con $g = 0,03$ . . . . .	190
4.22. FRF-s y representación de los polos y ceros de la viga con control SIMO	191
4.23. Lugar geométrico de las raíces del control <i>no-colocalizado</i> , y polos de funcionamiento del control <i>no-colocalizado</i> y del <i>no-colocalizado</i> + el <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	192
4.24. FRF-s de los filtros de control sobre el tercer modo en el caso de <i>no-colocalizado</i> y en el caso de <i>no-colocalizado</i> + <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	192
4.25. FRF-s del actuador y de los dos sensores . . . . .	194
4.26. FRF del sistema <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	194
4.27. Lugar geométrico de las raíces del sistema <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	194
4.28. Actuador piezoeléctrico y sensor <i>colocalizado</i> . . . . .	195
4.29. Esquema de actuador piezoeléctrico y sensor <i>colocalizado</i> . . . . .	195
4.30. FRF de la resta de los dos acelerómetros con respecto al actuador . . .	196
4.31. Actuador piezoeléctrico y sensores <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> . . .	196
4.32. FRF en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer modo, controlando el segundo modo con $g = 3$ y el tercero con $g = 0,065$	197
4.33. FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con $g = 3$ y el tercero con $g = 0,065$ . . . . .	198
4.34. FRF-s y representación de los polos y ceros de la viga con control SIMO	199

4.35. Lugar geométrico de las raíces del control <i>colocalizado</i> . . . . .	200
4.36. FRF-s de los filtros de control sobre el tercer modo en el caso de <i>no-colocalizado</i> y en el caso de <i>no-colocalizado + colocalizado</i> . . . . .	200
4.37. FRF del filtro de control de primer orden . . . . .	201
4.38. FRF-s y lugar de las raíces del control <i>colocalizado</i> . . . . .	202
4.39. FRF en lazo abierto y representación de polos y ceros del tercer modo	202
4.40. FRF-s del sistema controlado y representación de polos y ceros del sistema controlado . . . . .	203
4.41. FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con $g = 3$ y el tercero con $g = 1,2$ . . . . .	204
4.42. Lugar geométrico de las raíces del control <i>no-colocalizado</i> . . . . .	205
5.1. Plano de los bloques de unión del actuador con la viga . . . . .	209
5.2. Viga empotrada libre con el actuador y los dos sensores <i>no-colocalizado</i> y <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	210
5.3. Posición de los dos sensores en los dos bloques del actuador . . . . .	210
5.4. Esquema general de los experimentos en la viga empotrada libre . . .	210
5.5. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> . . . .	211
5.6. Esquema de la viga con actuador y sensor <i>no-colocalizado</i> . . . . .	212
5.7. FRF entre la aceleración del sensor 1 y la tensión empleada en el actuador	213
5.8. Parte real y parte imaginaria de las FRF-s entre el actuador y el sensor <i>no-colocalizado</i> . . . . .	214
5.9. FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control <i>no-colocalizado</i> con una subestimación del residuo de 80 % . . . . .	215
5.10. FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control <i>no-colocalizado</i> con una subestimación del residuo de 100 % . . . . .	216
5.11. FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control <i>no-colocalizado</i> con una ganancia de 1,5 . . . . .	218
5.12. Respuestas temporales del sensor 1, excitando a las frecuencias naturales del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del segundo modo . . . . .	219
5.13. Esquema de la viga con el actuador y los sensores <i>no-colocalizado</i> y <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	220
5.14. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> y estabilización <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	220

5.15. FRF entre el actuador y el sensor 2 . . . . .	221
5.16. FRF con y sin control entre el sensor 1 y el actuador con control <i>no-colocalizado</i> y <i>casi-colocalizado</i> . . . . .	221
5.17. Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias naturales del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del segundo modo y <i>casi-colocalizado</i> del tercer modo . . . . .	223
5.18. Posición de los dos sensores en los dos bloques del actuador . . . . .	224
5.19. Función de transferencia de la suma de los dos sensores con respecto al actuador . . . . .	224
5.20. Esquema de la viga con el actuador y los sensores <i>no-colocalizado</i> y <i>colocalizado</i> . . . . .	225
5.21. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> y estabilización <i>colocalizado</i> . . . . .	226
5.22. Función de transferencia entre el actuador y sensor 1 sin y con control <i>no-colocalizado</i> y con la suma de los dos acelerómetros . . . . .	227
5.23. Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> y con la suma de los dos acelerómetros . . . . .	227
5.24. Función de transferencia de la suma de los dos sensores con respecto al actuador con y sin control . . . . .	228
5.25. Respuesta temporal de la suma de los dos acelerómetros 3 y 4, excitando a la frecuencia de 2592 Hz sin y con control . . . . .	229
5.26. Espectro de ruido radiado por la viga empotrada libre en un rango de 0 a 3200 Hz . . . . .	230
5.27. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> del tercer modo . . . . .	231
5.28. FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador controlando el tercer modo . . . . .	232
5.29. Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del tercer modo . . . . .	232
5.30. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> del tercer modo y estabilización del segundo modo . . . . .	234
5.31. FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador con control <i>no-colocalizado</i> del tercer y segundo modos . . . . .	235

5.32. Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del tercer y segundo modos . . . . .	236
5.33. Diagrama de bloques de SIMULINK del control <i>no-colocalizado</i> del tercer modo y estabilización del segundo, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos . . . . .	237
5.34. FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador con control <i>no-colocalizado</i> del segundo y tercer modos y con control <i>casi-colocalizado</i> del cuarto, quinto, sexto y séptimo modos . . . . .	238
5.35. Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del segundo y tercer modo y <i>casi-colocalizado</i> del cuarto, quinto, sexto y séptimo modos . . . . .	239
5.36. Espectro de ruido radiado por la viga empotrada libre, con y sin control, en un rango de 0 a 3200 Hz . . . . .	241
5.37. Respuesta temporal del ruido emitido por la viga, excitándola a la frecuencia natural del tercer modo, con y sin control . . . . .	241
5.38. Esquema del proceso de punzonado . . . . .	242
5.39. Banco de ensayos del bastidor de la punzonadora . . . . .	243
5.40. Espectro de ruido del modelo del bastidor excitando con el punzón . . . . .	245
5.41. Posiciones posibles de actuadores y sensores en el modelo del bastidor . . . . .	246
5.42. Actuador orientado según el eje X o el eje Y . . . . .	246
5.43. Posiciones óptimas de actuadores y sensores en el modelo del bastidor . . . . .	247
5.44. Experimento del modelo del bastidor para el ajuste de parámetros . . . . .	248
5.45. Diagrama de bloques de control para ajuste de parámetros . . . . .	249
5.46. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 2, con y sin control, del modo de 375 Hz . . . . .	250
5.47. Respuestas temporales del sensor 2, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 375 Hz, con y sin control . . . . .	250
5.48. FRF entre el actuador 1 y el sensor 3 . . . . .	251
5.49. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 2, con y sin control, de los modos de 375 Hz y de 346,3 Hz con dos sensores . . . . .	252
5.50. Respuestas temporales del sensor 2, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 375 Hz, con y sin control, con dos sensores . . . . .	252
5.51. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,1 Hz . . . . .	254

5.52. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 461,3 Hz . . . . .	254
5.53. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 526,3 Hz . . . . .	255
5.54. FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 616,3 Hz . . . . .	255
5.55. Respuestas temporales del sensor 1, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz, 461,3 Hz, 526,3 Hz y 616,3 Hz, con y sin control	256
5.56. FRF-s entre el actuador 2 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,3 Hz . . . . .	258
5.57. FRF-s entre el actuador 2 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 461,3 Hz . . . . .	258
5.58. Respuestas temporales del sensor 1 excitando con el actuador 2 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz, con y sin control, con dos sensores	259
5.59. FRF-s entre el actuador 3 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,3 Hz . . . . .	260
5.60. FRF-s entre el actuador 3 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 412 Hz . . . . .	260
5.61. Respuestas temporales del sensor 1, excitando con el actuador 3 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz, con y sin control, con dos sensores	261
5.62. Experimento del modelo del bastidor de la punzonadora . . . . .	262
5.63. Diagrama de bloques de SIMULINK para el control del modelo del bastidor . . . . .	262
5.64. Espectro de vibraciones en el sensor 1, con y sin control, excitando el modelo con el punzón . . . . .	263
5.65. Espectro de vibraciones en el sensor 2, con y sin control, excitando el modelo con el punzón . . . . .	263
5.66. Espectro de ruido, con y sin control, excitando el modelo con el punzón	264

# Índice de tablas

2.1. Comparación de estrategias de control . . . . .	39
2.2. Comparación entre algunos materiales empleados en actuadores . . . . .	45
2.3. Comparación entre los métodos de ajuste de los parámetros de los controles de realimentación de la aceleración de filtros de segundo orden . . . . .	56
2.4. Frecuencias naturales y amortiguamientos sin control y parámetros del controlador . . . . .	83
2.5. Frecuencias naturales y amortiguamientos sin control y parámetros del controlador . . . . .	109
3.1. Parámetros de la viga . . . . .	120
3.2. Datos para calcular los parámetros del filtro de forma selectiva: parámetros modales del primer modo . . . . .	126
3.3. Parámetros del filtro para el control de primer modo calculando de forma selectiva . . . . .	126
3.4. Polos de funcionamiento con un modo ( $g = 10$ ), con subestimación y sobreestimación, ambos del 90 % de la frecuencia natural . . . . .	134
3.5. Polo y cero en lazo cerrado con una sobreestimación de 90 % . . . . .	135
3.6. Polo de funcionamiento con un modo ( $g=10$ ) . . . . .	138
3.7. Polo y cero en lazo cerrado con una subestimación de 90 % . . . . .	139
3.8. Polo de funcionamiento con un modo ( $g=10$ ) . . . . .	141
3.9. Polos y cero en lazo cerrado con una subestimación de 100 % . . . . .	143
3.10. Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos en la posición (3-27) . . . . .	160
3.11. Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos en la posición (7-27) . . . . .	160

3.12. Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos para las posiciones (7-27) y (17-27) . . . . .	163
3.13. Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos para las posiciones (9-27) y (21-27) . . . . .	165
4.1. Polo de funcionamiento de los tres primeros modos de flexión y del filtro de control con control SISO . . . . .	178
4.2. Polo de funcionamiento de los tres primeros modos de flexión y del filtro de control con control SISO . . . . .	180
4.3. Polo de funcionamiento del tercer modo con control SIMO . . . . .	189
4.4. Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO . . . . .	191
4.5. Polo de funcionamiento del tercer modo con control SIMO ( <i>colocalizado</i> )	197
4.6. Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO ( <i>colocalizado</i> ) . . . . .	199
4.7. Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO . . . . .	203
5.1. Parámetros modales del segundo modo estimados experimentalmente .	214
5.2. Parámetros del filtro de control del segundo modo con un error de subestimación del residuo de 80% . . . . .	214
5.3. Frecuencia y amortiguamiento relativo de los dos picos que aparecen cerca del modo controlado . . . . .	215
5.4. Frecuencia y amortiguamiento relativo de los dos picos que aparecen cerca del modo controlado . . . . .	216
5.5. Parámetros del filtro de control del segundo modo con datos experimentales . . . . .	217
5.6. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> . . . . .	218
5.7. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> y <i>casi-colocalizado</i>	222
5.8. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> y con la suma de los dos acelerómetros . . . . .	227
5.9. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del modo a 2592 Hz sin y con control de primer orden . . . . .	229
5.10. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del tercer modo	233



---

5.11. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del tercer y segundo modos . . . . .	235
5.12. Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control <i>no-colocalizado</i> del tercer y segundo modos . . . . .	238
5.13. Parámetros del análisis modal . . . . .	245
5.14. Variación de la amplitud con y sin control del par actuador 1 y sensor 2	251
5.15. Variación de la amplitud con y sin control del par actuador 1 y sensor 2	252
5.16. Parámetros de los filtros de control del par actuador 1 y sensor 1 . . .	253
5.17. Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 1 y sensor 1	256
5.18. Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 2 y sensor 1	257
5.19. Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 3 y sensor 1	259



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto general

La contaminación acústica se ha convertido en un problema que suscita una preocupación creciente en las sociedades modernas. Dicha contaminación se manifiesta produciendo molestias, disminución del confort, distracción, e incluso, en niveles altos y tiempos de exposición prolongados puede ocasionar problemas de salud tanto en entornos laborales, domésticos como urbanos. Un número elevado de estos problemas relacionados con niveles excesivos de ruido se concentra en las áreas industriales, especialmente en aquellas que cuentan con máquinas de mecanizado de impacto con alta velocidad de deformación y corte. La estructura de este tipo de máquinas se caracteriza habitualmente por presentar una alta rigidez. Esto se debe a que en las máquinas herramienta es necesario conseguir altos niveles de precisión, para lo cual sus estructuras deben ofrecer unos niveles de deformación muy reducidos.

En el entorno industrial el ruido es producido, por una parte, por fuentes locales o primarias (motores, engranajes, cojinetes, ventiladores...) y por otra por el ruido transmitido por la vibración de las estructuras (fuentes secundarias). El ruido emitido por una estructura es percibido por el oyente como un sonido transmitido que es irradiado directamente por la superficie vibratoria o por los objetos que se mueven debido a la vibración de la estructura.

La evaluación del ruido como agente capaz de provocar reducción de confort o dañar la salud está normalizada en todos los países de la Unión Europea por la directiva 2003/10/CE, trasladada al derecho español en el Real Decreto 286/2006 del 11 de Marzo sobre “Protección de la salud y la seguridad de los trabajadores contra los riesgos relacionados con la exposición al ruido”. En virtud de esta normativa, dependiendo del nivel equivalente de ruido, el empresario está obligado a: evaluar la exposición del trabajador al ruido, impartir formación sobre los riesgos a los trabajadores, aplicar medidas preventivas, proporcionar protectores auditivos y control médico, etc. Además, por la citada norma los equipos de trabajo que se comercialicen

deberán ir acompañados de la información sobre el ruido que producen cuando se utilizan en la forma y las condiciones previstas por el fabricante.

Las máquinas de corte y deformación de chapa, tales como las punzonadoras, las plegadoras y las prensas, son claros ejemplos de estructuras especialmente ruidosas. En una operación común las máquinas herramienta de impacto pueden producir una emisión de ruido superior a 100 dB(A) en el área del operario, mientras que en el nuevo Real Decreto el nivel máximo de ruido permitido se restringe a 87 dB(A), el cual en la normativa anterior era de 90 dB(A).

Por todo esto el control del ruido es un tema de trabajo en numerosos estudios e investigaciones en todo el mundo.

Las diferentes técnicas existentes para controlar el ruido emitido por estructuras se pueden agrupar en tres categorías: control del ruido en la fuente, control del ruido en la vía de transmisión y uso de medidas protectoras contra el ruido en el receptor. El método, o combinación de ellos, que se emplee depende de la magnitud de la reducción de ruido requerida, de la complejidad del problema, de la operatividad de la solución y por supuesto de consideraciones económicas.

Los métodos para controlar el ruido en la fuente desde el punto de vista de la generación y transmisión de energía consisten en reducir la energía vibratoria en el origen, por ejemplo mediante el equilibrado de los elementos rotatorios.

El segundo método consiste en controlar la transmisión estructural del ruido en las cercanías de la fuente para que la vibración transmitida al resto de la estructura sea menor. De entre los métodos empleados para reducir la transmisión estructural cabe señalar por su efectividad la utilización de discontinuidades estructurales. Cuando las ondas de vibración se encuentran con una unión en la estructura sólo una parte de la energía vibratoria pasa a través de ella, el resto se refleja en la dirección opuesta a la de la onda incidente. Como resultado hay una reducción en el nivel de vibración al otro lado de la junta y un aumento en el lado próximo a la misma. Así, una optimización de la rigidez y del amortiguamiento de la unión permite controlar el ruido transmitido. No obstante, este tipo de técnicas puede tener el inconveniente de que se pierda la funcionalidad de la unión. En el caso de las máquinas herramienta las uniones son las responsables de la mayor parte del amortiguamiento estructural, pero no pueden presentar grandes deformaciones por los requerimientos de rigidez necesarios para garantizar la precisión de los acabados.

En tercer lugar, la atenuación del ruido debido a la vibración de fuentes secundarias se puede controlar con un tratamiento de amortiguamiento de la vibración en las mayores superficies radiantes o con un material absorbente del ruido radiado. Estas técnicas ofrecen un buen funcionamiento en el rango de medias y altas frecuencias, pero desafortunadamente la gran cantidad de material requerido para reducir el ruido a bajas frecuencias puede hacer la solución impracticable. Este problema se acrecienta en el caso del control a bajas frecuencias de estructuras muy rígidas, como es el caso de las estructuras de máquina herramienta.

Por último se pueden considerar otras medidas protectoras en el receptor allí donde el nivel de ruido es excesivo, como el uso de aparatos de protección del oído, la

instalación de cabinas aisladas, controles periódicos de exposición, etc. La desventaja de estas técnicas es que no resuelven el problema globalmente, sino únicamente la del operario correspondiente.

Las técnicas de reducción de ruido pueden también clasificarse en función del balance de energía acústica y vibratoria del sistema. Así, se denominan *métodos pasivos* a aquellos en los que siempre se regula la disipación de energía en la estructura para reducir el ruido. Por el contrario, los denominados *métodos activos* se caracterizan por poder introducir energía en el sistema a través de las entradas de control, característica que no presentan los métodos pasivos; estas entradas producen una respuesta que se añade a la perturbación primaria. Los métodos activos presentan algunas ventajas sobre los pasivos, como son la capacidad de control a bajas frecuencias y la capacidad de adaptación de las leyes de control ante perturbaciones externas y variaciones del sistema. Por tanto es posible modificar las características de la fuente de control para que el resultado de la respuesta total sea minimizado o alterado de la manera deseada.

Con los avances en el campo de los materiales inteligentes (actuadores y sensores) y el desarrollo de *hardware* de gran potencia de cálculo, tales como los procesadores digitales de señal, los métodos de control activo se han convertido en una alternativa real, aunque todavía de elevado coste, para la eliminación de ruido y vibraciones.

La aparición de nuevos tipos de actuadores piezoeléctricos de alta densidad de energía de bajo voltaje ofrece la oportunidad de romper con las limitaciones anteriores para aplicar técnicas de control vibroacústicas en estructuras rígidas. La aplicación de estas técnicas mediante actuadores piezoeléctricos es un campo de investigación y desarrollo de gran pujanza y con perspectivas muy prometedoras, debido al ancho de banda, control lineal, buena integridad y buena conversión electromecánica (coeficiente de acoplamiento elevado) de los piezoeléctricos. Por ello, la aplicación de técnicas de control activo estructural mediante la utilización de actuadores piezoeléctricos se presenta como una vía prometedora para reducir el ruido estructural en estructuras rígidas.

## 1.2. Control de ruido en máquina herramienta

En un entorno industrial se produce ruido en muchos tipos diferentes de máquinas, aunque las máquinas herramienta constituyen un ámbito de especial preocupación debido a su extensión en todo el ámbito productivo. Entre ellas, las máquinas de arranque de viruta y de conformado son las que generan mayores niveles de ruido. Una de las máquinas herramienta más comunes que puede producir unos niveles de ruido excesivos es la punzonadora, con unos márgenes que varían entre 90 dB(A) y 110 dB(A); tal es así que en la mayoría de las empresas los operarios que las manejan suelen utilizar protectores de oído como medida de salud laboral.

Los principales fuentes de ruido en una máquina herramienta de deformación y corte están asociados con: impactos con el punzón, choques entre metal y metal, operaciones de embrague y frenado, movimientos de carros y vibraciones de las superficies. Su importancia relativa varía de una máquina a otra, e incluso del tipo de

uso que se le dé a dichas máquinas. Las primeras técnicas de control de ruido propuestas (Chee, 1978) en una punzonadora fueron: la absorción de ruido en el espacio, el aislamiento de la máquina y del área del suelo, el aislamiento parcial de partes estructurales de la máquina, la utilización de materiales amortiguantes, cerramientos, barreras entre la máquina y el operador o modificaciones de la herramienta. En estos trabajos concluyeron que con un cerramiento completo de toda la máquina se podría obtener una reducción de ruido de 22 dB(A); la desventaja que presentan estos cerramientos es el espacio adicional requerido, dando lugar a un acceso difícil a la máquina y reduciendo la salida de la producción. En cambio con un cerramiento parcial obtenían una reducción del orden de 10 dB(A), pero todavía era necesaria la utilización de protectores para el oído.

Otra de las aplicaciones de control activo de ruido en maquinaria pesada fue llevada a cabo por Weck (1984) en una prensa. En este caso un cilindro hidráulico absorbía y disipaba la energía almacenada en el sistema después de haber efectuado cada operación de corte.

Otra de las técnicas desarrolladas (Doege y Seidel, 1985) para reducir el ruido en las punzonadoras consistía en eliminar el rápido descenso de la fuerza de ruptura, debido a que una vez cortada la pieza dicha fuerza es transferida a la estructura, la cual responde con una vibración radiando ruido. Con esta técnica, mediante un elemento hidráulico controlado electrónicamente, se obtuvo una reducción de ruido de 10 dB(A).

Richards y Stimpson (1985) realizaron un compendio de las diferentes técnicas que existían para reducir el ruido radiado por una punzonadora. La primera de ellas consistía sencillamente en añadir arena en las cavidades de las partes de la estructura que fueran muy vibrantes; añadiendo esta arena en los sitios adecuados obtuvieron una reducción de ruido de 10 dB(A). Otro de los métodos incidía en el rediseño de la herramienta con el objetivo de reducir el ruido radiado. Estos autores concluyeron que probablemente la mejor técnica para reducir el ruido era la de la modificación del ángulo de la herramienta. Por último ensayaron una técnica de cancelación activa que modificaba mediante un sistema hidráulico el descenso rápido de la fuerza de punzón cuando cortaba la pieza. Concluyeron que esta técnica podría reducir el ruido más de 10 dB, pero que era necesario investigar más a fondo, sobre todo con herramientas más largas y más frágiles.

En los últimos años se han desarrollado nuevas técnicas de control activo para controlar el ruido radiado, aplicándose algunas de ellas al caso de las punzonadoras. Uno de dichos trabajos (Pinte, Boonen, Desmet y Sas, 2005) trata de reducir la vibración de la estructura de la punzonadora a bajas frecuencias para obtener una radiación de ruido menor. Para ello construyeron un modelo reducido de una punzonadora en el cual aplicaron las técnicas de control con un actuador inercial electromagnético, utilizando como sensor un acelerómetro en configuración de *colocalizado*, como actuador un *Active Mass Damper* y un algoritmo de control de aprendizaje iterativo (*Iterative Learning Control*, ILC). Para modificar los parámetros del filtro utilizaban la información del golpe anterior, dada la repetitividad del golpeo del punzón. Con esta técnica obtuvieron una reducción del nivel de vibración de la estructura de 10

dB, y como trabajo para el futuro dejaron entrever el estudio del efecto en el espectro de ruido y la aplicación de dicha técnica a una punzonadora real.

Otro de los últimos estudios (Chen, Sun y Li, 2005; Chen, Liu, Cai y Liu, 2006) habidos para reducir el ruido en las punzonadoras trata de reducir el ruido en el proceso de embragado, dado que dicho ruido en la posición del operador es superior a 90 dB(A). Para ello añadieron amortiguadores poliuretanos con el objetivo de absorber la energía de la fuerza de corte y de esta manera reducir el ruido radiado. Con esta técnica obtuvieron una reducción de 10,7 dB(A).

### 1.3. Control activo acústico estructural

Como ya se ha indicado anteriormente el control del ruido radiado se puede realizar controlando la vibración de las estructuras radiantes. Este conjunto de métodos de supresión de la vibración y del ruido radiado desde partes estructurales o componentes mecánicos es denominado *Control Acústico Estructural* (CAE); se pueden clasificar en dos categorías: métodos de control pasivo y métodos de control activo. El primero implica la modificación pasiva de propiedades de la estructura: cambios de diseño, adición de elementos absorbentes de energía, etc. El segundo altera las características vibratorias del sistema mediante la utilización de actuadores en determinadas posiciones de la estructura y gobernando dichos actuadores para regular la energía vibratoria del sistema.

Tradicionalmente el control de ruido y vibraciones se realizaba mediante técnicas pasivas consistentes en recubrir con material absorbente las paredes del cerramiento. Los métodos de control pasivos son bastante efectivos a altas frecuencias o en bandas de frecuencia estrechas; en cambio a bajas frecuencias los requerimientos de espesor del material son impracticables. Por ejemplo, a bajas frecuencias cerca de 200 Hz la longitud de onda del ruido es aproximadamente de 1,7 m y un diseño eficiente del absorbedor pasivo de la pared del cerramiento debería tener un absorbente de más de un metro de espesor para poder absorber el ruido. Por tanto a bajas frecuencias las técnicas activas son una alternativa atractiva frente a los métodos pasivos.

El *Control Activo Acústico Estructural* (CAAE) consiste en la manipulación de un entorno acústico estructural mediante actuadores que son gobernados por unas leyes de control en función de la información aportada por unos sensores. Estas técnicas ya son hoy en día de aplicación práctica debido a que en la última década ha habido un gran avance en cuanto a actuadores, sensores, electrónica de control y procesamiento en tiempo real.

En el campo de los transductores se han desarrollado varios sistemas utilizando materiales piezoeléctricos, electrostrictivos, con memoria de forma u otros materiales activos (Gopinathan, 2001). Son llamados *materiales activos* o *materiales inteligentes* aquellos que pueden captar y responder a una o más estimulaciones externas, tales como: presión, temperatura, campo eléctrico y magnético, químico, etc. En los últimos años estos materiales activos han atraído la atención de muchos campos de la ingeniería. Así por ejemplo los actuadores piezoeléctricos han sido profusamente in-

vestigados para aplicaciones de ingeniería aeroespacial entre otras. El conocido como PZT es extensamente empleado debido a sus altos coeficientes piezoeléctrico, dieléctrico y de elasticidad (Crawley, 1994). La actuación y la lectura se realizan mediante una señal eléctrica, y su comportamiento lineal permite una modelización sencilla en su utilización. Además, su alta rigidez da una densidad de energía adecuada y su rápida respuesta en el tiempo permite anchos de banda amplios.

Los actuadores piezoeléctricos que se emplean en CAAE, aunque se puedan diseñar con la forma deseada, normalmente tienen forma de pastillas o discos, los cuales consisten en delgadas láminas de cerámicos PZT de gran longitud en comparación con el espesor. Además están polarizados en la dirección del espesor y su deformación es perpendicular a la dirección de polarización y al campo eléctrico ( $d_{31}$  ó  $d_{32}$ ). Las ventajas que presentan son que tienen poco espesor, poca masa y ofrecen una buena integridad, además de tener un rango frecuencial amplio. La principal desventaja de este tipo de actuadores es que, a menos que se utilice en grandes cantidades, generalmente no se consigue una densidad de energía suficiente para la mayoría de los casos reales de la industria con estructuras de alta rigidez.

En control activo de vibraciones se utilizan actuadores pila para aumentar la densidad de energía de los actuadores PZT. Este aumento es debido al uso del coeficiente longitudinal  $d_{33}$  en vez de los coeficientes  $d_{31}$  o  $d_{32}$  (que son los que utilizan los de tipo pastilla). Uno de los problemas que presentan este tipo de actuadores de tipo pila para crear una fuerza de control sobre la estructura es la necesidad de una masa de reacción y una pieza de refuerzo. La necesidad de una masa de reacción hace en muchos casos impracticable la utilización de actuadores de tipo pila para aplicaciones de control de vibraciones. No obstante, esta necesidad puede ser eliminada mediante la utilización de configuraciones de unión estructura-actuador que introducen momentos flectores en lugar de fuerzas normales sobre la estructura.

En cuanto a los sensores, la ventaja que presentan los acústicos frente a los acelerómetros es que miden directamente la variable que se desea minimizar, pero la desventaja es que pueden medir ruido no deseado. En el caso de los sensores estructurales, la señal que miden no es directamente la presión sonora, por tanto esta señal se tiene que filtrar para obtener una señal proporcional a la presión acústica. Los sensores distribuidos, por ejemplo los PVDF, presentan la ventaja de que dándoles una forma adecuada pueden captar señales proporcionales a la emisión acústica. No obstante presentan la desventaja de que son muy sensibles tanto a la posición como a la forma y además para poder proporcionar dicha forma es necesario tener un buen modelo de la estructura que se desea controlar.

Por otra parte, en el caso de los acelerómetros, si la señal que espera el sistema de control es una señal proporcional a la emisión acústica, la señal obtenida se tiene que pasar por un filtro electrónico, con el consiguiente aumento de la carga computacional.

Otro componente de los sistemas CAAE es el sistema de control, que permite determinar la acción del actuador en función de la señal de error. Estos sistemas de control se pueden dividir en dos categorías: *feedforward* y *feedback*.

El control *feedforward* es aconsejable en los dos casos siguientes:



- Si se dispone de una señal de referencia de la señal de la perturbación.
- Si la perturbación es de naturaleza repetitiva o predecible.

La principal ventaja de un sistema *feedforward* es que puede hacerse que sea adaptativo a cualquier cambio de la estructura que el sensor pueda medir, aunque con el inconveniente de elevar el coste computacional en tiempo real. Una de las desventajas que presenta es que es un método local; es decir, la señal de error se reduce en los puntos de medida pero la respuesta puede amplificarse en otras partes del sistema (Preumont, 2002).

En la otra categoría, una de las grandes desventajas que presentan los sistemas de control *feedback* basados en el modelo es que requieren un modelo exacto de la estructura y de las cargas aplicadas sobre ella, requisito en ocasiones difícil de cumplir en la industria. Otro inconveniente más de estos sistemas es el problema del *spillover*, que consiste en una desestabilización de los modos residuales que no se hayan incluido en el sistema de control, ya que aunque no se hayan incluido los modos residuales sí se excitan con el sistema de control.

Además de los citados anteriormente, existen otros tipos de controles menos sofisticados, por ejemplo, los controladores de tipo *feedback* que no necesitan el modelo, denominados genéricamente como *controladores de amortiguamiento modal* (Preumont, 2002). Las principales ventajas de estos controladores son la no necesidad del modelo y la garantía de la estabilidad cuando el sistema es *colocalizado*. La principal desventaja que presentan es que son efectivos sólo cerca de las resonancias de los modos controlados. De cara a las aplicaciones de maquinaria industrial, con la ventaja de la no necesidad del modelo y aunque sólo sean efectivos cerca de las frecuencias de los modos controlados, si se consiguen controlar los principales modos que provocan la emisión sonora pueden conseguir una reducción de ruido sustancial.

Aunque en este tipo de controladores la ventaja de tener un control *colocalizado* es que la estabilidad está garantizada, en muchos casos reales con dicha configuración de sensor y actuador *colocalizados* no se consigue el mayor rendimiento del sistema de control debido a que dicha configuración no es la de posicionamiento óptimo. Por tanto en muchas aplicaciones es necesaria la utilización de un controlador *no-colocalizado* con la desventaja de no tener garantizada la estabilidad del sistema. La estabilidad de este tipo de controladores limita las ganancias de los modos controlados ya que al aumentar éstas se puede desestabilizar alguno de los modos cercanos al modo controlado.

No obstante hay técnicas de estabilización, las cuales pueden dividirse en dos tipos: de retardo en el tiempo y de pasivación. En el caso del retardo en el tiempo (Yang y Mote, 1992; Udwadia, von Bremen, Kumar y Hosseini, 2003) se suele introducir intencionadamente un retardo para mejorar la estabilidad del sistema; la desventaja que presentan es la dificultad de ajustar dicho retardo. La técnica de pasivación (Gosavi y Kelkar, 2004) consiste en obtener un sistema de control de naturaleza estable a partir de uno que no lo es utilizando un compensador adecuado; la desventaja de estas técnicas es la complejidad de hallar el compensador adecuado.

Una vez definidos los componente de control el siguiente paso es la optimización del sistema de control para obtener el mayor rendimiento posible; esta optimización se realiza en dos pasos: posicionamiento óptimo de actuadores y sensores y cálculo de los valores óptimos de los parámetros del controlador.

En el caso de los controladores modales *feedback* de primer orden los parámetros que hay que optimizar son la ganancia y la frecuencia de corte; en los filtros de segundo orden además hay otro parámetro, que es el amortiguamiento modal del filtro. Para ajustar dichos parámetros existen diferentes métodos dependiendo del objetivo que se persiga. Algunos de estos métodos (Goh y Yan, 1996; Bayon de Noyer y Hanagud, 1998a) presentan la desventaja de que en el modo que se controla aparecen dos picos adyacentes con un amortiguamiento menor que el modo sin control, en vez de un único pico amortiguado. En cambio el método denominado *cross-over point -punto de corte-* (Bayon de Noyer y Hanagud, 1998b) presenta la ventaja de que con él únicamente aparece un pico amortiguado.

Existen muchas estrategias para optimizar el posicionado de actuadores y de sensores, la mayoría basadas en la idea de minimizar algún índice asociado con el posicionamiento de los transductores (Hac y Liu, 1992; Gawronski, 1999). Con la aparición de los actuadores y sensores piezoeléctricos de pastilla se ha añadido una nueva complejidad al problema de la optimización: las dimensiones de los transductores distribuidos (Li, Onoda y Minesugi, 2002). También hay trabajos en los que se han optimizado a la vez el posicionamiento de los transductores y la ganancia del control *feedback* (Li et al., 2002; Yang, Jin y Soh, 2005).

## 1.4. Objetivos de esta tesis

El objetivo fundamental de esta tesis es el diseño y la validación experimental de un sistema de Control Activo Acústico Estructural para reducir el ruido radiado por los modos de bajo orden en estructuras de alta rigidez con la mayor parte del contorno en condiciones libres empleando actuadores piezoeléctricos.

Los tipos de estructura en los que la mayor parte del contorno se encuentra en condiciones libres aparecen a menudo en las máquinas industriales, pero no han sido estudiados en la literatura tan extensamente como los elementos simplemente soportados, placas o vigas. Así pues, en una primera aproximación se efectuarán los desarrollos considerando una viga empotrada-libre y posteriormente se aplicarán sobre un modelo a escala del bastidor de una punzonadora.

El objetivo global anterior puede desglosarse en los siguientes objetivos parciales:

- **Reducción del ruido radiado por medio de un actuador piezoeléctrico de tipo pila posicionado adecuadamente en la estructura para producir ondas de flexión**

En el caso del control de estructuras rígidas es necesario introducir grandes esfuerzos para poder producir momentos flectores de control en la estructura. Los actuadores piezoeléctricos de tipo pastilla, por las características que presentan, tienen limita-

ciones de fuerza para controlar este tipo de estructuras a no ser que se utilicen en grandes cantidades. Sin embargo los actuadores piezoeléctricos de tipo pila acoplados a la estructura, de tal forma que produzcan momentos flectores o fuerzas normales al plano de la estructura, sí son capaces de producir la energía de control necesaria.

- **Posicionamiento óptimo de actuadores y sensores teniendo en cuenta los modos no controlados que pueden inestabilizarse**

Las técnicas existentes de posicionamiento óptimo de sensores y actuadores son en general para configuraciones de actuador y sensor *colocalizados*. En pocos trabajos se ha realizado un posicionamiento *no-colocalizado*, y generalmente además persiguiendo únicamente la minimización con la energía de algún parámetro. No ha habido ningún método de posicionamiento en el que, aparte de optimizar el posicionamiento de actuadores y sensores teniendo en cuenta las leyes de control, tenga en cuenta también la influencia que puede tener el control *no-colocalizado* en los modos no controlados.

- **Diseño de controladores modales mediante técnicas teóricas y experimentales para la mejora del comportamiento vibro-acústico**

Los parámetros de los controladores modales se pueden definir sin el modelo del sistema que se desee controlar. No obstante, en el caso de que se quiera lograr un controlador modal óptimo con el que se consiga el mayor amortiguamiento posible del sistema (con la capacidad del actuador que se haya elegido) es necesario determinar los parámetros del controlador modal basándose en datos del modelo modal del sistema simulado, aunque en muchos casos reales resulta difícil disponer de dichos datos del modelo. En el caso de no tener un modelo que describa correctamente el comportamiento del sistema que se desee controlar, dichos parámetros se tendrán que calcular mediante técnicas experimentales.

- **Análisis y mejora de la estabilidad de los controladores modales *no-colocalizados* con el objetivo de poder aumentar la ganancia del controlador para obtener una mayor eficiencia del sistema de control**

En el caso de los controladores modales *colocalizados* la estabilidad del sistema está asegurada, pero tiene la desventaja de que no se consigue el rendimiento óptimo del sistema de control. Por lo tanto para conseguir un mayor rendimiento es necesaria la utilización de controladores modales *no-colocalizados*, con el inconveniente de no tener asegurada la estabilidad del sistema.

## 1.5. Contenido de la memoria

Teniendo en cuenta los objetivos anteriormente expuestos, la tesis está organizada en seis capítulos que permiten seguir el trabajo investigador desarrollado, desde el estado del arte hasta los resultados obtenidos en la maqueta de la punzonadora, pasando por la optimización y la estabilización del sistema de control.

El segundo capítulo comienza con una introducción general de fundamentos teóricos de ruido y vibraciones; a continuación se presenta el estado del arte en lo que

respecta al control acústico estructural. Posteriormente se explican los métodos de control activo: estrategias de control, tipos de actuadores y sensores y optimización del control desde el punto de vista del ajuste de los parámetros del control y el posicionamiento óptimo de actuadores y sensores. También se expone sobre la *colocación* y la estabilidad de los controladores modales, para terminar con las técnicas del análisis modal de sistemas simétricos y no simétricos.

En el tercer capítulo se describe la optimización del controlador, que se ha realizado con el objetivo de conseguir el mayor rendimiento posible tanto de los actuadores como de las leyes de control. Para ello se han tenido en cuenta tanto los parámetros del controlador como el posicionamiento de los actuadores y de los sensores. También se describe la técnica de posicionamiento óptimo desarrollada en esta tesis teniendo en cuenta la influencia del posicionamiento y del control en los modos no controlados.

En el cuarto capítulo se presenta un estudio de la estabilidad del sistema de control y se describe el método de estabilización desarrollado en esta tesis, con el cual se consigue aumentar la estabilidad del sistema *no-colocalizado* mediante dos técnicas: la primera, con un sensor puntual *casi-colocalizado* con el actuador, y la segunda, con un sensor puntual *colocalizado* con el actuador.

En el quinto capítulo se valida el sistema de control descrito en el capítulo anterior con dos baterías de experimentos. El primer grupo de experimentos valida el método sobre una viga empotrada libre, con el objetivo de reducir el ruido que emite al ser excitada con un ruido blanco mediante el actuador. El segundo conjunto de experimentos se ha realizado sobre un modelo del bastidor de una punzonadora con el objetivo de reducir el ruido radiado al excitar dicho modelo con un punzón.

Por último, en el capítulo final de conclusiones se hace una recapitulación de la tesis teniendo en cuenta los objetivos propuestos y los resultados alcanzados, destacando las contribuciones aportadas con esta tesis y las posibles líneas de trabajo futuras.

## Capítulo 2

# Control acústico estructural: Estado del arte

### 2.1. Introducción

En este capítulo se realiza una revisión de las técnicas de control acústico estructural, tanto del control pasivo, como semiactivo, control activo y absorbedores de vibración. También se lleva a cabo un estudio de los elementos principales de un sistema de control y de los componentes de los métodos activos: estrategias de control, tipos de actuadores y de sensores. A continuación se ha realizado una revisión de la optimización del control modal, detallando el estudio sobre los métodos de estabilidad del control modal. En esta revisión se ha incidido especialmente en los controles *colocalizados* y *no-colocalizados*. También se expondrá brevemente sobre las técnicas del análisis modal.

No obstante, antes de empezar con la revisión del control acústico estructural se describen brevemente los fundamentos teóricos tanto de vibración como de radiación. Los modelos teóricos expuestos son: primeramente, la radiación acústica de una esfera pulsante, posteriormente la radiación de una placa plana y finalmente la radiación acústica en estructuras irregulares. El capítulo finaliza con una aplicación del control activo acústico estructural sobre una viga empotrada libre, en la cual se ha utilizado tanto un control *colocalizado* como otro *no-colocalizado*.

### 2.2. Fundamentos teóricos

En este apartado se explican algunos conceptos de vibraciones y el concepto de la colocación del par actuador sensor, aspecto muy importante desde el punto de vista de la estabilidad del sistema controlado. A continuación se estudiarán los conceptos

de radiación de ruido de una esfera pulsante, de una placa vibrante y, por último, de un sistema irregular por métodos numéricos.

### 2.2.1. Fundamentos de vibración

En un medio continuo es imposible que su posición o configuración deformada quede especificada con un número finito de grados de libertad, pues hay infinitos modos independientes de deformarse. En realidad, para que una configuración deformada quede definida hay que especificar la posición de cada punto, y esto exige naturalmente infinitos parámetros independientes. Las incógnitas del problema no son entonces los desplazamientos de una serie de puntos sino la o las funciones de desplazamiento definidas sobre el dominio del problema. Estas funciones incógnitas deben obtenerse mediante la integración de un sistema de ecuaciones general de la Teoría de la Elasticidad con las fuerzas de inercia introducidas como fuerzas de volumen y completadas con las correspondientes condiciones de contorno.

El problema matemático resultante es tan grande que sólo en unos pocos casos de geometría particularmente sencilla se ha podido encontrar una solución analítica. En la práctica, en la mayor parte de las ocasiones hay que conformarse con una solución aproximada, resolviendo un modelo matemático discretizado del sistema real con un número finito de grados de libertad. Esto es lo que se conoce como discretización de un problema continuo; es decir, establecer un modelo matemático en el que el número de grados de libertad sea finito y por tanto resoluble con la ayuda de un computador. Refinando suficientemente la discretización puede obtenerse una solución tan aproximada como se desee; el problema es ya un tema económico, de tiempo de computador.

#### 2.2.1.1. Ecuación de movimiento de un sistema continuo

El sistema de ecuaciones generales de la Elasticidad con las fuerzas de inercia introducidas como fuerzas de volumen, como por ejemplo el problema de flexión de una viga elástica, tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

siendo,  $a = \sqrt{\rho A / EI}$ ,  $\rho$  la densidad de masa,  $A$  es la sección del área transversal,  $E$  el módulo de Young e  $I$  es el momento de inercia y  $u$  la deformación transversal a la viga.

Dichas ecuaciones deben ser completadas con las correspondientes condiciones de contorno; por ejemplo para una viga empotrada libre sin fuerzas externas con longitud  $L$  serán:

$$u(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{si } x = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{si } x = L \quad (2.3)$$

Resolviendo el problema de valores y vectores propios, los vectores propios resultan:

$$u(x) = \cosh(k_n x) - \cos(k_n x) - \sigma_n (\sinh(k_n x) - \sin(k_n x)) \quad (2.4)$$

donde  $k_n$  es el número de onda estructural y  $\sigma_n$ ,

$$\sigma_n = \frac{\sin(k_n L) - \sinh(k_n L)}{\cos(k_n L) + \cosh(k_n L)} \quad (2.5)$$

y el número de onda estructural  $k_n$  es solución de la siguiente ecuación:

$$\cosh(k_n L) \cos(k_n L) = -1 \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

### 2.2.1.2. Ecuación de movimiento de un sistema discreto

La forma general de una ecuación de movimiento gobernado por el equilibrio dinámico entre las fuerzas externas, elásticas, de inercia y de amortiguamiento en una estructura discreta y flexible con un número finito de grados de libertad es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.7)$$

donde,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores generalizados de desplazamiento (traslación y rotación) y de fuerzas (fuerzas puntuales y momentos), respectivamente, y  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{C}$  son las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Estas matrices son simétricas y semidefinidas positivas.

Las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  derivan de la discretización de la estructura, normalmente de elementos finitos. La matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  representa las diversas formas de disipar energía en la estructura, que normalmente son poco conocidas; razón por la cual se suelen hacer suposiciones, siendo una de las más populares la hipótesis de amortiguamiento de Rayleigh:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2.8)$$

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se suelen elegir de manera que se ajusten lo mejor posible a la estructura que se quiere modelizar.

### 2.2.1.3. Modos de vibración

Si consideramos la respuesta libre de un sistema de orden  $n$  no amortiguado, ésta viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

suponiendo una solución de tipo  $x = \phi_i e^{j\omega_i t}$ , donde  $\phi_i$  y  $\omega_i$  deben satisfacer el problema de valores y vectores propios siguiente:

$$(\mathbf{K} - \omega_i \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  son simétricas; pero  $\mathbf{K}$  es semidefinida positiva y  $\mathbf{M}$  es definida positiva.  $\omega_i^2$  son los valores propios y deben ser reales y no negativos. Así,  $\omega_i$  son las frecuencias naturales y  $i$  corresponden a las formas modales; siendo el número de frecuencias y modos igual al número de grados de libertad del sistema. Además, los modos de vibración cumplen la función de ortogonalidad con respecto a las matrices de masa y de rigidez. Son modos de sólido rígido aquellos en los que la energía de deformación asociada con dicho modo es nula ( $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i$ ); estos modos son las soluciones del problema de valores propios de frecuencia natural nula  $\omega_i = 0$ .

### 2.2.1.4. Descomposición modal

#### 2.2.1.4.1. Estructuras sin modos de sólido rígido

Haciendo un cambio de coordenadas nodales a coordenadas modales mediante

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{z} \quad (2.11)$$

donde,  $\mathbf{z}$  es el vector de amplitudes modales, y sustituyendo en la expresión 2.7 se obtiene que:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (2.12)$$

Suponiendo una excitación armónica  $f = F e^{j\omega t}$  la respuesta será también armónica de la misma frecuencia:  $x = X e^{j\omega t}$ . Sustituyendo estas expresiones introduciendo en la ecuación 2.12 y operando resulta la expresión de las amplitudes siguiente:

$$X = (-\omega^2 M + j\omega C + K)^{-1} F = G(\omega) F \quad (2.13)$$

La matriz  $G(x)$  es la generalización de la matriz de flexibilidad  $K^{-1}$  y es llamada *matrix de flexibilidad dinámica*.

Considerando el mismo caso en coordenadas modales, la amplitud modal también puede ser armónica,  $z = Z e^{j\omega t}$ , y la ecuación 2.12 queda de la siguiente forma:



$$Z = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega)} \right\} \phi^T F \quad (2.14)$$

donde,  $\mu_i$  es la masa modal del modo  $i$ , y  $\xi_i$  es el amortiguamiento modal del modo  $i$  y  $\omega_i$  su frecuencia natural.

Realizando el cambio de coordenadas modales a coordenadas nodales:

$$X = \Phi Z = \Phi \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega)} \right\} \phi^T F \quad (2.15)$$

Comparando las ecuaciones 2.13 y 2.15 se obtiene la expansión modal de la matriz de flexibilidad dinámica:

$$G(\omega) = [-\omega^2 M + j\omega C + K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega)} \quad (2.16)$$

donde la suma se extiende a todos los modos.  $G_{lk}(\omega)$  expresa la amplitud compleja de la respuesta estructural del grado de libertad  $l$  cuando la estructura es estudiada bajo una excitación armónica en el grado de libertad  $k$ .

Si la estructura no tiene modos de sólido rígido, evaluando la ecuación 2.16 para  $\omega = 0$  se obtiene la matriz de flexibilidad estática:

$$G(0) = K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i \omega_i^2} = \Phi (\Phi^T K \Phi)^{-1} \Phi^T \quad (2.17)$$

Para una banda de frecuencia  $\omega < \omega_b$ , si se seleccionan  $m$  modos de tal manera que  $\omega_b \ll \omega_m$ , la matriz dinámica de flexibilidad se puede expresar como suma de los modos de baja frecuencia ( $i \leq m$ ) que responden dinámicamente y de los modos de altas frecuencias que responden estáticamente:

$$G(\omega) \simeq \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\omega)} + \sum_{i=m+1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i \omega_i^2} \quad (2.18)$$

Utilizando la ecuación 2.17 se puede transformar la ecuación anterior de tal manera que no aparezcan los modos de orden alto:

$$G(\omega) \simeq \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\omega)} + K^{-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i \omega_i^2} \quad (2.19)$$

La contribución estática de los modos de orden alto a la matriz de flexibilidad es también denominada con el nombre de *modos residuales*, R. Esta matriz es independiente de la frecuencia  $\omega$  e introduce un componente en la matriz de transferencia

que hace que parte de la salida sea proporcional a la entrada. Si en la función de transferencia no se introduce el término de los modos residuales pueden existir errores sustanciales en los ceros del lazo cerrado y, como resultado, en el comportamiento del sistema controlado.

#### 2.2.1.4.2. Estructuras con modos de sólido rígido

En una estructura que tiene  $r$  modos de sólido rígido el desplazamiento se puede escribir como una combinación lineal de la contribución de los modos rígidos y de los flexibles:

$$x = x_r + x_e = \Phi_r z_r + \Phi_e z_e \quad (2.20)$$

donde,  $\Phi_r$  y  $\Phi_e$  son matrices cuyas columnas son los modos de sólido rígido y los modos flexibles, respectivamente.

Introduciendo el cambio de variable 2.20 en la ecuación 2.7 y operando se obtiene la siguiente matriz:

$$G(\omega) \simeq \sum_{i=1}^r \frac{\phi_i \phi_i^T}{-\mu_i \omega^2} + \sum_{i=r+1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega)} + R \quad (2.21)$$

donde la contribución de los modos residuales es:

$$R = \sum_{i=m+1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{-\mu_i \omega_i^2} = PG_{iso}P^T - \sum_{i=r+1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{-\mu_i \omega_i^2} \quad (2.22)$$

siendo,

$$PG_{iso}P^T = \Phi_e (\Phi_e^T K \Phi_e)^{-1} \Phi_e^T = \sum_{i=r+1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{-\mu_i \omega_i^2} \quad (2.23)$$

#### 2.2.1.5. Funciones de transferencia

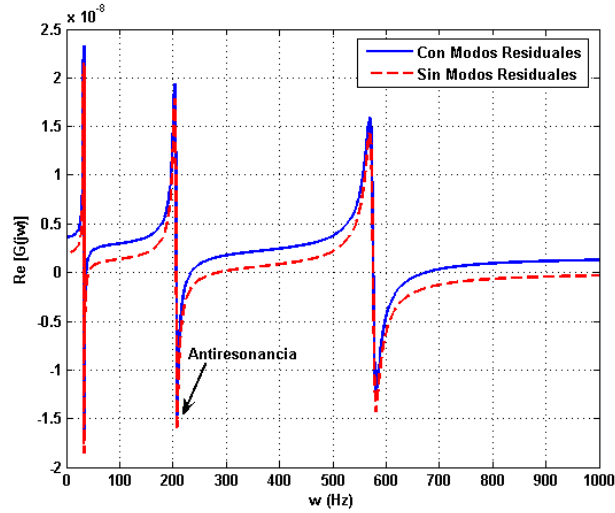
Si se consideran las diferentes componentes de la matriz de flexibilidad dinámica, éstas son las funciones de transferencia entre la fuerza generalizada en un grado de libertad y la respuesta en otro grado de libertad. Así, si las componentes de la matriz son diagonales la función de transferencia que se consigue es *colocada* (la función de respuesta en frecuencia, FRF, presenta una alternancia de frecuencias de resonancia y antiresonancia); es decir, la fuerza generalizada y la respuesta estarán en el mismo grado de libertad. Por ejemplo, si la fuerza se genera mediante un actuador y el desplazamiento es medido por un sensor, el actuador y el sensor serán *colocalizados* si están en el mismo grado de libertad y si no serán *no-colocalizados*.

2.2.1.5.1. *Sistemas colocalizados*

Si consideramos el término  $k$  de la diagonal de la matriz de flexibilidad

$$G_{kk}(\omega) = \sum_{i=1}^r \frac{\phi_i^2(k)}{-\mu_i \omega^2} + \sum_{i=r+1}^m \frac{\phi_i^2(k)}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega)} + R_{kk} \quad (2.24)$$

la parte real de la FRF se puede observar en la figura 2.1:



**Figura 2.1:** FRF de un sistema *colocalizado*

La amplitud de la FRF tiene un pico en las frecuencias de resonancia  $\omega_i$ , y en cualquier intervalo entre dos frecuencias naturales consecutivas existe una antiresonancia  $\omega_{0j}$  donde la amplitud de la FRF se hace cero. Destacar asimismo que:

- Una excitación armónica en una frecuencia correspondiente a una antiresonancia no produce una respuesta en el grado de libertad donde se aplica la fuerza de excitación. La estructura se comporta como si tuviera una condición de contorno que le impidiese el movimiento del grado de libertad donde está aplicada la fuerza. En este caso dicha frecuencia de antiresonancia coincide con la frecuencia natural del sistema con las nuevas condiciones de contorno.
- En contraste con las frecuencias de resonancia, las frecuencias de antiresonancia dependen de la posición del actuador y sensor *colocalizados*.
- Despreciar el término de los modos residuales en la función de transferencia es equivalente a mover la FRF hacia abajo el valor  $R_{kk}$ , la contribución de los modos residuales. De esta forma todas las frecuencias de antiresonancia tienden a sobreestimarse.

### 2.2.1.5.2. Sistemas no-colocalizados

Si consideramos los términos que no están en la diagonal de la matriz de flexibilidad

$$G_{kl}(\omega) = \sum_{i=1}^r \frac{\phi_i(k)\phi_i(l)}{-\mu_i\omega^2} + \sum_{i=r+1}^m \frac{\phi_i(k)\phi_i(l)}{\mu_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\omega)} + R_{kl} \quad (2.25)$$

la parte real de la FRF se puede observar en la figura 2.2. La parte real de la FRF tiene un pico en la frecuencia de  $\omega_i$  (correspondiente a un polo) pero en cualquier intervalo entre las dos no aparece una antiresonancia. Esto es debido a que el numerador de la función de transferencia  $\phi_i(k)\phi_i(l)$  puede ser positivo o negativo.

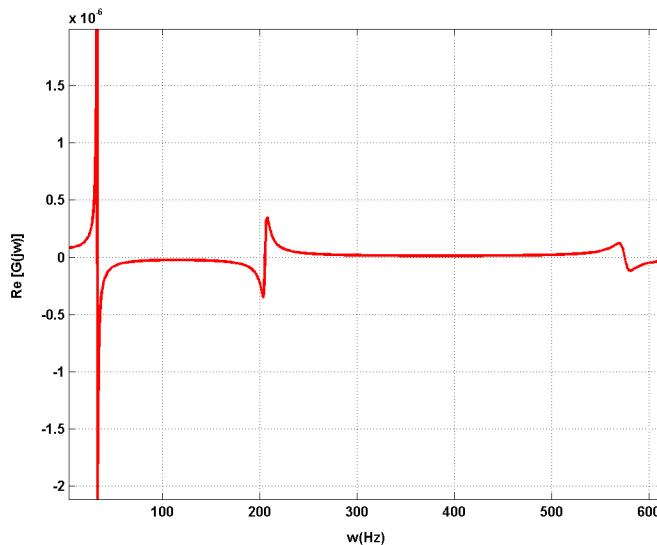


Figura 2.2: FRF de un sistema *no-colocalizado*

## 2.2.2. Fundamentos de radiación

Las estructuras, en las cuales el espesor es mucho menor que las dimensiones de la superficie, tienden a vibrar con predominio del movimiento transversal a la superficie. Esta característica, junto con que la estructura esté rodeada de aire o de fluido, hace que el movimiento de la estructura produzca desplazamientos y compresiones del entorno. Por tanto tales estructuras son capaces de radiar ruido y de tener una respuesta vibratoria frente a un ruido incidente.

Las propiedades que significativamente influyen en la compresión de ruido y por tanto en la radiación de ruido son la aceleración normal a la superficie vibrante y la distribución espacial y temporal de tal aceleración.

En los siguientes apartados se estudian las características y los métodos de análisis de radiación de ruido. Los métodos que se han analizado han sido, primeramente, la radiación acústica de una esfera pulsante, posteriormente la radiación de una placa plana y finalmente la radiación acústica en estructuras irregulares.

Aunque el interés práctico de una esfera pulsante es escaso, ya que son difíciles de construir, tienen un gran interés teórico puesto que sirven de prototipo para las superficies cerradas que vibran arbitrariamente y sus dimensiones son mucho menores que la longitud de onda acústica. Así, sucede que con el propósito de estimar las características de radiación de ruido muchas estructuras de interés práctico pueden ser modeladas con bastante precisión con placas planas, rectangulares y uniformes; por ejemplo, las paredes y suelos de los edificios, los revestimientos de máquinas industriales, la carrocería de un coche, las paredes de los barcos. . .

Las estructuras que radian ruido por vibración son muy diversas por su forma geométrica, propiedades del material y la forma de construcción. Es por esto que, en general, es bastante difícil evaluar la forma detallada de la radiación de ruido en términos de amplitud y fase. En estos casos se utilizan los métodos numéricos para evaluar dicho ruido.

### 2.2.2.1. Radiación acústica de una esfera pulsante

La fuente más simple imaginable para generar ondas acústicas es una esfera pulsante: una esfera cuyo radio varía sinusoidalmente con el tiempo. Por simetría, una fuente de tal naturaleza produce ondas esféricas armónicas en un medio que sea infinito, homogéneo e isótropo. El campo de presiones generado por este tipo de fuentes se expresa mediante la siguiente expresión:

$$p(r, t) = \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} \cos(ka) e^{j[\omega t - k(r-a) + ka]} \quad (2.26)$$

donde,  $\rho_0$  es la densidad del aire,  $c$  la velocidad del aire,  $a$  el radio de la esfera pulsante,  $r$  la distancia radial desde el centro de la esfera,  $k$  el número de onda acústico,  $\omega$  la frecuencia de vibración de la esfera y  $U_0$  la amplitud de la velocidad de la esfera.

Si las dimensiones de la fuente son muy pequeñas comparadas con la longitud de onda  $ka \ll 1$ , la expresión anterior se puede simplificar a:

$$p(r, t) = \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} k a e^{j[\omega t - k(r-a)]} \quad (2.27)$$

Aunque es difícil construir esferas pulsantes y son de escaso interés práctico, su importancia teórica es grande porque sirven de prototipo para una importante clase de fuentes llamadas *fuentes simples*. Una fuente simple es una superficie cerrada que vibra con una distribución de velocidades arbitraria, pero de un tamaño tal que todas sus dimensiones son mucho menores que la longitud de onda del sonido emitido.

### 2.2.2.2. Radiación acústica de una placa vibrante

La radiación acústica emitida por las vibraciones de las placas vibrantes se puede resolver mediante las siguientes formulaciones:

- Integral de Rayleigh
- Cálculo en el dominio de número de onda
- Superposición modal

La integral de Rayleigh es la formulación más sencilla para expresar la radiación de una placa vibrante; en ella se expresa la presión acústica como suma de presiones acústicas producidas por fuentes elementales, cada una de éstas con una velocidad volúmica compleja.

Por otra parte, la formulación en dominio de onda describe la radiación acústica de los modos de vibración individualmente, en el dominio de número de onda, mediante la transformada de Fourier. Este análisis muestra que sólo las ondas de placa con velocidad de fase mayor que la velocidad del sonido radian ruido. La formulación en dominio de onda describe la radiación acústica de modos individuales de la placa, pero en realidad en una frecuencia de excitación distinta de una frecuencia natural una placa tiene una respuesta provocada por la superposición de los diferentes modos.

Por último el método de superposición modal define la radiación acústica en términos de respuesta multimodal de la estructura.

#### 2.2.2.2.1. La integral de Rayleigh

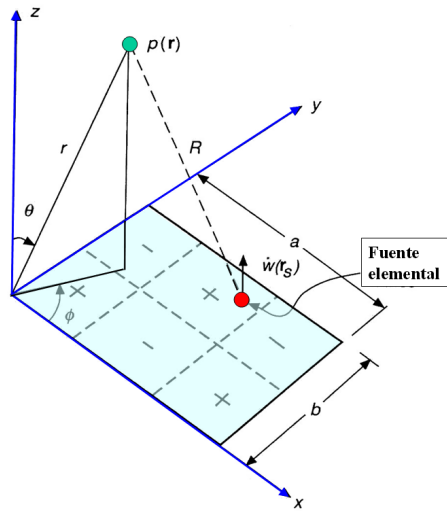
Conceptualmente es el problema más sencillo en el cálculo de la radiación. La integral de Rayleigh proporciona una presión compleja (asociada con una dependencia temporal  $e^{-j\omega t}$ ) en un punto  $r$  lejano (más lejos que las dimensiones de la placa) de un espacio circundante de densidad  $\rho_0$  en términos de la velocidad compleja asociada con una fuente elemental en el punto  $r_s$  de la superficie  $S$ .

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación de esta teoría, considerando el ruido radiado por una placa rectangular, tal como se observa en la figura 2.3.

$$p(r) = \int_S \frac{j\rho_0\dot{w}(r_s)e^{-jkR}}{2\pi R} dS \quad (2.28)$$

La radiación acústica depende por consiguiente de:

- El punto del medio circundante donde se calcula.
- Las características de la fuerza exterior aplicada a través de la velocidad compleja.



**Figura 2.3:** Sistema de coordenadas en una placa dentro de un deflector infinito

- La frecuencia de excitación.

Fahy (1985) demostró que a bajas frecuencias, cuando la longitud de onda acústica es mayor que la longitud de onda estructural ( $ka \ll m$  y  $kb \ll n$ ), la intensidad producida por la vibración de la placa nunca es mayor que la producida por una única celda de vibración actuando ella sola. Las celdas de vibración se pueden observar en la figura 2.3, las cuales corresponden a las áreas limitadas por las líneas nodales (en trazo discontinuo). Esta es una de las características más significativas de la radiación de placas a bajas frecuencias, la interferencia de cancelación producida por la emisión de celdas.

Esta interferencia destructiva que se produce entre las celdas contiguas hace que la radiación esté dominada por las celdas no canceladas. Por lo tanto la intensidad producida por las vibraciones de una placa en la que existan muchas celdas nunca será mayor que la producida por una celda vibrando ella sola.

#### 2.2.2.2.2. Formulación en el dominio de número de onda

Esta formulación para calcular el ruido radiado por una superficie plana implica trabajar con la *transformada de Fourier espacial*. El interés de expresar la vibración en el dominio del número de onda ( $k_x, k_y$ ) se debe a que la potencia acústica radiada al campo lejano depende del cuadrado de la velocidad estructural de la placa:

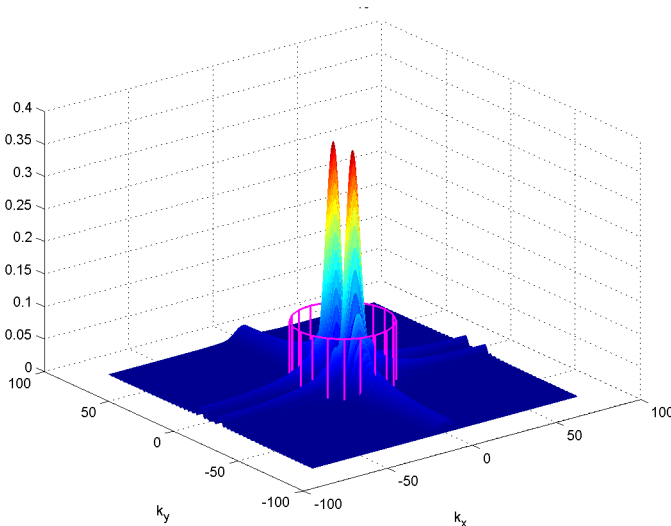
$$\Pi = \frac{\omega \rho_0}{8\pi^2} \operatorname{Re} \left[ \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \frac{|\dot{W}(K_x, k_y)|^2}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \right] \quad (2.29)$$

donde  $k = (\omega/c)$  y  $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}()$  denota la parte real.

Lo más interesante de la expresión anterior es subrayar que aquellos números de onda que satisfagan la inecuación  $k \geq (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  contribuyen a generar la potencia acústica radiada al campo lejano. A estos números de onda se les denomina con el apelativo de *supersónico*, mientras que al resto se les denomina con el de *subsónico*.

Desde el punto de vista modal se observa que en aquellos modos de vibración que tienen baja eficiencia de radiación el pico de valor máximo en el dominio de número de onda cae fuera del círculo definido por  $k \geq (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ . El primer modo, en cambio, tiene su pico en  $k_x, k_y = 0$ , siendo por lo tanto un buen radiador de ruido.

En la figura 2.4 se puede observar que la potencia acústica emitida por la placa excitada a una frecuencia que corresponda con  $k = 25$  será proporcional al volumen de la intersección entre la curva de la velocidad transformada al número de onda y de un cilindro de radio  $k = \omega/c$ . A los números de onda que satisfagan dicha condición ( $|k_x^2 + k_y^2| \leq k^2$ ) se les denomina con el termino de *supersónicos*. En cambio aquellos números de onda para los que  $|k_x^2 + k_y^2| \geq k^2$  no contribuyen a la potencia acústica radiada y se les llama *subsónicos*.



**Figura 2.4:** Zona subsónica y supersónica

Se define la eficiencia de radiación (figura 2.5) mediante la fórmula (2.30) de Wallace (Fahy, 1985). Estas eficiencias de radiación son aplicables cuando la respuesta

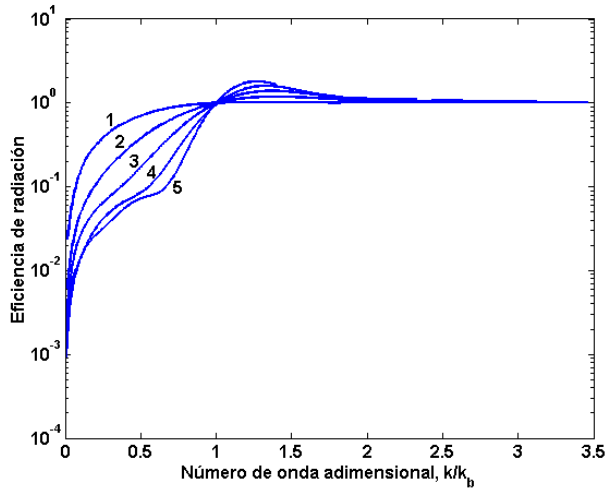


del sistema esté dominada por un modo; esto ocurre cerca de una resonancia. Fuera de las resonancias, cuando más de un modo es significativa, en esos casos las eficiencias de radiación no pueden ser calculadas de forma simplificada utilizando eficiencias de radiaciones individuales. La eficiencia de radiación se define como un ratio de la potencia acústica radiada por unidad de área de la superficie vibrante frente a la potencia acústica radiada por unidad de área de un pistón que vibra con la misma velocidad media que la superficie vibrante;

$$\sigma_n = \frac{\Pi}{\langle |\dot{w}_n| \rangle \rho_0 c_0 S} \quad (2.30)$$

donde  $\Pi$  es la potencia de ruido radiado,  $\rho_0$  densidad del aire,  $c_0$  velocidad del aire,  $S$  el del sistema y  $\langle |\dot{w}_n| \rangle$  la media temporal y espacial de la velocidad modal, siendo su expresión:

$$\overline{\langle |\dot{w}^2| \rangle} \approx \frac{1}{2S} \iint_S |\dot{w}(\mathbf{r}_S)|^2 dS \quad (2.31)$$



**Figura 2.5:** Eficiencias de radiación

En la figura 2.5 se puede observar que a partir de  $k/k_n \gg 1$ , la eficiencia de los modos tiende a la unidad, lo cual corresponde a la condición de que la longitud de onda estructural sobrepasa la longitud de onda acústica. Por otra parte a bajas frecuencias se puede observar que los modos más eficientes son los de orden inferior, siendo el más eficiente el de primer orden y que cuanto mayor es el orden la eficiencia va decayendo debido a la interferencia de celdas de vibración, las cuales corresponden a las áreas limitadas por las líneas nodales. Esta es una de las características más significativas de la radiación de placas a bajas frecuencias: la interferencia de cancelación producida por la emisión de celdas.

### 2.2.2.2.3. Formulación de respuesta en superposición modal

En el apartado anterior se ha descrito la radiación acústica de los modos individuales de una placa vibrante, pero en una frecuencia de excitación distinta de una frecuencia natural una placa tiene una respuesta provocada por la superposición de diferentes modos. En realidad, la respuesta puede ser descrita mediante una serie infinita de modos, aunque en la práctica se puede obtener una buena representación mediante la superposición modal de un número finito de modos.

Teniendo en cuenta la superposición modal, la potencia acústica radiada se puede expresar como:

$$\Pi = \dot{\mathbf{w}}^H \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}} \quad (2.32)$$

siendo  $\dot{\mathbf{w}}$  la amplitud modal y  $\mathbf{M}$  la *matriz de resistencias* definida por la siguiente expresión:

$$\mathbf{M} = \frac{\omega \rho_0}{8\pi^2} \text{Re} \left[ \iint \frac{\Psi^*(k_x, k_y) \Psi^T(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \right] \quad (2.33)$$

Como la matriz de resistencia no es una matriz diagonal, los modos estructurales contribuyen a la radiación de una manera acoplada. Es decir, el modo  $mn$ -ésimo contribuye aisladamente a la potencia radiada a través del elemento  $M_{mn, mn}$ , pero también se acopla con el elemento  $m'n'$ -ésimo para radiar ruido mediante el elemento  $M_{mn, m'n'}$ , de la matriz.

Puesto que la matriz de resistencia es una matriz simétrica, real y definida positiva se puede descomponer en valores y vectores propios:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \Omega \mathbf{P} \quad (2.34)$$

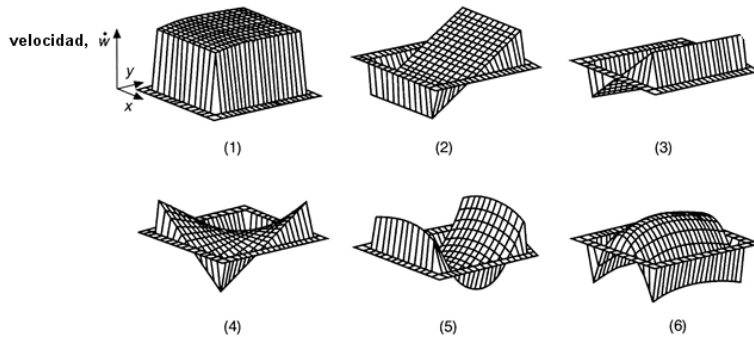
$\mathbf{P}$  es una matriz unitaria de vectores propios y  $\Omega$  es una matriz diagonal de valores propios reales positivos.

Con esta descomposición la potencia acústica radiada queda de la siguiente manera:

$$\Pi = \sum_{n=0}^N \Omega_n |b_n|^2 \quad \mathbf{b} = \mathbf{P} \dot{\mathbf{w}} \quad (2.35)$$

Es decir, la potencia acústica se obtiene como la suma de una serie de términos que son independientes (ortogonales) entre sí y que se denominan modos acústicos. Estos modos acústicos son agrupaciones de modos estructurales, y por tanto dependen de las dimensiones de la placa y de las condiciones de contorno.

La forma de estos modos radiantes no sufre apenas variaciones con la frecuencia de excitación en el margen de bajas frecuencias; no dependen tampoco del tipo de excitación sobre la placa ya que son agrupaciones de modos estructurales y por tanto sólo dependen de las dimensiones de la placa. En la figura 2.6 se pueden observar los seis primeros modos acústicos de una placa simplemente apoyada (Fuller, Elliott y Nelson, 1997).



**Figura 2.6:** Distribución de velocidad de los seis primeros modos de radiación en una placa rectangular

### 2.2.2.3. Radiación acústica en estructuras irregulares

La solución analítica de problemas acústicos está limitada a estructuras simples como esferas o placas planas, pero muchas de las estructuras vibrantes no se pueden aproximar a tales formas idealizadas y por consiguiente es imposible realizar una evaluación cuantitativa por medios puramente analíticos. Ante este tipo de estructuras con formas más complejas se utilizan los métodos numéricos de análisis, tales como las técnicas de elementos finitos y de elementos de contorno. Con estas técnicas de simulación es posible estudiar el campo acústico dentro del entorno complejo, así como también problemas de radiación de ruido con y sin iteración vibro-acústica.

Los problemas acústicos se pueden clasificar atendiendo a varios aspectos; una primera las define, atendiendo al entorno en el que se circunscriben, como interiores o exteriores. En problemas exteriores el cuerpo vibrante radía ruido en un campo libre, mientras que en un problema interior las ondas acústicas reflejan total o parcialmente en un recinto cerrado.

Otra de las divisiones es en función de la existencia de interferencias de ondas, y se clasifica en ruido de dispersión y ruido de radiación. En el problema de dispersión de ondas una onda acústica incide en una superficie con unas características geométricas y acústicas dadas y se tiene que determinar el campo acústico dispersado. En el de radiación una superficie vibrante genera ondas acústicas y se evalúa el ruido radiado. También pueden darse combinaciones de ambos fenómenos.

Por último una clasificación importante consiste en la división del problema vibro-

acústico en acoplado y no acoplado. En todos los problemas de radiación que está involucrada la vibración de una estructura existe una interacción mutua entre las ondas acústicas y la vibración de la estructura. En muchos casos el efecto de las ondas acústicas sobre la estructura es pequeño y se puede despreciar; como resultado el problema estructural y acústico se pueden resolver independientemente lo que se conoce como problema desacoplado. En el análisis no acoplado se pueden dar dos tipos de problemas:

- La estructura excita el fluido y se debe determinar la respuesta de éste; en este caso la vibración estructural es conocida (por mediciones o por análisis de elementos finitos) y estos datos definen las condiciones de contorno (velocidades) del problema acústico.
- El fluido excita la estructura; en este caso son conocidas las fuentes acústicas alrededor de la estructura y se tiene que calcular la distribución de presión (o velocidad) en la superficie de la estructura. Posteriormente esta distribución de presiones puede ser usada como función de carga para el análisis de elementos finitos estructural.

En el caso que la densidad del fluido es similar a la de la estructura el efecto acústico sobre la respuesta estructural no puede ser ignorado y en tales circunstancias se tiene que resolver el problema vibro-acústico acoplado. A continuación se describen brevemente los métodos numéricos más utilizados en los problemas vibroacústicos.

### 2.2.2.3.1. Método de elementos finitos (FEM)

En el método de elementos finitos un volumen cerrado se divide en regiones más pequeñas o en elementos finitos conectados en nodos discretos. Las variables acústicas en cada elemento generalmente se describen mediante funciones polinómicas. Si  $p_e$  indica el valor de la presión en los  $m$  nodos del elemento  $e$ , la presión en cualquier posición del elemento se puede describir como:

$$\mathbf{p} = [N_1 \cdots N_m] \begin{Bmatrix} p_{e1} \\ \cdots \\ p_{em} \end{Bmatrix} = [N] [p_e]^T \quad (2.36)$$

donde  $N$  son las matrices de interpolación.

Y de manera similar se puede obtener el gradiente de la presión:

$$\nabla \mathbf{p} = [B] [p_e]^T \quad (2.37)$$

donde  $B_{ij} = \partial N_i / \partial x$  ( $1 < i < m$ ) y  $j$  es la dimensión del problema (1, 2 o 3D).

Las matrices de masa y rigidez elementales,  $[M_e]$  y  $[K_e]$ , respectivamente, pueden ser definidas como

$$[M_e] = \int_{V_e} 1/c^2 [N]^T [N] dV_e \quad , \quad [K_e] = \int_{V_e} 1/c^2 [B]^T [B] dV_e \quad (2.38)$$

donde  $V_e$  es el volumen de cada elemento considerado.

Ensamblando estas matrices elementales en una matriz global, la ecuación global tiene la siguiente forma:

$$[M] \{\ddot{p}\} + [K] \{p\} = \{f\} \quad (2.39)$$

donde  $\{f\}$  es el vector de fuerzas.

Asumiendo una entrada y una respuesta armónicas, la expresión 2.39 se transforma en un problema de valores y vectores propios si  $\{f\}$  es nulo:

$$([M] - \omega^2 [K]) \{p\} = \{f\} \quad (2.40)$$

La respuesta forzada se puede obtener utilizando tanto un análisis directo, resolviendo el sistema de ecuaciones en cada frecuencia de interés, como por superposición modal. Con el método de elementos finitos se pueden considerar una gran variedad de condiciones de contorno, no únicamente de presión o de velocidad.

El número de elementos que se utilicen en la discretización va a determinar la banda de frecuencias donde los resultados sean válidos.

En el caso de que el volumen a analizar sea infinito el método de elementos finitos requeriría un número infinito de elementos finitos. No obstante varias técnicas han sido publicadas para acoplar el método de elementos finitos a una geometría infinita de radiación.

Las principales ventajas que presenta el método de elementos finitos son: La formulación y los conceptos son conocidos, interpretación física directa, matrices de banda simétrica y aproximación modal. Mientras que las principales desventajas que presenta son que la generación del mallado puede ser difícil y tediosa, e implica un alto número de grados de libertad.

#### 2.2.2.3.2. Método de elementos de contorno (BEM)

El método de elementos de contorno aplicado a problemas acústicos se basa en aplicar el teorema de Green a la ecuación de Helmholtz. Mediante este teorema el problema de tres dimensiones con integración en un volumen puede ser reducido a dos dimensiones con integración superficial. Esto significa que sólo se necesita una discretización de la superficie radiante, en contraposición a la necesidad del FEM de una discretización completa del volumen. El método es empleado dividiendo la superficie radiante en una serie de elementos de superficie en donde se resuelven las ecuaciones de contorno.

El método de elementos de contorno aplicado a problemas de radiación acústica ofrece muchas ventajas frente a otros métodos numéricos. La modelización del sistema es sencilla puesto que sólo hay que modelizar el contorno del volumen, lo cual repercute favorablemente en el coste computacional debido a la reducción del orden del problema. Además, la técnica se ajusta tanto a problemas interiores como a exteriores. Otra de las ventajas que presenta es que no se tiene que calcular la solución en todo el campo sólo en los puntos específicos que se necesite resolver, al contrario que en el método de elementos finitos, donde la solución se debe calcular en todo el dominio. La desventaja del BEM frente al FEM es que las matrices del sistema son asimétricas, por tanto los procedimientos de eficiencia usados en los métodos de elementos finitos (matrices simétricas y banda) no pueden ser aplicados. Esto puede incrementar considerablemente el coste computacional, especialmente para problemas grandes.

Comparando con el método FEM, el método BEM ofrece las siguientes ventajas y desventajas:

Ventajas:

- Fácil generación del mallado (sólo el contorno)
- Pocos grados de libertad
- Se calcula automáticamente y con precisión la radiación acústica

Desventajas:

- Las matrices son pobladas y en muchos casos asimétricas
- El procedimiento modal no es posible
- La interpretación física resulta complicada
- Problemas de no unicidad

El método de elementos de contorno se divide en dos tipos: directo e indirecto. El directo resuelve inmediatamente la presión o la velocidad en la superficie del sistema. El método indirecto determina dos distribuciones del potencial en la superficie; después mediante un postproceso se calculan las velocidades y las presiones en la superficie. Para ambas técnicas existen varios procedimientos de resolución pero los más comunes que se suelen utilizar son el método de colocación o el variacional.

#### *a) Procedimiento directo*

El procedimiento directo de elementos de contorno (DBEM) determina directamente la presión y la velocidad acústica mediante la integral de Helmholtz:

$$p(R) = -\epsilon \int_{S_0} \left( p \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial p}{\partial n} \right) dS \quad (2.41)$$

El término *directo* se refiere al hecho de que la presión en un punto del campo puede ser calculada directamente expresada en términos de presión superficial y su derivada normal (proporcional a la velocidad superficial). Si la distribución de la presión y de la velocidad en la superficie son conocidas el campo de presiones acústicas puede ser calculado. Pero en muchos casos sólo se conoce unas de las condiciones de contorno. En estos casos el método BEM utiliza diferentes soluciones dependiendo de la ecuación de la formulación integral. Para la formulación directa el método más apropiado es el llamado *método de colocación*.

El principio del método de la colocación consiste en acercar el punto  $R$  para el cálculo de la presión a la superficie; de esta forma se puede calcular la presión de la superficie en función de la velocidad superficial.

El método directo no se aplica a problemas de radiación externas, ya que hay problemas de no unicidad en el cálculo de frecuencias. En la frecuencia natural del dominio interior complementario la solución de DBEM no es única, pero varias técnicas han sido desarrolladas para resolver este problema.

#### b) Procedimiento indirecto

En el método de elementos de contorno indirecto (IBEM) las variables de interés no se calculan directamente; este método primero determina la distribución de potenciales en la superficie.

Debido a las singularidades de la integral es difícil aplicar el método de la colocación para evaluar potenciales de fuentes desconocidas. En este caso la formulación variacional es más apropiada, la cual se basa en:

$$p(R) = \int_{S_1} \sigma(R) g(|R - R_0|) dS_1(R_0) - \int_{S_2} \mu \frac{\partial g(|R - R_0|)}{\partial n} dS_2(R_0) \quad (2.42)$$

donde  $\sigma$  es referido al salto de presión y  $\mu$  al salto de la derivada normal de la presión. Y  $S_1$  y  $S_2$  denotan la región la región sobre la cual se aplican la condición de contorno de velocidad o de presión.

Al igual que en DBEM, el IBEM también sufre el problema de solución múltiple en el caso de problemas interiores de frecuencias naturales. La ventaja del uso del procedimiento variacional indirecto es debida a la presencia del salto de la derivada normal. Por esto las condiciones de contorno abiertas pueden ser simuladas. Así, los problemas de interior y exterior pueden ser resueltos conjuntamente.

#### 2.2.2.3.3. Acoplamiento vibro-acústico

Tradicionalmente este tipo de análisis ha estado limitado a uno de métodos finitos, aunque recientemente se han desarrollado técnicas acopladas de métodos de elementos de contorno con el código de elementos finitos estructurales para resolver problemas de radiación en cavidades.

Existen muchas situaciones en las cuales el comportamiento estructural no se puede estudiar independientemente del fluido que lo rodea. Esto ocurre cuando la densidad del fluido acústico tiene una densidad cercana a la estructura vibrante o cuando la cavidad está rodeada de paneles flexibles. El tratamiento numérico del problema elasto-acústico acoplado está basado en la selección de modelos que describen la estructura y el medio acústico con condiciones de interfase (condiciones de continuidad cinemáticas y mecánicas) apropiadas. Generalmente, el dominio del fluido se asume homogéneo y limitado (interior) o ilimitado (exterior). Para un volumen limitado lo más común es aplicar la estrategia de elementos finitos a ambos modelos (fluido finito y estructura). Una técnica común consiste en la utilización de una formulación de desplazamiento del modelo estructural y una formulación de la presión para el modelo acústico. El sistema de ecuaciones de los dos campos acoplados queda:

$$\begin{bmatrix} K_S & C^T \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ \rho C & M_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_p \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

donde los índices  $S$  y  $F$  son respectivamente de estructura y fluido y  $u$  representa el desplazamiento estructural. La matriz  $[C]$  convierte la presión acústica de la interfaz en cargas estructurales y la interfaz de desplazamiento estructural en condición de contorno cinemática del fluido. El resultado de esta formulación es una matriz no simétrica, aunque es posible conseguir una matriz simétrica.

Cuando se tiene un problema exterior acoplado es más común utilizar el método de elementos de contorno para el modelo del dominio del fluido, tanto el procedimiento directo como el indirecto, aunque el método indirecto es más fácil de combinar por su naturaleza simétrica y por la razón de que el fluido interior y exterior pueden ser modeladas simultáneamente. La forma matricial del sistema acoplado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} K_S - \omega^2 M & C^T \\ C^T & H(k) / \rho \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_p \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

donde  $K$  y  $M$  son matrices de masa y de rigidez estructural,  $H(k)$  es el modelo del campo acústico y  $C$  introduce el acoplamiento de los dos sistemas. Como antes,  $u$  es el desplazamiento estructural, mientras que  $\mu$  es el salto de la derivada normal. Los términos  $f_u$  y  $f_p$  representan las cargas estructurales y de fluido, respectivamente.

### 2.3. Técnicas de control acústico estructural

El control acústico estructural consiste en reducir el ruido no deseado que emiten las estructuras vibrantes. Este control se puede realizar bien mediante métodos pasivos o activos. Los sistemas de control pasivo aprovechan las propiedades absorbentes de algunos materiales y no añaden energía adicional al sistema. Pueden absorber energía o cambiar la impedancia del medio para dificultar la propagación del campo acústico. Los métodos pasivos incluyen absorbentes superficiales, silenciadores reactivos, materiales porosos, montajes antivibratorios, resonadores, etc. Las técnicas pasivas se



encuentran en un estado muy maduro y existen soluciones efectivas a frecuencias medias y altas con un coste no excesivamente elevado. Los activos en cambio introducen energía externa al sistema mediante fuentes secundarias que producen un campo de ondas en contrafase con el campo primario.

En los siguientes apartados se comentarán las técnicas pasivas, semiactivas y activas de control acústico estructural; más brevemente las dos primeras por estar fuera del ámbito de este proyecto. Y en el último apartado se comentan brevemente los absorbedores de vibración.

### 2.3.1. Control pasivo

El control pasivo se fundamenta en la modificación de propiedades físicas de la estructura: rigidez, masa y amortiguamiento. Tales cambios se pueden realizar modificando la forma básica de la estructura o añadiendo elementos pasivos como masas, muelles, aislantes de vibraciones, fluidos amortiguantes o materiales de goma. Los métodos pasivos se pueden dividir en tres categorías:

- Aislamiento de vibraciones
- Rediseño estructural
- Incorporación de materiales amortiguantes o aislantes

Las técnicas de rediseño estructural tales como cambios en el material, en la sección transversal, esquinas y ramificaciones son diseños típicos que permiten reducir la propagación de ondas (Cremer, Heckl y Ungar, 1988). Pero estas soluciones generales están limitadas por la pérdida de funcionalidad del elemento modificado de la estructura. Por esta razón una técnica alternativa consiste en introducir materiales amortiguantes (Wilson, 1985).

### 2.3.2. Control semiactivo

Los dispositivos semiactivos esencialmente son pasivos pero donde las propiedades de rigidez, amortiguamiento, etc. pueden ser ajustados en tiempo real; no obstante estos sistemas no introducen una entrada de energía en el sistema controlado. Los dispositivos semiactivos tienen la capacidad de variar las leyes de resistencia con el objetivo de que haya una gran influencia entre la fuerza de control y las leyes de velocidades relativas. Las leyes de resistencia variable se pueden obtener de muchas maneras, por ejemplo mediante válvulas de control de posicionamiento, fluidos reológicos o uniones de fricción actuadas piezoeléctricamente.

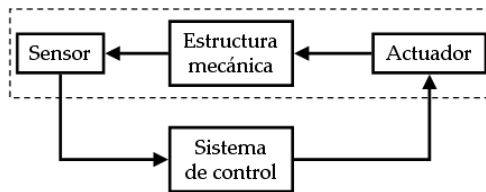
Los fluidos magneto-reológicos experimentan cambios bruscos (del orden de milisegundos) de viscosidad bajo un campo magnético; esto hace que estos fluidos sean muy adecuados para aplicaciones de controladores semiactivos.

Los dispositivos semiactivos se han utilizado en aplicaciones de control de vibraciones como suspensiones de vehículos, terremotos, lavadoras, etc.

### 2.3.3. Control activo

El control activo de ruido estructural consiste en la manipulación de un entorno acústico-estructural mediante unos actuadores que son gobernados por unas leyes de control en función de la información aportada por los sensores.

El conjunto se puede dividir en dos partes: el sistema físico, que consta del entorno acústico-estructural y de los transductores que se acoplan al sistema electrónico, y por otra parte el sistema de control. A toda la estructura activa que consiste en una estructura provista de actuadores y sensores acoplados mediante unas leyes de control también se les denomina con el nombre de estructuras inteligentes (Figura 2.7).



**Figura 2.7:** Estructuras inteligentes

Un sistema de control activo tiene tres componentes principales: (i) sensores de error -cuando la señal de referencia es nula- que suministran una señal proporcional a la cantidad que se minimizará; (ii) los actuadores de control que excitan el sistema físico para reducir al mínimo el error; (iii) un sistema de control que permite determinar la acción del actuador en función de las señales del error. Cuando se controlan las vibraciones de la estructura (*Control Activo de Vibraciones*, CAV) los sensores de error y los actuadores de control empleados siempre son transductores estructurales. En el control activo de ruido (*Control Activo de Ruido*, CAR) los sensores y los actuadores habitualmente son transductores acústicos (micrófonos, altavoces...). Como alternativa frente a la utilización de transductores acústicos para reducir el ruido radiado por estructuras vibrantes es posible aplicar entradas mecánicas directamente sobre la estructura, es decir, la utilización CAV. Esta técnica, denominada *Control Activo Acústico Estructural* (CAAE), fue introducida por primera vez por Fuller (1990). En la figura 2.8 pueden verse los diversos tipos de controles activos mencionados.

En CAR ha habido varios trabajos para reducir el ruido en diferentes entornos, por ejemplo en los conductos de aire acondicionado de un vehículo ferroviario (Egaña, Díaz y Viñolas, 2003; Egaña, 2003) o en la cabina de una furgoneta (Bravo y Cobo, 2002).

La mayoría de los casos en los que se ha aplicado CAAE ha sido en vigas apoyadas, viga empotrada-empotrada, viga empotrada-libre o en placas simplemente apoyadas. Pero también existen casos en los cuales se ha intentado aplicar un sistema CAAE en estructuras con condiciones de contorno más reales. En este tema las situaciones más

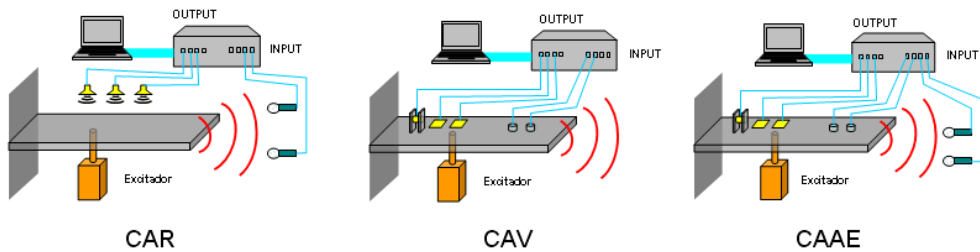


Figura 2.8: Tipos de controles activos

prácticas siempre han sido implementadas en condiciones de laboratorio.

Paxton (1997) aplicó las técnicas de CAAE en el fuselaje de un avión Cessna Citation III utilizando como actuadores parches piezoeléctricos posicionados de forma óptima mediante algoritmos genéticos, como sensores de error utilizó seis micrófonos y como sensor de referencia utilizaron la señal de la fuerza primaria (aplicado en el motor del avión). Asimismo como técnicas de control utilizaron un sistema *feedforward* adaptativo filtro X-LMS. Observaron que a la frecuencia de resonancia de 125 Hz (que era la más dominante para radiar ruido) obtenían las mejores reducciones con una media de reducción global de 4dB en la cabina del fuselaje. Fuera de la frecuencia de resonancia (170 Hz) las reducciones globales eran inferiores (1,5 dB) que en la frecuencia de resonancia.

#### 2.3.4. Absorbedores de vibración

El uso de los absorbedores de vibración es una técnica adoptada para reducir las amplitudes de vibración en una estructura o máquinas vibrantes en una frecuencia de resonancia. Un absorbedor consiste en una masa auxiliar unida a la estructura a amortiguar mediante un resorte y un elemento disipativo *colocalizados* en paralelo. Este tipo de absorbedores se denominan con el nombre de absorbedores pasivos de vibración, ya que no introducen ninguna energía adicional al sistema. Con este tipo de absorbedores se tiene que tener en cuenta que la respuesta del sistema en la frecuencia de resonancia original se atenúa pero a costa de dos nuevos picos de resonancia de menor amplitud. La principal desventaja es la necesidad de ajustar los parámetros del sistema auxiliar, pues pequeños errores en el ajuste pueden ocasionar problemas de funcionamiento, con lo cual la eficiencia del dispositivo en la reducción de vibraciones disminuye enormemente.

Para superar los problemas descritos en el apartado anterior por los absorbedores pasivos de vibración existen los absorbedores activos. Estos se basan en la utilización de un elemento activo, posicionado entre la estructura y la masa auxiliar, que introduce una fuerza variable suministrada por un sistema de control que procesa la señal obtenida del movimiento de la estructura, que es la que proporciona la reacción inercial. Las principales ventajas que presentan las técnicas activas frente a los absorbedores pasivos son que los sistemas activos son capaces tanto de suministrar como

de disipar energía del sistema, debido a que no es necesario actualizar los parámetros asociados a los elementos pasivos del absorbedor en cada instante, y que los sistemas de control pueden ser adaptativos en un amplio intervalo.

Los absorbedores activos han sido usados (Bruce y Keith, 1996) en un prototipo de una barra de mandrilar con el objetivo de suprimir las vibraciones y el chatter; objetivo para el cual utilizaron piezoeléctricos.

## 2.4. Componentes principales de un sistema de control

Los componentes principales de un sistema de control activo son los sensores de error, los actuadores y el sistema de control. A continuación se tratan más en profundidad cada uno de estos elementos.

### 2.4.1. Leyes de control

Existen dos tipos de técnicas diferentes para controlar la respuesta de un sistema: *feedback* y *feedforward*; aunque es posible también combinar las dos. Es importante precisar las características de ambas estrategias para permitir al usuario seleccionar la más adecuada en cada caso.

#### 2.4.1.1. *Feedback*

El principio de control en lazo cerrado se representa en la figura 2.9; en ella se puede observar que en presencia de perturbaciones la salida  $y$  del sistema se compara con la entrada de referencia  $r$  obteniendo la señal del error  $e = r - y$ , la cual se hace pasar por un compensador  $H(s)$  para finalmente aplicar el resultado sobre el sistema  $G(s)$ . La dificultad del diseño del control consiste en encontrar un compensador apropiado  $H(s)$  tal que el sistema en circuito cerrado sea estable y se comporte de manera apropiada.

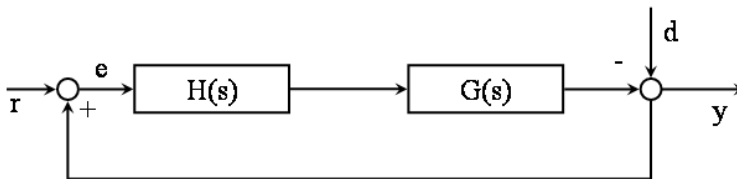


Figura 2.9: Principios del control *feedback*

En la figura 2.9 se muestra un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un

sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse de forma independiente y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa.

Considerando el sistema de la figura 2.9 para examinar sólo el efecto de la perturbación  $d$  se puede suponer que el sistema está inicialmente relajado (con un error cero); la función de transferencia que se obtiene en este caso entre la respuesta  $y$  y la perturbación es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + GH(s)} \quad (2.45)$$

Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada de referencia  $r$  suponiendo que la perturbación es cero, entonces la respuesta a la entrada de referencia se obtiene a partir de:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{GH(s)}{1 + GH(s)} \quad (2.46)$$

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales:

$$y(s) = \frac{1}{1 + GH(s)} [GH(s)r(s) + d(s)] \quad (2.47)$$

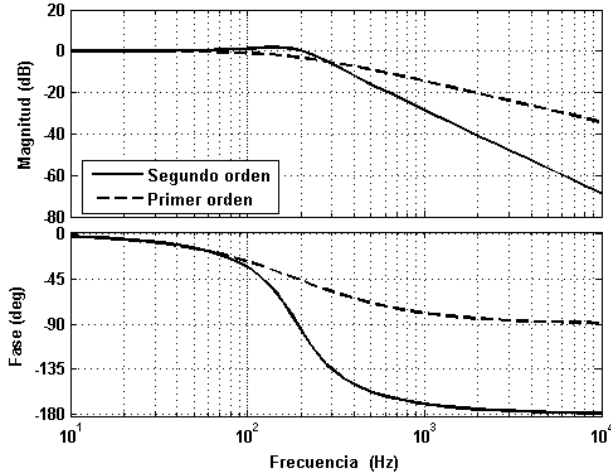
Considerando el caso en que  $|GH(j\omega)|$  es mucho mayor que la unidad (expresión 2.45), la ganancia de la FRF en lazo cerrado  $y(s)/d(s)$  tiende a cero y en consecuencia se suprime el efecto de la perturbación. Esta ventaja del sistema de lazo cerrado se utiliza con el propósito de conseguir un control de *amortiguamiento activo*, cuyo objetivo es reducir los picos de resonancia de la respuesta de la estructura.

El amortiguamiento activo se puede alcanzar generalmente con ganancias moderadas, sin un modelo de la estructura y con una estabilidad garantizada, a condición de que el actuador y el sensor utilizados tengan una dinámica perfecta. Los actuadores y los sensores siempre tienen una dinámica finita y cualquier sistema en el que se realiza un amortiguamiento activo tiene un ancho de banda finita.

Entre las técnicas de control de amortiguamiento activo las más empleadas son: DVF (*Direct Velocity Feedback*), IFF (*Integral Force Feedback*), PPF (*Positive Position Feedback*) y AFC (*Acceleration Feedback Control*).

En comparación con los DVF e IFF de primer orden, en los que la magnitud a altas frecuencias tiene una pendiente de -20dB/década y una fase de -90°, los AFC y PPF de segundo orden tienen una pendiente de -40dB/década y una fase de -180°. La ventaja que presentan los filtros de segundo orden en los sistemas con poco amortiguamiento es que disminuyen el riesgo de inestabilizar los modos de orden superior. También hay una diferencia entre el PPF y el AFC: el PPF no es incondicionalmente estable aunque el sistema de control sea *colocalizado*, el AFC sí (Preumont, 2002).

En la figura 2.10 se representan un filtro de primer orden (expresión 2.48) y otro de segundo (2.49) a la misma frecuencia de corte ( $\omega_c$ ) en ambos para resaltar la diferencia en la pendiente y en la fase de los dos filtros.



**Figura 2.10:** Filtros de control de primer y segundo orden

$$H(s) = \frac{g_c}{s + \omega_c} \quad (2.48)$$

$$H(s) = \frac{g_c}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \quad (2.49)$$

La ventaja del controlador AFC de segundo orden es que no necesita un modelo exacto del sistema ni de las cargas externas. Además el AFC tiene la característica de que en cada función de transferencia del controlador el denominador es dos grados mayor que el numerador; razón por la cual a altas frecuencias el controlador tiene una pendiente de -40dB/década y su fase a esas frecuencias es de -180 grados, aspecto muy beneficioso para los controladores *no-colocalizados* debido a que presentan menos riesgo de inestabilizar los modos de mayor orden. Además, las ecuaciones de movimiento del sistema y del controlador en lazo cerrado pueden ser escritas de manera similar en la forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

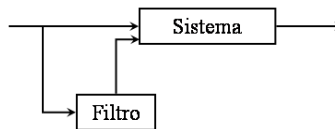
Por otra parte, considerando la función de transferencia en presencia de una señal de referencia,  $y(s)/r(s)$  se aproxima a 1 conforme se aumenta la ganancia  $|GH(j\omega)|$ ; siendo otra de las ventajas del lazo cerrado que cualquier sistema con una realimentación unitaria tiende a hacer iguales la entrada y la salida.

En general, para lograr este objetivo se necesita una estrategia más elaborada, lo que implica un modelo matemático del sistema, que en el mejor de los casos puede ser una aproximación pobre del sistema real,  $G(s)$ . Existen muchas técnicas disponibles para encontrar el compensador apropiado: clásicas (compensación de adelanto,

PID...), espacio de estado (asignación de polos, filtro de Kalman,), de control óptimo (LQR, LQG...) o de control robusto ( $H_\infty$  ...).

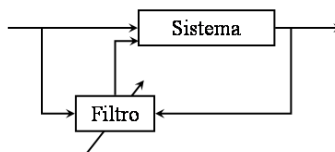
### 2.4.1.2. *Feedforward*

Cuando se dispone de una medida de la perturbación, la estrategia *feedforward* constituye una alternativa atractiva frente al *feedback* para conseguir reducciones de los efectos producidos por la perturbación. Originalmente la técnica fue desarrollada para el *control de ruido*, pero también ha sido demostrada su eficiencia en *control de vibraciones*. Esta estrategia se basa en una señal de referencia correlacionada con la perturbación primaria del sistema; esta señal se hace pasar a través de un filtro y por último la señal de salida se aplica al sistema mediante fuentes secundarias (figura 2.11).



**Figura 2.11:** Principio del control *feedforward*

En los casos en los que existan variaciones en las condiciones acústico-estructurales del sistema se emplea el método *feedforward* adaptativo (figura 2.12), el cual actualiza dinámicamente los coeficientes del filtro mediante un algoritmo adaptativo, para que el controlador pueda seguir cualquier variación de las condiciones acústico-estructurales. Este método originalmente fue desarrollado para el control de ruido (Nelson y Elliott, 1992), pero también es muy eficiente para el control de vibraciones y el control acústico estructural (Fuller et al., 1997).



**Figura 2.12:** Principio del control *feedforward* adaptativo

La actualización de los coeficientes del filtro se realiza para minimizar la señal de los sensores de error en uno o varios puntos críticos. La idea global de la técnica es producir una perturbación secundaria tal que cancele el efecto de la perturbación primaria en las posiciones de los sensores de error. Con esta estrategia no hay garantía de que la respuesta global sea reducida en otras posiciones, donde no esté el sensor de error, a menos que la respuesta esté dominada por un solo modo. Por otra parte, puede haber posiciones en las cuales la respuesta se amplifique; el método se puede por lo tanto considerar como local, en contraste con el *feedback* que es global. *Feedfor-*

*ward* trabaja para cualquier frecuencia e intenta cancelar la perturbación totalmente generando una señal secundaria en contrafase.

El método de *feedforward* no necesita un modelo del sistema, pero el *feedforward* adaptativo necesita la respuesta del sistema obtenida mediante los sensores de error para poder actualizar los coeficientes de los filtros. El *feedforward* trabaja mejor para las perturbaciones de banda estrecha, pero también se ha divulgado su uso en banda ancha. Debido a que es menos sensible al retraso de la fase que el *feedback*, el control *feedforward* se puede utilizar a frecuencias mayores (una buena regla es  $\omega_c \omega_s / 10$ ,  $\omega_c$  el ancho de banda controlada y  $\omega_s$  la frecuencia de muestreo), la razón por la cual ha sido tan bueno en acústica.

La limitación principal del *feedforward* adaptativo es conseguir una señal de referencia correlacionada con la perturbación. Existen muchas aplicaciones donde se obtiene una señal de referencia correlada con la perturbación (la maquinaria rotativa, un tren del impulso generado por la rotación del eje principal,...) que se pueden utilizar como señales de referencia.

#### 2.4.1.3. Comparación de las dos estrategias

La diferencia básica entre las dos estrategias es que el sistema *feedforward* requiere una cierta medida a priori (acústica o vibratoria) mientras que en el *feedback* la señal procedente del sensor de error sirve al controlador para modificar la respuesta con el objetivo de conseguir que el valor eficaz de la señal de error sea mínimo.

Los sistemas *feedforward* son intrínsecamente estables, el cual es una característica muy diferente con los sistemas de control *feedback*. La única causa de inestabilidad que puede surgir en la configuración de *feedforward* es en los casos adaptativos, donde el algoritmo adaptativo diverja.

En el control activo de ruido la configuración de *feedback* sólo se aplica cuando no es posible conseguir una señal de referencia ya que esta configuración tiene las siguientes limitaciones: son sistemas realimentados y potencialmente inestables.

La tabla 2.1 resume las diferencias principales de las dos estrategias (Preumont, 2002).

En numerosos trabajos de CAAE (De Man, François y Preumont, 2003) han sido utilizadas dos estrategias de control: “*feedforward* X-filtered LMS”, ya que ofrece mejores prestaciones con perturbaciones armónicas, y por otra parte LQR, control *feedback* óptimo.

La técnica LQR se ha utilizado en ASAC con el objetivo de disminuir la potencia acústica radiada, en el cual se define como función de coste la energía de radiación de la estructura.

Baumann, Saunders y Robertshaw (1991) presentaron unos resultados numéricos de la aplicación del control óptimo para controlar el ruido radiado en una viga excitada por un impulso de corta duración. La viga, de acero de  $1 \times 0.125$  m, se supuso que era no amortiguada, empotrada en los dos extremos y soportada en un deflector infinito.



Tipo de control	Ventajas	Desventajas
<b><i>feedback</i></b>		
Amortiguamiento Activo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No necesita el modelo.</li> <li>- Garantiza la estabilidad cuando está <i>colocada</i>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sólo es efectivo cerca de la frecuencia de resonancia.</li> </ul>
Basado en el modelo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Método global.</li> <li>- Atenúa todas las perturbaciones hasta <math>\omega_c</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Necesita el modelo.</li> <li>- Ancho de banda limitado <math>\omega_c \ll \omega_s</math>.</li> <li>- Fuera de <math>\omega_c</math> amplía las perturbaciones.</li> <li>- <i>Spillover</i>.</li> </ul>
<b><i>feedforward</i></b>		
Filtrado adaptativo con referencia	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No necesita el modelo.</li> <li>- Mayor ancho de banda.</li> <li>- Trabaja mejor para perturbaciones de banda estrecha.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Necesita una señal de referencia.</li> <li>- Método local.</li> <li>- Alto coste computacional en tiempo real.</li> </ul>

**Tabla 2.1:** Comparación de estrategias de control

Para simplificar supusieron que la estructura y el ruido radiado podrían ser modelados utilizando solo los tres primeros modos. Colocaron el actuador en la mitad de la viga y definieron la fuerza secundaria. Observaron que utilizando esta estrategia tanto el primer modo (volumétrico) como el tercero eran mucho más amortiguados. Esto era porque el segundo modo actúa como un dipolo acústico en una frecuencia cercana a su frecuencia natural y no es eficiente para radiar ruido. El control de este modo aportaba poca reducción en la energía total acústica radiada.

### 2.4.2. Actuadores

Cualquier sistema para controlar ruido o vibraciones debe tener unos actuadores de control que sean capaces de excitar el sistema físico. Los actuadores más utilizados en control de vibraciones y control acústico estructural son los piezoeléctricos, dada su buena conversión, ancho de banda, control lineal y buena integridad. También se emplean otros actuadores como los: hidráulicos, neumáticos, *mass proof*, electrodinámicos, electromagnéticos, magnetostrictivos, aleaciones con memoria de forma y fluidos electroreológicos. Los criterios que se tienen en cuenta para la elección de un actuador son las propiedades mecánicas, eléctricas y su coste.

En los siguientes apartados se comentan los tipos de actuadores, detallando más

los actuadores piezoeléctricos, que son los que se van a utilizar en la tesis.

#### **2.4.2.1. Actuadores hidráulicos**

Una de las ventajas de este tipo de actuadores es su capacidad de generar grandes fuerzas y desplazamientos para unas dimensiones del actuador relativamente pequeñas. Las desventajas son la necesidad de tener una toma hidráulica que puede ser muy ruidosa y la no-linealidad entre la entrada de voltaje a la servo-válvula y la salida del actuador. Además es extremadamente importante que la servo-válvula vaya montada lo más cerca posible del cilindro hidráulico para minimizar las pérdidas de rendimiento, especialmente a altas frecuencias (a partir de 20 Hz).

En el pasado los actuadores hidráulicos han sido empleados, por ejemplo, como suspensiones activas de vehículos (Stayner, 1998) y como control de vibraciones en la cabina de helicópteros (King, 1991). Recientemente han sido aplicados también en ingeniería civil, como por ejemplo en puentes (Preumont, 2002).

#### **2.4.2.2. Actuadores neumáticos**

Los actuadores neumáticos en funcionamiento son muy similares a los hidráulicos, excepto en que el fluido hidráulico es sustituido por el aire. La mayor desventaja de este tipo de actuadores es su relativamente bajo ancho de banda (menos que 10 Hz) debido a la compresibilidad del aire. No obstante ha habido casos en los que se han empleado con éxito, como en la suspensión activa de vehículos ferroviarios (Cho y Hedrick, 1985).

#### **2.4.2.3. Actuadores *mass-proof***

Este tipo de actuadores constan de una masa que es libre de deslizarse a lo largo de una pista. La masa es acelerada utilizando un campo electromagnético o conectándola con un husillo de bolas. Uno de los problemas de este tipo de actuadores lineales es el desplazamiento limitado de la masa de reacción, problema que se agrava cuando los modos de orden bajo son los controlados. Sin embargo, el problema es mucho menor para el husillo de bolas ya que se pueden producir grandes fuerzas en la masa sin que haya movimientos grandes.

#### **2.4.2.4. Actuadores magnetostrictivos**

El fenómeno en el que se basan se presenta cuando los sólidos cristalinos, compuestos de hierro y de elementos de las tierras raras, son sometidos a un campo magnético. El compuesto más conocido es el terfenol, que es una aleación de terbio (Tb), disprosio (Dy) y hierro. La propiedad más destacable de estos materiales es su gran capacidad para producir elevadas tensiones (10 veces superiores a los piezoeléctricos) y su alta

densidad de energía (100 veces más que los piezoeléctricos). La tensión máxima teórica posible obtener es de 2440  $\mu$ tensiones, aunque en la práctica es de 1400.

Una de las desventajas del terfenol es que es muy frágil y se debe manejar muy cuidadosamente. Su resistencia a tracción es baja (100 MPa), aunque su resistencia a compresión es razonablemente grande (780 MPa). Otra desventaja importante es su baja capacidad de desplazamiento, lo cual es un problema en control de vibraciones a bajas frecuencias. Aun y todo la principal desventaja de estos materiales es la histéresis, por lo cual como resultado de aplicar un voltaje de entrada lineal se obtiene una fuerza de actuación no lineal. Aunque esto es un problema serio en la actualidad para los sistemas de control de vibraciones, se espera que cuando los controladores no lineales sean desarrollados completamente puedan ser usados con este tipo de actuadores no lineales.

Otra de las ventajas del terfenol es su alta capacidad de producir fuerza para un coste relativamente bajo. También su pequeño tamaño y ligereza, lo cual hace que estos actuadores sean ideales cuando no haya necesidad de reacción de la masa.

#### **2.4.2.5. Aleaciones con memoria de forma**

Es un material que tiene la propiedad de deformarse y de recuperar su forma predefinida; efecto basado en un cambio de fase sólido-sólido. El proceso de recuperación de la forma original está asociado a un cambio de fase de la estructura cristalina de martensita a austenita. La aleación con memoria de forma más usada en sistemas de control activo es el nitinol, el cual está compuesto de níquel y titanio. En la transformación de la fase de martensita a austenita el módulo de elasticidad del nitinol se incrementa en un factor de tres (de 25 a 75 GPa) y su capacidad de producción de fuerza aumenta en un factor de ocho (de 80 a 600 MPa). Una de sus desventajas es que sufren histéresis.

#### **2.4.2.6. Fluidos electrorreológicos**

Uno de los fluidos electrorreológicos más conocidos es un tipo de aceite dieléctrico dopado con partículas semiconductoras. Estos experimentan cambios de viscosidad bajo un campo eléctrico. Una de las principales aplicaciones de estos actuadores en control de vibraciones es la de proporcionar un amortiguamiento variable para suspensión de vehículos semiactivos. Los inconvenientes de este tipo de actuadores son el gran tiempo de respuesta (3-5 ms) y el alto voltaje que se necesita para activarlos (2-10 kV).

#### **2.4.2.7. Actuadores piezoeléctricos**

El fenómeno piezoeléctrico consiste en la aparición de una polarización (o campo eléctrico interno) o una variación de una polarización ya existente en ciertos cristales dieléctricos por la deformación elástica producida por fuerzas mecánicas. Este fenóme-

no es reversible, es decir, si se aplica un campo eléctrico al material, éste sufre una deformación. Por lo tanto, los materiales piezoeléctricos pueden ser utilizados tanto para convertir energía mecánica en eléctrica, y viceversa.

Los compuestos naturales que más se utilizan para elaborar actuadores son el titanato de bario ( $\text{BaTiO}_3$ ), zirconato de plomo ( $\text{PbZrO}_3$ ) y zirconato titanato de plomo (PZT).

Este tipo de actuadores se pueden diseñar con la forma deseada, pero los que más se utilizan se pueden dividir en dos categorías atendiendo a su forma: placas finas o parches y de tipo pila o gruesos.

#### 2.4.2.7.1. Piezoeléctricos de placas finas o parches

En las placas finas se pueden diferenciar dos categorías: placas piezocerámicas (por ejemplo de PZT) y película delgada de piezoeléctricos (PVDF). Las placas finas se suelen utilizar pegadas a la estructura para generar momentos de flexión sobre la estructura.

Para controlar con CAAE el ruido que radia cualquier estructura es necesario que el actuador adherido a su superficie sea capaz de excitar con suficiente nivel aquellas ondas estructurales causantes de la radiación, es decir, las ondas de flexión. Lo que interesa es que el actuador genere en la estructura un desplazamiento vertical. Con el fin de generar esta vibración se aprovecha la deformación horizontal que experimenta el actuador bajo un voltaje en la dirección transversal.

En CAAE los actuadores piezoeléctricos se utilizan en parejas para conseguir ondas de flexión. Si sólo se coloca una única cerámica se genera un movimiento estructural híbrido (ondas de flexión y longitudinales). Cuando se usan dos cerámicas se obtienen vibraciones puras (longitudinales o de flexión) y dependiendo de qué voltaje se les aplica están en fase o en contrafase. Para generar ondas de flexión en la estructura se deben excitar estas cerámicas en contrafase, de forma que los movimientos horizontales de cada uno de los lados de la placa sean contrarios. Esto se convierte en una serie de compresiones y de tracciones horizontales que provocan la flexión de la estructura. Si se excitan en fase el movimiento que se obtiene es puramente longitudinal, y por tanto no es capaz de radiar ruido (Dimitriadis, Fuller y Rogers, 1991; Gibbs y Fuller, 1992; Clark, Fleming y Fuller, 1993).

Para PZT comerciales  $d_{31}$  (constante de deformación piezoeléctrico, donde el primer índice indica la dirección del campo eléctrico y el segundo la dirección de la deformación o de la tensión) suele ser del orden de  $166 \cdot 10^{-12}$ ; mientras que para las películas de PVDF sólo es de  $23 \cdot 10^{-12}$ . También el módulo de elasticidad para un PZT es de  $63 \cdot 10^9 \text{Nm}^{-2}$ , y para un PVDF es de  $2 \cdot 10^9 \text{Nm}^{-2}$ . Como la tensión inducida en el elemento de una estructura es proporcional al producto de  $d_{31}$  y  $E$  (campo eléctrico), se deduce que para un mismo espesor del actuador y una misma tensión, el PZT produce una tensión 150 veces mayor que el PVDF. Sin embargo hay que tener en cuenta que la máxima tensión aplicable en un PVDF es 25 veces mayor que para un PZT.

A finales del siglo pasado, Fuller (1990), con el objetivo de reducir el ruido radiado por una placa circular simplemente soportada realizó un experimento de control activo de vibraciones utilizando como fuente secundaria de control un excitador puntual. Como conclusión observó que con los sensores de error acústicos obtenía mejores resultados que con los sensores de vibración posicionados sobre la estructura.

Las primeras investigaciones de CAAE se centraron en la manera de actuar sobre la estructura vibrante. Fuller, Hansen y Snyder (1991) estudiaron la utilización de un único actuador PZT cerámico en una placa rectangular simplemente soportada y un sensor de error en el campo lejano. Observaron que conseguían una atenuación global del ruido radiado. Wang, Fuller y Dimitriadis (1991) continuaron con el trabajo de Fuller, pero en vez de un único actuador utilizaron varias fuentes de control. Contrastaron experimentalmente la utilización de múltiples PZT y un control de fuerza puntual (excitadores de fuerza puntuales). Concluyeron que los excitadores de fuerza puntuales producían mejores resultados, pero los actuadores PZT tenían ventajas prácticas en términos de espacio necesario.

Dimitriadis et al. (1991) realizaron un análisis teórico de actuadores PZT; estudiaron la posibilidad de darles una forma predeterminada para excitar ciertos modos estructurales. Tanaka y Kikushima (1999) demostraron que los actuadores PZT trabajaban peor que los actuadores puntuales electrodinámicos tradicionales. Estos observaron que eligiendo cuidadosamente el posicionamiento de los actuadores y sensores puntuales se podían obtener mejores resultados que con los actuadores y sensores distribuidos.

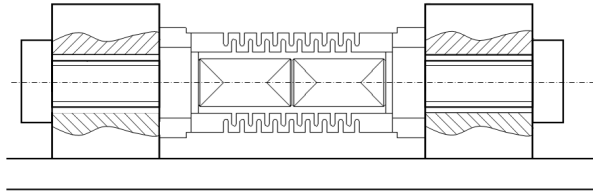
#### 2.4.2.7.2. Actuadores piezoeléctricos de tipo pila

En las aplicaciones reales si no se utilizan grandes cantidades de pastillas de PZT la fuerza de control no es tanta como se necesita. Los actuadores de pila pueden generar más fuerza de control ya que utilizan el coeficiente  $d_{33}$  frente al  $d_{32}$  que utilizan los PZT de pastilla. Pero además, el aumento de la fuerza resultante del actuador pila, a parte de por utilizar el coeficiente  $d_{33}$ , es debido a la acumulación de reacciones en serie de capas de PZT.

Los actuadores de pila aplican una fuerza sobre un área muy pequeña y se utilizan generalmente de manera similar a un vibrador electromagnético o a un actuador magnetostrictivo. Uno de los problemas para la aplicación de piezocerámicos de pila es que necesitan un soporte para el actuador. Pero esta desventaja se puede eliminar utilizando una configuración de actuador en donde se puedan crear momentos de flexión sobre la estructura.

Los actuadores pila han sido utilizados con mucho éxito en control de vibraciones. Este tipo de actuadores han sido empleados, por ejemplo, como elementos activos para suprimir vibraciones en estructuras con barras (Preumont, 2002). También han sido utilizados para generar cargas puntuales en placas para control de vibraciones, colocándolos entre la placa y una pieza de refuerzo. Así, Bayon de Noyer (1999) utilizó un actuador pila posicionado paralelamente en una viga empotrada-libre, como

se puede observar en la siguiente figura, para producir momentos de flexión. Esta investigación lo llevó a cabo con el objetivo de utilizarlo en la cola de un avión para disminuir sus vibraciones. Aizpuru y Abete (2005) utilizaron la misma configuración para reducir el ruido radiado por una viga empotrada libre mediante control modal.



**Figura 2.13:** Actuador piezoeléctrico situado paralelamente a la viga

#### 2.4.2.7.3. *Composites activos*

Actualmente existen compuestos avanzados de materiales cerámicos piezoeléctricos que presentan algunas ventajas frente a los piezocerámicos monolíticos. No obstante, debido principalmente a su naturaleza frágil hace que sean vulnerables a accidentes de rotura durante su manipulación y pegado. Señalar también su limitación para conformarse en superficies curvadas.

La idea de los compuestos avanzados consiste en incluir fibras activas de piezocerámicos embebidos en una matriz polimérica. Algunos de los compuestos avanzados que existen son el: *1-3 Composite* fabricado por Smart Material Corporation y usado normalmente en aplicaciones de control ultrasónicas, el *Active Fiber Composite* (AFC) desarrollado en el MIT con el propósito de control estructural, y el *Macro Fiber Composite* (MFC) desarrollado por la NASA también con propósito estructural.

#### 2.4.2.8. Comparación de los actuadores

Los actuadores piezoeléctricos PZT son extensamente empleados debido a sus altos coeficientes piezoeléctrico, dieléctrico y de elasticidad (Crawley, 1994). La actuación y la lectura se realizan mediante una señal eléctrica, y su comportamiento lineal permite modelizar el comportamiento de los transductores. Además, su alta rigidez da una densidad de energía adecuada y su rápida respuesta en el tiempo permite anchos de banda amplios. En comparación (tabla 2.2) otros materiales de actuación son menos adecuados para su aplicación en control de ruido y vibraciones (Gopinathan, 2001).

Los parches piezopolímeros (PVDF) son robustos al daño, pero carecen de alta rigidez. Los materiales electrostrictivos (PMN) tienen una pérdida de histéresis baja y una rigidez alta, pero tienen una temperatura de estabilidad baja y requieren una corriente alta para operar debido a su alto coeficiente dieléctrico. Los de memoria de forma (Nitinol) producen grandes tensiones, pero están limitados a un ancho de

	<b>PZT 5H</b>	<b>PVDF</b>	<b>PMN</b>	<b>Terfenol D</b>	<b>Nitinol</b>
Mecanismo de actuación	Piezocerámico	Piezo-polimérico	Electro-estrictivo	Magneto-estrictivo	Memoria de forma
Deformación máxima	0,13 %	0,07 %	0,1 %	0,2 %	2 % – 8 %
Módulo de Young (GPa)	60,6	2	64,5	29,7	75 temp. ↓ 28 temp. ↑
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	7500	1780	7800	9250	7100
Rango temp. (°C)	-20 a 200	baja	0 a 40	alta	-
Rango frecuencia	0-1000 MHz	0-10 MHz	100 KHz	<10 kHz	<5 Hz
Densidad de energía	6,83	0,28	4,13	6,42	252-4032

**Tabla 2.2:** Comparación entre algunos materiales empleados en actuadores

banda de aplicación muy bajo debido al tiempo requerido para la disipación térmica. Finalmente, los actuadores magnetoestrictivos (Terfenol-D) tienen una densidad de energía de actuación y un ancho de banda similar a los piezoeléctricos, pero presentan la desventaja de que son extremadamente frágiles y se pueden generar grietas después de un prolongado periodo de actuación. Además, el campo magnético requerido para inducir una tensión en el Terfenol-D es muy grande y probablemente podría requerir niveles altos de potencia de entrada, así como un generador de campo magnético voluminoso y pesado (Ellison, 2004).

### 2.4.3. Sensores

Otro de los componentes principales de un sistema de control es el sensor de error, el cual da una señal proporcional a la cantidad que se trata de minimizar, determinando así la acción del actuador.

Como sensores de error los micrófonos *colocalizados* en el campo lejano dan buenos resultados, ya que la potencia acústica radiada por la estructura está directamente relacionada con la presión que miden los micrófonos, pero muchas veces su aplicación en casos reales es impracticable. Actualmente se tiende a desarrollar estrategias CAAE donde los actuadores y los sensores están montados sobre la estructura. Por esta razón, la tendencia es a sustituir estos micrófonos por sensores estructurales. En el caso en el que el sensor de error esté integrado dentro de la estructura dicho sensor deberá observar variables relacionadas con la radiación del campo lejano, es decir tendrá que medir directamente aquellas variables que contribuyen a la radiación acústica en el campo lejano.

Para radiadores planos de ruido es bien conocido que a bajas frecuencias la radiación de ruido está directamente relacionada con la forma de la distribución de velocidades sobre la estructura (Guigou, Berry, Charette y Nicolas, 1996). Así, cier-

tas distribuciones de velocidades correspondientes a unos modos de vibración son las más eficientes para la radiación. Estos autores observaron que la relación que existe entre la distribución de velocidad estructural y la radiación del ruido al campo lejano a bajas frecuencias hace necesaria la utilización de un filtro modal que seleccione los modos estructurales que tengan mayor eficiencia de radiación. Esta estrategia ha sido aplicada por numerosos autores en diversas técnicas: filtrado modal (Baumann, Ho y Robertshaw, 1992; Clark y Fuller, 1992), sensores en el dominio de número de onda (Maillard y Fuller, 1994; Maillard y Fuller, 1995; Sommerfeldt y Scott, 1994) y modos radiantes (Elliott y Johnson, 1993; Cazzolato y Hansen, 1998).

Este filtrado modal podría realizarse, bien con sensores puntuales (acelerómetros, micrófonos en el campo próximo), que requieren un adecuado filtrado modal de la señal antes de introducir la señal en el sistema de control, o bien con sensores distribuidos (láminas de PVDF), los cuales realizan un filtrado espacial mediante la forma geométrica especial de los sensores.

#### 2.4.3.1. Sensores puntuales

En CAAE los sensores puntuales que se emplean suelen ser sensores estructurales (acelerómetros) o acústicos (micrófonos *colocalizados* en el campo cercano). Estos sensores se pueden utilizar para detectar variables que están relacionadas con la potencia acústica: modos estructurales, modos acústicos o el desplazamiento volumínico de la placa.

##### 2.4.3.1.1. Amplitudes modales estructurales con un vector de sensores puntuales

Para calcular las amplitudes modales estructurales se debe colocar un vector de sensores, cuyo número de acelerómetros y sus posiciones dependen del número de modos estructurales que se deseen medir. Para calcular las amplitudes modales se debe incluir un filtrado consistente en la extracción de amplitudes modales a partir de unas medidas estructurales con un vector de sensores; para lo cual anteriormente se deben calcular los modos de vibración. Esta técnica es denominada filtrado modal (Baumann et al., 1992; Fuller et al., 1997; Hansen y Snyder, 1997).

##### 2.4.3.1.2. Amplitudes modales acústicas con un vector de sensores puntuales

El cálculo de las amplitudes modales acústicas es una particularización del cálculo anterior.

Cazzolato y Hansen (1998) diseñaron sensores puntuales para medir los modos radiantes en un cilindro utilizando acelerómetros. Posteriormente a la señal le aplicaron un filtrado modal, el cual utilizaron para descomponer la señal de la velocidad en las amplitudes modales de los modos de radiación; a continuación aplicaban un filtro frecuencial para tener en cuenta la dependencia frecuencial de los modos de radiación. También demostraron que para calcular los modos de radiación de un cilindro



(estructura tridimensional compleja) se necesitaban muchos más modos de vibración que en un caso plano. El sistema de control que utilizaron se basaba en un controlador *feedforward* adaptativo incluido en el sistema comercial EZ-ANC. Además también observaron que a la frecuencia de 117 Hz más modos de radiación contribuían significativamente en la potencia de transmisión, por tanto necesitaban medir más modos para que el sistema de control operase de igual manera a cualquier frecuencia.

#### 2.4.3.1.3. *Sensor en el dominio de número de onda con un vector de sensores puntuales*

Muchas veces es ventajoso estimar directamente los componentes del movimiento de una estructura en el dominio de número de onda. Como se ha indicado anteriormente, la radiación de ruido al campo lejano está directamente relacionada con los componentes de número de onda de la estructura; por tanto una de las técnicas consiste en utilizar sensores que proporcionen información de las medidas estructurales en el dominio de número de onda para poder minimizar los componentes supersónicos en dicho dominio (Maillard y Fuller, 1994). Para construir un sensor en el dominio de número de onda se necesita medir el movimiento en un número de puntos y aplicar la transformación de Fourier. Señalar que este método se aplica a una frecuencia determinada y que es un método en el dominio de la frecuencia.

#### 2.4.3.1.4. *Acelerómetros para expresar la velocidad volúmica y la presión acústica*

Otras de las técnicas que se utilizan se basan en pasar la señal recogida por los acelerómetros a través de un filtro digital para estimar la presión acústica radiada al campo lejano en una dirección concreta. Normalmente el filtro digital es un *impulso finito* (FIR) que implementa la *función de Green* asociada con cada sensor. Esta técnica se denomina con las siglas DSAS (*Discrete Structural Acoustic Sensing*). Con esta configuración, mediante unos pocos acelerómetros se puede estimar el ruido radiado en un ancho de banda correspondiente a los primeros modos de vibración. Esto permite disminuir el número de coeficientes del filtro y por tanto reducir la carga computacional del procesador matemático (Maillard y Fuller, 1998).

Una versión simple de esta técnica consiste en reemplazar la función de radiación de Green por una función de transferencia unitaria. De este modo la salida de los sensores se convierte en una suma de las señales de aceleración. El resultado de la señal de error representa una estimación de la aceleración volúmica de la estructura. Esta técnica es equivalente a la del sensor distribuido PVDF para la velocidad volúmica (como se verán más adelante) excepto que ésta está implementada de manera discreta. Esta técnica se denomina con las siglas DSVAS (*Discrete structural volume acceleration sensing*).

Maillard y Fuller (1998) compararon las dos técnicas anteriores en una placa simplemente apoyada. La técnica DSVAS, basada en una función de transferencia unitaria, proporciona mejores resultados a bajas frecuencias por debajo de la primera frecuencia de resonancia. Por esto y por la simplicidad del método los autores reco-

mendaron está técnica a bajas frecuencias. Esto se debe a que a bajas frecuencias la forma del primer modo acústico es proporcional a la velocidad volúmica de la placa y éste es el modo que radia ruido más eficientemente. A altas frecuencias la DSAS basada en la función de transferencia de la radiación consigue mayores reducciones de ruido ya que observa un mayor número de modos. Por tanto cerca y por encima de la primera frecuencia de resonancia los autores recomiendan esta técnica.

#### 2.4.3.2. Sensores distribuidos

El sensor distribuido PVDF (*polyvinylidene difluoride*) está fabricado de un material con las características adecuadas para desarrollar sensores integrados en la estructura. Cuando estos sensores se pegan a una superficie producen una carga o una tensión proporcional a la deformación de la superficie. La carga debe ser aumentada por amplificadores de alta impedancia para producir una tensión proporcional a la deformación. Las ventajas que presentan los PVDF frente a las galgas extensométricas es que dándole una forma adecuada al sensor distribuido éste es capaz de captar el modo o la combinación de modos de vibración deseado. Por tanto estos sensores *conformados* son capaces de captar las distribuciones de velocidades de vibración que más contribuyen a la radiación de ruido.

La estrategia de utilizar los sensores distribuidos PVDF ha sido estudiada por distintos autores, diferenciándose tres métodos

- Estrategia para captar modos estructurales más eficientes a la radiación (Snyder, Tanaka y Kikushima, 1995; Snyder, Tanaka y Kikushima, 1996; Hansen y Snyder, 1997).
- Estrategia para captar modos de radiación (Tanaka, Snyder y Hansen, 1996).
- Estrategia del desplazamiento volúmico (Johson y Elliott, 1993; Guigou, Berry y Charette, 1994; Charette, Guigou y Berry, 1995; Charette, Berry y Guigou, 1998; Cuesta, 2001).

Recientemente, Preumont, François y Dubru (1999) y De Man, François y Preumont (2001) han utilizado un dispositivo formado por un vector de cerámicos piezoeléctricos convenientemente filtrado como sensor de la velocidad volúmica de un cristal rectangular, puesto que las técnicas anteriormente utilizadas de PVDF pueden hacer que el sensor tenga una forma compleja que dificulte su construcción y que sea muy sensible a cualquier pequeño cambio de su geometría, de las condiciones de pegado o a las propiedades del material. Estos autores diseñaron un vector de sensores piezoeléctricos parches (PVDF o PZT) reconstruyendo el desplazamiento volúmico mediante una combinación lineal adaptativa para eliminar las dificultades anteriores.

De Man et al. (2001), utilizando la estrategia del sensor anteriormente descrito y un sistema de control SISO (Single Input Single Output) de compensación de adelanto de fase para controlar el ruido radiado por una placa en condiciones simples, consiguieron una reducción de 1/3 de octava con cuatro actuadores puntuales.

El uso de fibras ópticas como sensores de deformación fue primeramente analizado por Butter y Hocker (1978). Posteriormente Cox y Lindner (1991) los aplicaron como sensores para el control activo de vibraciones de una viga.

Un sensor de fibra óptica consiste en un solo filamento de cristal que se puede encajar dentro, o unir, a una estructura dinámica produciendo una carga dinámica despreciable. La utilización de fibras ópticas como sensores es costosa y además para su manejo se requiere un láser y una electrónica compleja, pero para algunos casos es la única opción factible. Tales usos incluyen a estructuras sujetas a campos electromagnéticos de alto nivel, a altas temperaturas y presiones, o a ambientes corrosivos.

La función de coste que utilizaron Masson, Berry y Nicolas (1997) para minimizar la radiación acústica de una placa fue la potencia acústica radiada, y la información de la deformación la obtuvieron mediante un vector de sensores de fibras ópticas pegadas a la estructura. Estos autores utilizaron el modelo de sensor óptico que también utilizaron Clark y Fuller (1992).

Las técnicas ASAC, descritas en los apartados anteriores, inicialmente necesitan describir las características de vibración de la estructura y posteriormente utilizan esta descripción para definir el ruido radiado por las vibraciones. Esta técnica implica que a priori se tienen que conocer las características de vibración de la estructura; requisito difícil en aplicaciones reales fuera de laboratorio. Una técnica alternativa consiste en describir la radiación acústica en función de cantidades acústicas fundamentales, tales como patrones de radiadores multipolares. Con esta técnica no es necesario tener un conocimiento de las formas modales y de las frecuencias de resonancia para implementar un sistema de sensores, ya que las cantidades acústicas fundamentales únicamente requieren el conocimiento de la geometría de la estructura. Esta técnica de filtrado modal lo desarrollaron teóricamente Snyder, Burgan y Tanaka (2002).

Burgan, Snyder, Tanaka y Zander (2002) utilizaron esta técnica con sensores estructurales y alcanzaron una buena correlación entre la simulación y la experimentación utilizando una ley de control adaptativa *feedforward* en una placa rectangular. Los resultados obtenidos indicaban que la salida del sistema de sensores daba una buena representación del criterio global de error y que se puede utilizar como sistema de control para producir resultados globales con un número mínimo de entradas a las leyes de control. Hill, Snyder, Cazzolato, Tanaka y Fukuda (2002), Hill, Snyder, Cazzolato, Fukuda y Tanaka (2003) utilizaron la misma técnica que los autores anteriores pero en este caso en vez de utilizar sensores estructurales utilizaron sensores acústicos, demostrando que un número grande de sensores se puede condensar en unos pocos dando una buena estimación del criterio de error global.

#### 2.4.3.3. Comparación entre sensores distribuidos y puntuales

Los PVDF pegados a una superficie producen una carga o una tensión proporcional a la deformación de la superficie. La principal ventaja de este tipo de sensores es que dándoles una forma adecuada son capaces de captar las distribuciones de velocidades

deseadas. El inconveniente que presentan es que también suelen captar señales indeseadas, bien por la introducción de errores en el corte del sensor o por los errores de posicionamiento del sensor sobre la estructura, ya que este tipo de sensores es muy sensible a su forma y posicionamiento.

Por otra parte, los acelerómetros miden variables relacionadas con las vibraciones de la estructura, por lo que su señal debe hacerse pasar por un filtro electrónico para convertir la señal de manera que la entrada al controlador sea la variable que se desee reducir al mínimo. La incorporación de este filtro hace que el procesador de tiempo real tenga una carga computacional mayor que con los sensores PVDF, ya que estos realizan el filtrado mediante su forma y posicionamiento. Otro de los inconvenientes de los sensores puntuales es que el número necesario puede que ser grande en comparación con el de los distribuidos.

## 2.5. Optimización del sistema de control

La optimización del sistema de control tiene dos aspectos diferentes: los parámetros del controlador y el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor. En la literatura existen muchos estudios de optimización de los parámetros y del posicionamiento de actuadores y sensores por separado, pero no tantos que hayan optimizado simultáneamente los parámetros del controlador y el posicionamiento óptimo.

### 2.5.1. Posicionamiento del actuador y del sensor

Es obvia la influencia de la localización del actuador y del sensor en el sistema de control. Por ejemplo, si en un sistema un actuador se posiciona cerca de una línea nodal de un modo que se quiere controlar, en el mejor de los casos, el controlador necesitaría aplicar una gran fuerza para controlar dicho modo; en el peor de los casos también podría pasar que el modo fuera incontrolable. Similarmente, si se posiciona un sensor cerca de una línea nodal del modo a controlar, la señal obtenida mediante el sensor sería muy pobre o en el peor de los casos el modo sería inobservable (y por tanto incontrolable).

Uno de los puntos que se tienen que tener en cuenta a la hora de realizar un sistema de control es la posición de los actuadores y de los sensores; estos actuadores y sensores pueden estar *colocalizados* o *no-colocalizados*. En la figura 2.14 se representa el esquema de dos posicionamientos relativos de actuador y sensor en una viga empotrada libre.

A los sistemas que tienen ceros en el semiplano derecho de la variable compleja  $s$  se les denomina de *fase no mínima*. En cambio a los sistemas que no tienen ceros en el semiplano derecho se les denomina de *fase mínima* (figura 2.15).

Las propiedades que presentan estas dos configuraciones son:

- Cuando el sensor y el actuador están *colocalizados*, en la FRF siempre existe una

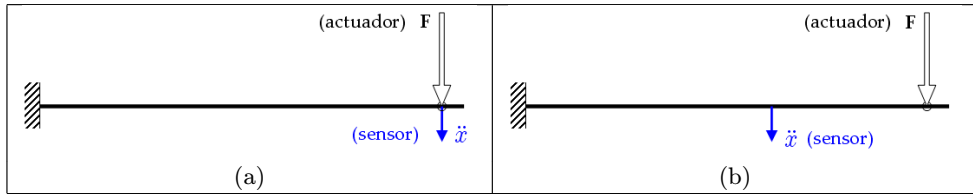


Figura 2.14: Sistema *colocalizado* (a) y sistema *no-colocalizado* (b)

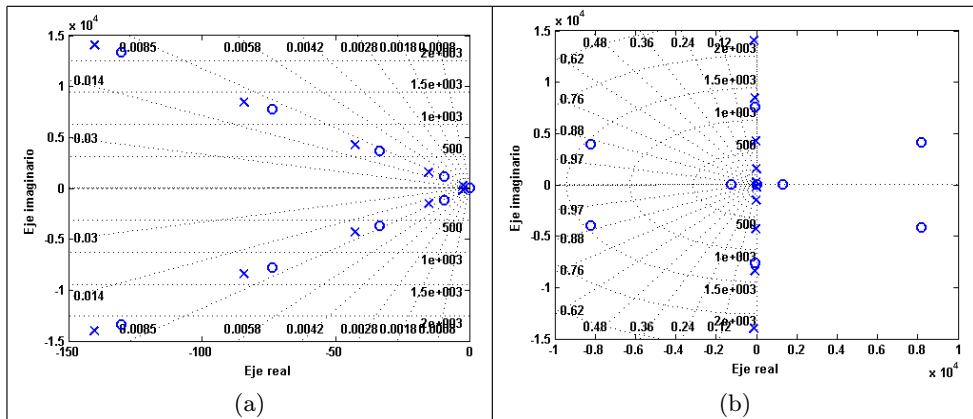
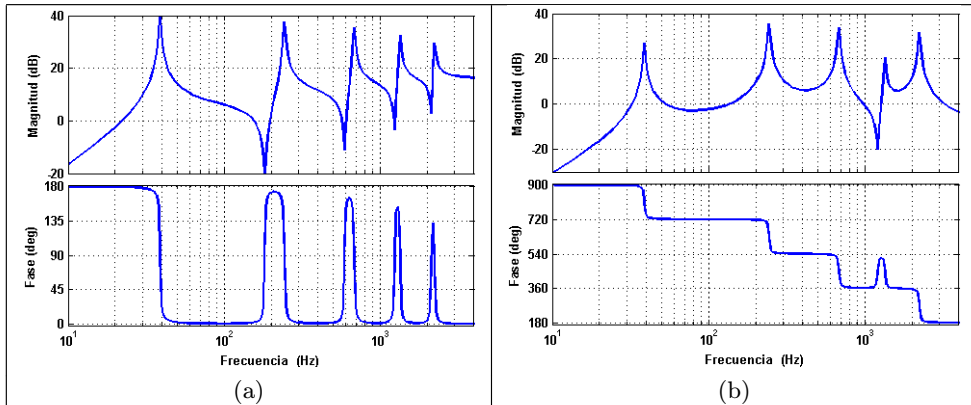


Figura 2.15: Mapa de polos y ceros de un sistema *colocalizado* (a) y de otro *no-colocalizado* (b)

antiresonancia después de un pico de resonancia. En cambio cuando el sensor y el actuador están *no-colocalizados* en la FRF no siempre hay una antiresonancia después de un pico de resonancia. En el caso del sistema *no-colocalizado*, por no haber una alternancia de resonancias y antiresonancias, existe una acumulación negativa de la fase a medida que va aumentando la frecuencia, cosa que no ocurre en los sistemas *colocalizados* (figura 2.16).

- En el lugar geométrico de las raíces de un sistema *colocalizado* los polos y los ceros siempre estarán alternándose cerca del eje imaginario. En cambio en un sistema *no-colocalizado* no se cumple esta alternancia de polos y ceros; los ceros pueden migrar en función de la posición relativa del sensor con respecto al actuador (figura 2.15).
- Desde el punto de vista de la estabilidad los controles *colocalizados* presentan la ventaja de que aunque la ganancia del controlador aumente los polos de funcionamiento del sistema no se desplazan al semiplano de parte real positiva en el lugar geométrico de las raíces. En cambio en el caso de controles *no-colocalizados* no está asegurado que algún polo del funcionamiento no se vaya a dicho semiplano.

En los últimos años se han desarrollado muchas estrategias para optimizar el



**Figura 2.16:** FRF  $\left(\frac{\ddot{x}}{F}\right)$  de un sistema *colocalizado* (a) y de uno *no-colocalizado* (b)

posicionado del actuador y del sensor, la mayoría basados en la idea de minimizar algún índice asociado con el posicionado de los transductores. En la mayoría de dichos métodos los índices utilizados están basados en la medida de la controlabilidad y observabilidad, derivados de considerar la minimización de la energía (Vander Velde y Carignan, 1984; Hac y Liu, 1992)

Recientemente, los materiales piezoeléctricos de pastilla han sido utilizados satisfactoriamente para el control de vibraciones, lo cual ha añadido una nueva dimensión al problema del control por el hecho de que no sólo hay que optimizar la posición sino que también hay que tener en cuenta las dimensiones de los actuadores y sensores distribuidos (Li et al., 2002).

Muchos de los estudios se han realizado optimizando simultáneamente la posición óptima del actuador y del sensor piezoeléctrico *colocalizados* ambos en la misma posición. Li et al. (2002) diseñaron una metodología para determinar el posicionamiento óptimo de actuador y del sensor *colocalizados*, las dimensiones del actuador y del sensor distribuidos y la ganancia del controlador para la supresión de movimiento en una estructura flexible. La optimización se basaba en la maximización de la energía de disipación debida a la acción del controlador. Por otra parte Halim y Moheimani (2003) sugirieron un criterio de optimización del posicionamiento del par actuador-sensor posicionados en la misma posición en una placa flexible simplemente apoyada utilizando medidas de controlabilidad modal y espacial; también tuvieron en cuenta la reducción del efecto del *spillover*.

También ha habido otros estudios en los cuales se ha llevado a cabo una selección simultánea del posicionamiento del actuador y del sensor asumiendo que no están *colocalizados* en el mismo punto. Así, Gawronski (1999) presentó un algoritmo de posicionado de actuador y sensor, desarrollado para estructuras flexibles, utilizando la norma  $H_2$  o  $H_\infty$  o la norma modal de Hankel. El algoritmo consiste en determinar la norma ( $H_2$  o  $H_\infty$  o la norma modal de Hankel) para un único modo, un único

actuador y un único sensor de la función de transferencia entre el actuador y sensor. Basado en esas normas se generan las matrices de posicionado de actuadores y sensores para cada modo considerado. Posteriormente las matrices se evalúan y se determinan simultáneamente la posición del actuador y del sensor allí donde se maximice la norma de cada modo.

Recientemente los algoritmos genéticos han sido empleados como técnica de optimización para hallar el posicionamiento óptimo de actuador y sensor, así como sus dimensiones (Wang, Chen y Han, 1999; Lee y Han, 1996).

Por otra parte, en un diseño de la estructura con control activo donde de antemano están predeterminadas las leyes de control (*feedback*) y el tipo de actuador y sensor, existen dos vías para la optimización del sistema de control: la ganancia del controlador y el posicionado de actuador y sensor. Los métodos para establecer la ganancia óptima de un control *feedback* están bien establecidos, mientras que los métodos para el posicionado del sensor y del actuador son relativamente recientes. Los dos tipos de métodos para optimizar el sistema de control que existen son:

- El posicionado óptimo de actuadores y sensores se considera separadamente de la ganancia del controlador.
- Simultáneamente se calculan los valores óptimos de la ganancia *feedback* y el posicionamiento del actuador y del sensor.

Por la fuerte interacción que existe entre el posicionamiento del actuador y del sensor y la ganancia del control *feedback*, últimamente el problema de optimización simultánea del posicionamiento de actuador y sensor y de la ganancia del *feedback* ha ido atrayendo la atención de los investigadores. Onoda y Haftka (1987) desarrollaron una técnica de optimización simultánea de la posición de actuador y sensor *colocalizado* y la ganancia de control mediante la minimización del coste total de la estructura y del sistema de control. Li et al. (2002) formularon una nueva metodología de optimización simultánea tanto de posicionamiento de actuador y sensor *colocalizado* y de sus medidas como de la ganancia del control *feedback*. También consideraron el efecto de la modificación de la masa y la rigidez de la estructura al añadir el par actuador sensor. El método de optimización en la que se basaron era de maximización de la disipación de la energía. Su estudio estaba limitado a la simple estructura de una viga. En 2005 Yang, Jin and Soh utilizaron la técnica de algoritmos genéticos para optimizar el posicionado de un actuador y sensor piezoeléctricos de tipo parche *colocalizado*, sus dimensiones y la ganancia del control *feedback*. La técnica la aplicaron en una viga simplemente apoyada y concluyeron que cuando más piezas de parche utilizaban el efecto del control podía mejorar.

### 2.5.2. Diseño del controlador: sintonía de parámetros

Los parámetros de los filtros se definen para controlar un modo, aunque en realidad se controla la aceleración (que es la magnitud que se realimenta), con el objetivo de eliminar o al menos reducir el pico de resonancia del modo controlado en la FRF del sistema. Los modos no controlados serán aquellos sobre los cuales no se desea que el control introduzca ninguna variación.

Para definir los parámetros del controlador existen diferentes técnicas dependiendo del tipo de control que se vaya a usar. En el caso de controladores de amortiguamiento sean de primer orden únicamente hay que definir la frecuencia de corte y la ganancia del controlador. En cambio en el caso de que el controlador modal sea de segundo orden los parámetros que hay que definir son: la frecuencia de corte, el amortiguamiento relativo y la ganancia del controlador.

En el caso de que el controlador de primer orden, la frecuencia de corte se elige dependiendo del rango de frecuencia en la que se quiera que trabaje el controlador y la ganancia dependiendo del amortiguamiento de los modos que se desee obtener con el controlador o sino para que no se inestabilice el sistema controlado.

Por el contrario en los controladores de segundo orden a parte de la frecuencia de corte y de la ganancia del controlador, también hay que ajustar el amortiguamiento modal del filtro del controlador. Cuanto más grande sea este amortiguamiento relativo más se conseguirá amortiguar el modo que se desea amortiguar.

La diferencia entre los controles de primer y segundo orden consiste en que los de primer orden actúan en un rango de frecuencia amortiguando los modos, debido a que el filtro de control es un integrador de la señal de aceleración. En cambio en los de segundo orden hay un modo que es amortiguado más fuertemente (el que más cerca está de la frecuencia de corte), debido a que la señal es integrada únicamente cerca de la frecuencia de corte. Por tanto los parámetros del filtro de segundo orden hay que ajustar en función del modo que se desee controlar.

Preumont (2002) comentó que la frecuencia natural del filtro tenía que ser lo más cercana posible a la frecuencia natural del modo que se quiere controlar y que el amortiguamiento relativo que se obtiene en el sistema controlado se incrementa con el amortiguamiento relativo del filtro; y recomendaba un valor entre 0,5 y 0,7 para el controlador.

Otra metodología, denominada *amortiguamiento crítico* (*Critically damped*), fue propuesta por Goh y Yan (1996). En esta la frecuencia natural del filtro se escoge igual al del modo que se desea controlar, y el amortiguamiento relativo del filtro se coge igual a 1, es decir, amortiguamiento crítico. La ganancia del filtro se elige en el punto donde se cortan la rama de los lugares geométricos que parte del modo que se quiere controlar y la rama del polo del control.

Una segunda metodología denominada *cross-over point* (*punto de corte*) fue propuesta por Bayon de Noyer y Hanagud (1997). En este caso igual que en el anterior la frecuencia natural del filtro de control se elige igual a la del modo que se desea controlar pero en este caso a diferencia del anterior tanto la ganancia del controlador



como el amortiguamiento relativo del filtro de control se escogen en el punto donde se cortan las curvas del modo que se desea controlar y del polo del controlador.

El método del *punto de corte* consigue introducir amortiguamiento adicional en la estructura evitando cualquier cambio en las frecuencia y modos naturales y a la vez evitando también la aparición de nuevos picos de frecuencia en la respuesta del lazo cerrado. Para esto escoge el punto de funcionamiento en el cual la rama del lugar de las raíces que parten del polo de la estructura y la rama del controlador en lazo abierto se cortan. Este punto se conoce con el nombre de *cross over point* (*punto de corte*). El desarrollo que describen de esta técnica fue para controles *no-colocalizados*.

Bayon de Noyer y Hanagud (1997) compararon las dos técnicas anteriores para el caso de control *no-colocalizado*. En ambos casos los parámetros del controlador fueron calculados para que el nivel de amplitud de la vibración que se obtuviera con ambos métodos fuera el mismo. Concluyeron que con el método de *punto de corte* se necesita una menor ganancia y además el modo cercano al controlado tenía menos riesgo de inestabilización que con el diseño de *amortiguamiento crítico*.

Los mismos autores en 1998 (Bayon de Noyer y Hanagud, 1998a) propusieron otra técnica basada en la norma  $H_2$ , en este caso como en las dos anteriores la frecuencia natural del filtro de control se escoge igual a la frecuencia del modo que se desea controlar pero en cambio los parámetros de ganancia y el amortiguamiento relativo del controlador se escogen tales que minimicen la norma  $H_2$  de la función de transferencia en lazo cerrado, suponiendo que la respuesta del sistema está dominada por el modo que se desea controlar.

En este mismo artículo, compararon las técnicas de diseño de los parámetros del filtro del *punto de corte* y de la norma  $H_2$  de la función de transferencia. En ambos casos se utilizó la misma ganancia para calcular los parámetros de los filtros y se observó que las dos técnicas presentaban aproximadamente la misma reducción de amplitud de vibración. Pero esta reducción estaba asociada con diferentes efectos para cada diseño. El diseño del *punto de corte* conserva un único pico en el modo controlado aunque para ello se necesita un mayor amortiguamiento relativo del controlador. Esto significa que los modos no controlados con una frecuencia natural muy cercana al modo controlado pueden ser afectados por el compensador. Además, para obtener la condición de *punto de corte* para sistemas con control de modos múltiple, las frecuencias naturales del compensador necesitan ser bien ajustadas.

Por otra parte el diseño de optimización de la norma  $H_2$  desdobra la frecuencia de resonancia del modo controlando produciendo dos picos muy cercanos al modo controlado. Esto quiere decir que en la respuesta del sistema controlado pueden aparecer los dos modos, el modo modificado de la estructura y el modo del controlador. Además, el valor del amortiguamiento relativo con el diseño de la norma  $H_2$  es menor que la mitad de uno equivalente del *punto de corte*. Por otra parte, en la técnica de la norma  $H_2$  la frecuencia natural no hace falta ser ajustada tan bien como en el método del *punto de corte*.

La ventaja que presenta el método del *punto de corte* es que únicamente se produce un amortiguamiento del modo que se ha controlado sin que aparezcan dos nuevos picos

cerca del modo controlado.

Dependiendo del tipo de control que se seleccione existen diferentes métodos para optimizar los parámetros del controlador; el tipo de control que se utiliza es de realimentación de la aceleración de segundo orden. En este tipo de controles se tienen que determinar tres parámetros: la frecuencia natural del filtro, su amortiguamiento relativo y la ganancia del controlador.

Tipo de control	Ventajas	Desventajas
<u>Colocalizado</u>		
Preumont (2002)	- No necesita ajustar los parámetros.	- Desdoble del pico controlado. - Con un control <i>no-colocalizado</i> el riesgo de inestabilizar los modos es grande.
<i>Amortiguamiento crítico</i>	- Para la misma ganancia amortigua más que el método anterior. - No hay desdoble del pico controlado.	- Necesita ajustar los parámetros. - Gran riesgo de inestabilización con un control <i>no-colocalizado</i> .
<u>No-colocalizado</u>		
<i>Punto de corte</i>	- No hay desdoble del pico controlado.	- Necesidad de ajustar los parámetros.
<i>Norma <math>H_2</math></i>	- Menor riesgo de inestabilizar los modos no controlados.	- Desdoble del pico controlado. - Necesidad de ajustar los parámetros.

**Tabla 2.3:** Comparación entre los métodos de ajuste de los parámetros de los controles de realimentación de la aceleración de filtros de segundo orden

En la tabla 2.3 se pueden ver resumidos los pros y contras de las técnicas de ajuste de los parámetros del filtro de control de realimentación de la aceleración de segundo orden.

## 2.6. Estabilidad del sistema de control

En los sistemas de control en los cuales el control es *colocalizado*, que cumplen la propiedad de sistemas de fase mínima en los cuales todos los ceros del sistema están en el lado izquierdo del plano de la variable compleja  $s$  (figura 2.17a), la estabilidad del sistema está garantizada. En efecto, partiendo de los polos del sistema en lazo abierto las ramas del lugar de raíces se dirigen a los ceros del sistema en lazo abierto (figura 2.17b). Dada la configuración de alternancia de polos y ceros, y tratándose de un sistema de fase no mínima, ninguna rama pasa al semiplano derecho de la variable compleja  $s$ .

En este tipo de controladores el módulo de la FRF entre el actuador y el sensor siempre tiene una antiresonancia tras un pico de resonancia (figura 2.17a). Por lo que se refiere a la fase de la FRF, en estos casos en cada frecuencia de resonancia hay un retraso en la fase y en cada antiresonancia un adelanto.

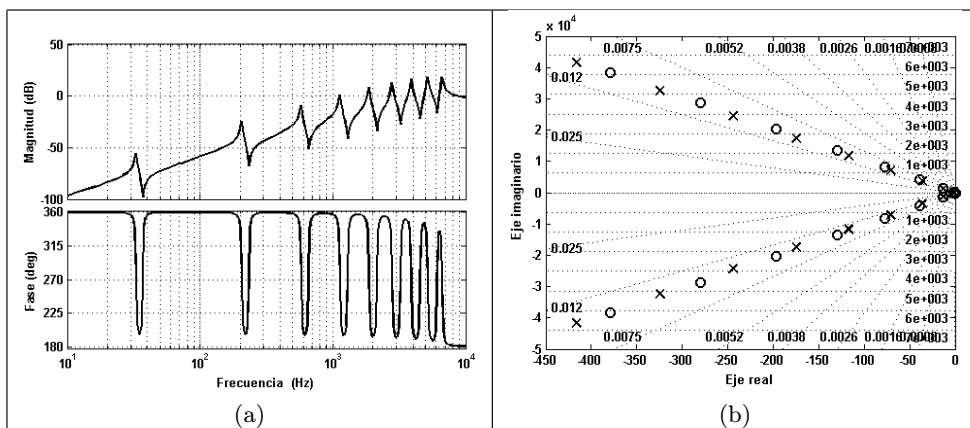


Figura 2.17: Sistema *colocalizado*

En este tipo de controladores la estabilidad está asegurada, pues para todas las ganancias el sistema controlado nunca se desestabiliza. En la figura 2.18 se puede observar un sistema de estas características controlado con un controlador de realimentación de la aceleración de segundo orden. En la figura 2.18a se han representado las FRF sin control y con control en lazo cerrado, y en la 2.18b el lugar geométrico de las raíces de dichos sistemas de control. De esta última figura se deduce que no hay limitación en la ganancia del controlador gracias a la inexistencia de ceros en el semiplano derecho del lugar geométrico de las raíces.

Aunque la estabilidad esté garantizada en los controles *colocalizados*, en muchos casos reales no se consigue el mayor rendimiento del sistema de control con dicha configuración, definiendo dicho rendimiento como la relación entre la reducción de energía vibratoria y la potencia necesaria en el actuador. También puede pasar que no sea viable actuar donde se mide. Por tanto en muchas aplicaciones es necesaria la utilización de un controlador *no-colocalizado*, o de fase no mínima, con el inconveniente

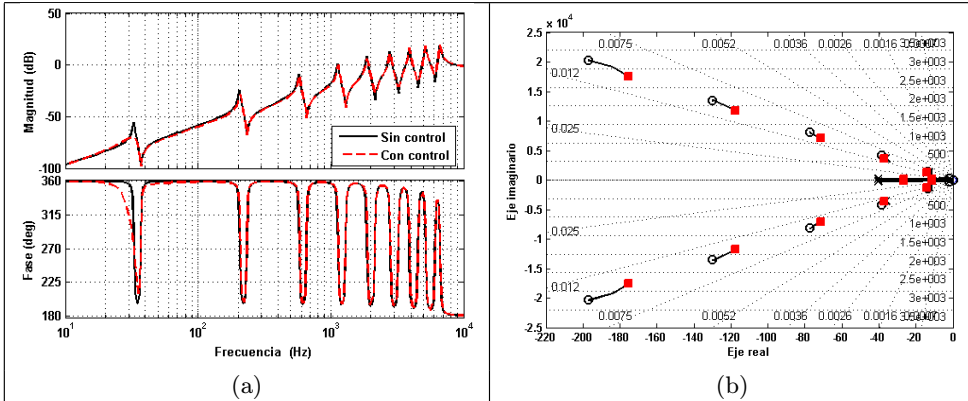


Figura 2.18: Control *colocalizado*

de no tener garantizada la estabilidad del sistema, ya que en este tipo de controladores algunos ceros del sistema se encuentran en el semiplano derecho del lugar de las raíces. Esto limita la ganancia por el riesgo de inestabilizar los modos no controlados.

En la figura 2.19b se puede observar un sistema de control en el cual el control es *no-colocalizado*, es decir un sistema de fase no mínima en el cual los ceros del sistema están tanto en el lado izquierdo como en el derecho del lugar geométrico de las raíces.

En la figura 2.19a se puede observar la FRF de un sistema *no-colocalizado* en el cual tras un pico de resonancia no se observa ninguna antiresonancia. En lo que a la fase se refiere siempre hay un retraso en cada frecuencia de resonancia; no hay ningún adelanto ya que no hay ninguna antiresonancia. El mapa de zeros y polos de dicho sistema *no-colocalizado* se ha representado en la figura 2.19b, en donde algunos ceros del sistema están en el semiplano derecho.

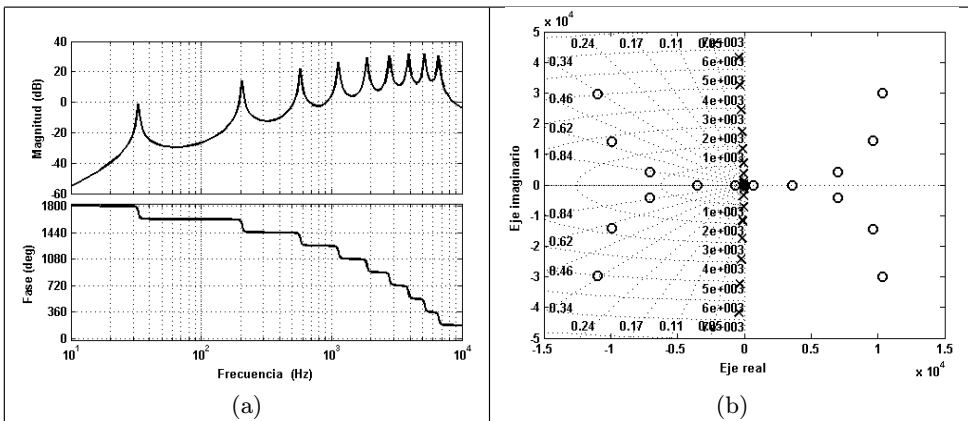


Figura 2.19: Sistema *no-colocalizado*

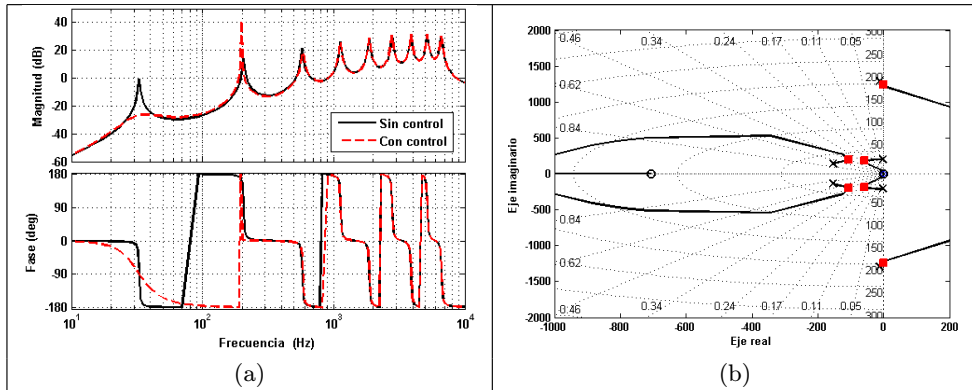


Figura 2.20: Control *no-colocalizado*

Los sistemas que no tienen una fase mínima son más difíciles de controlar ya que hay que tener mucho cuidado de que el sistema no se inestabilice por la razón de que en la curva de la fase de la FRF el sistema *no-colocalizado* tiene un retardo en el tiempo. Este retroceso se manifiesta en el dominio de la frecuencia como una acumulación negativa de la fase con el aumento de la frecuencia. En la figura 2.20 se puede observar un control *no-colocalizado* en el cual se ha aumentado la ganancia del controlador hasta el límite de inestabilizar el siguiente modo no controlado.

A lo largo de los últimos diez años ha habido importantes estudios del posicionamiento de actuadores y sensores en los sistemas de control de estructuras flexibles. La primera motivación de dichos estudios fue resolver el problema de inestabilidad causado por el retraso de la fase asociada a las frecuencias de resonancia de la estructura. En 1991 Miu realizó un estudio de la interpretación física de los ceros de una función de transferencia para un sistema de control simple; en este trabajo Miu estudió dos tipos de sistemas: los no dispersivos con fase mínima y los dispersivos con fase no mínima. En el primer caso la ecuación que gobierna el sistema es una ecuación diferencial de segundo orden, mientras que en el segundo la ecuación es de cuarto orden. Un ejemplo importante de este tipo de problemas es la flexión transversal de una viga elástica. Miu demostró que en los sistemas no dispersivos cuando el sensor se alejaba de la posición del actuador los ceros empezaban a migrar a lo largo de eje imaginario moviéndose hacia el infinito. También en los sistemas dispersivos, al principio, como en los casos anteriores, cuando la posición del sensor se aleja del actuador, los ceros del sistema empiezan a migrar hacia el infinito. Pero lo que es más importante, a diferencia de torsión o deformación axial de una viga elástica, donde los ceros una vez alcanzado el infinito simplemente desaparecen, en caso de flexión cada par de ceros conjugados que desaparecen en el eje imaginario reaparecen en el eje real.

En este trabajo demostraron que los ceros están relacionados con las características de propagación de la energía en un sistema flexible. Los ceros complejos conjugados del sistema están relacionadas con la propagación de la energía, pero dicha energía es absorbida por el sistema y en el sensor no se produce ninguna señal. Los ceros reales,

los causantes de que el sistema tenga una fase no mínima, están relacionados con la no propagación de la energía.

Otro de los estudios realizados en sistemas *no-colocalizados* ha sido el de Loix, Kozanek y Folette (1996), los cuales demostraron que los ceros no estaban únicamente restringidos al eje imaginario o al eje real, tal como había sugerido Miu (1991). Estos autores demostraron la existencia de otro tipo de ceros, los cuales denominaron con el nombre de *ceros complejos*. Desde el punto de vista del sistema de control, la presencia de los ceros complejos hace que se incremente la sensibilidad del sistema, el cual hace que sea más vulnerable a las variaciones de los parámetros. Si alguno de estos modos complejos aparece dentro del ancho de banda del sistema de control, dichos ceros pueden ocasionar la inestabilidad del sistema incluso con pequeñas variaciones del modelo del sistema.

Spector y Flashner (1990) estudiaron el retardo de los sistemas *no-colocalizados*; retardo que se manifiesta en el dominio de la frecuencia como una acumulación de fase negativa con el aumento de la frecuencia. Por otra parte observaron que en controles *no-colocalizados* es muy importante tener un modelo exacto del sistema, pues pequeñas inexactitudes en el modelo pueden ocasionar la inestabilidad del sistema de control. En particular, pequeñas variaciones en la localización del sensor pueden ocasionar un intercambio en el orden de los polos y los ceros, produciendo un error en la fase de  $-360^\circ$ . Un error de fase de dicho tamaño provoca la inestabilidad del sistema. En sistemas *no-colocalizados* es un factor crítico tener un modelo lo bastante exacto en el ancho de banda del controlador.

En los últimos años ha habido numerosos estudios para mejorar la estabilidad y el rendimiento del sistema de control, los cuales pueden agruparse en: técnicas de retardo en el tiempo y técnicas de pasivación.

El retardo en el tiempo es inevitable en el control activo de muchas estructuras. En estructuras de gran tamaño la dinámica de actuadores y sensores no permite la generación instantánea de la fuerza requerida. Tradicionalmente, se pensaba que el retardo tenía efectos perjudiciales sobre la estabilidad y en el funcionamiento del controlador, habiendo muchos estudios para eliminar dicho retardo. Pero en los últimos años ha habido varios estudios para mejorar la estabilidad y el funcionamiento del sistema de control aprovechándose del retardo. Algunos de dichos estudios han sido los de Yang (1991), Yang y Mote (1991), Kang y Yang (1992) y también de Yang y Mote (1992). En dichos trabajos se ha estudiado la introducción de un retardo óptimo en el tiempo en una cuerda, una barra, una viga y una placa con el objetivo de aumentar la estabilidad del sistema. También hay trabajos más reciente en este área; uno de ellos es el de Von Bremen, Udwardia y Silverman (2001), en el cual estudiaron el efecto del retardo en el tiempo del control de una barra de torsión. Dichos autores observaron que eligiendo un retardo adecuado en el tiempo se podía incrementar la ganancia máxima de estabilidad, en particular en un sistema *no-colocalizado* de control derivativo e integral.

Udwardia et al. (2003) investigaron la introducción del retardo en las estructuras de construcción para mejorar la estabilidad y el funcionamiento del sistema de control. Demostraron analítica, numérica y experimentalmente que con la inyección de un

intencionado pequeño retardo se podía mejorar drásticamente el funcionamiento y la estabilidad del controlador. Dicha introducción del retardo constituye un pequeño cambio en el controlador instalado en el sistema. Por tanto, desde el punto de vista práctico, el retardo puede ser implementado casi sin ningún gasto adicional y puede mejorar el funcionamiento y la estabilidad, un aspecto que no puede ser ignorado en estructuras sometidas a fuertes terremotos.

La segunda técnica que se ha mencionado anteriormente ha sido la de pasivación. Existen sistemas activos que por naturaleza son estables, los cuales se conocen como *sistemas de control activos de naturaleza pasiva*. Algunos ejemplos de estos sistemas de control activo son de sensor-actuador *colocalizado*. La técnica de pasivación consiste en convertir un sistema de control no-pasivo en un sistema pasivo utilizando un compensador adecuado. Este tipo de técnicas convierten el diseño de un controlador robusto, en un problema de pasivación robusto que en algunos casos puede ser más fácil. Existen diferentes tipos de pasivación que han sido desarrollados por diferentes investigadores, por ejemplo Kelkar y Joshi (1997) propusieron un método de pasivación para el control longitudinal de un modelo de avión F-18 en investigación. El método lo aplicaron a dos casos SISO y comprobaron que el sistema de control que obtenían era satisfactoriamente robusto. Otro de los trabajos realizados en este campo ha sido el de Gosavi y Kelkar (2004), los cuales utilizaron el método de pasivación en un sistema *no-colocalizado* de actuador-sensor en una viga empotrada libre. Demostraron, pues, la robustez de estas técnicas para controles *no-colocalizados*.

## 2.7. Análisis modal del sistema controlado

En este apartado se va a describir el procedimiento que se ha utilizado para realizar el análisis modal del sistema con el controlador incorporado. Para ello inicialmente se ha realizado un análisis modal del sistema sin controlador suponiendo que el amortiguamiento del sistema original es proporcional.

### 2.7.1. Análisis modal del sistema original

Las estructuras lineales generalmente se representan con una ecuación diferencial de segundo orden de la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (2.50)$$

donde,  $[M]$ ,  $[K]$  y  $[C]$  son la matriz de masas, de rigidez, y de amortiguamiento, respectivamente. Para la mayor parte de los sistemas, estas matrices son simétricas.

### 2.7.1.1. Amortiguamiento proporcional

En este estudio se ha supuesto que el amortiguamiento del sistema es proporcional; por tanto, la matriz de modos  $[\Phi]$  del sistema original sin amortiguamiento también diagonaliza la matriz de amortiguamiento de la siguiente manera:

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [2\xi\omega] \quad (2.51)$$

siendo  $\xi$  el amortiguamientos relativos y  $\omega$  las frecuencia naturales.

Por tanto realizando la transformación de coordenadas nodales a modales las  $N$  ( $N$  = número de grados de libertad del sistema) ecuaciones anteriores quedan desacopladas de la siguiente forma:

$$\{\ddot{y}\} + [2\xi\omega]\{\dot{y}\} + [\omega^2]\{y\} = \{\tilde{f}(t)\} \quad (2.52)$$

siendo,  $\tilde{f}(t) = [\Phi]^T f(t)$ .

### 2.7.1.2. Amortiguamiento no proporcional

En este caso el cálculo de los valores y vectores propios puede diagonalizar las matrices  $[M]$  y  $[K]$ , pero no la  $[C]$ . Así pues para resolver se suele añadir la siguiente identidad nula:

$$[M] \{\dot{x}\} - [M] \{\dot{x}\} = \{0\} \quad (2.53)$$

las ecuaciones matriciales 2.50 y 2.53 pueden expresarse conjuntamente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

El sistema de ecuaciones se puede poner de forma abreviada

$$[A] \{\dot{z}\} + [B] \{z\} = \{g(t)\} \quad (2.55)$$

En este caso el sistema de ecuaciones anterior se ha reducido de segundo orden a primer orden, pero se ha tenido que duplicar para ello el número de ecuaciones.

Las matrices  $[A]$  y  $[B]$  son simétricas, pero no definidas positivas. Resolviendo el problema de valores y vectores propios generalizado del sistema de ecuaciones 2.55 se generan  $2N$  valores propios complejos de parejas de complejos conjugadas. A cada uno de estos valores propios le corresponde un vector propio, los cuales también aparecen en pares complejos conjugados (2.56).



$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_N & & & \\ & & & \lambda_1^* & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_N^* \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\psi\}_1 & \cdots & \lambda_N \{\psi\}_N & \lambda_1^* \{\psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^* \{\psi\}_N^* \\ \{\psi\}_1 & \cdots & \{\psi\}_N & \{\psi\}_1^* & \cdots & \{\psi\}_N^* \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Los valores propios complejos  $[\Phi]$  son ortogonales a las matrices  $[A]$  y  $[B]$ , por tanto se cumple:

$$[A]_r = [\Phi]^T [A] [\Phi] \quad (2.58)$$

$$[B]_r = [\Phi]^T [B] [\Phi] \quad (2.59)$$

siendo  $[A_r]$  y  $[B_r]$  matrices diagonales.

Finalmente, la función de transferencia entre los grados de libertad  $t$  y  $s$  queda como sigue:

$$H_{ts}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\Phi\}_{N+t}^r \{\Phi\}_{N+s}^r}{a_r (i\omega - \lambda_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi\}_t^r \{\psi\}_s^r}{a_r (i\omega - \lambda_r)} + \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi\}_t^r \{\psi\}_s^r}{a_r^* (i\omega - \lambda_r^*)} \quad (2.60)$$

En estas expresiones 2.60 se observa que es suficiente con la mitad inferior de los vectores propios complejos.

### 2.7.2. Análisis modal de la estructura controlada

La estrategia de control que se ha empleado en esta tesis ha sido la de realimentación de la aceleración (*Acceleration Feedback Control, AFC*) con un filtro de segundo orden. En este caso se considerará un caso genérico de un sistema MIMO con actuadores y sensores. Las ecuaciones del sistema para el caso multimodal con  $n_a$  actuadores y  $n_s$  sensores y  $n_c$  número de filtros de control son:

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = - [P_a] [1]_{n_a n_c} [G] [\Omega_c] \{\nu\} + \{f(t)\} \\ \{\ddot{\nu}\} + [\beta_c] \{\dot{\nu}\} + [\Omega_c] \{\nu\} = [1]_{n_c n_s} [P_s]^T \{\ddot{x}\} \end{cases} \quad (2.61)$$

donde,

$[P_a]$  es la matriz de influencia de los actuadores, cada columna es el vector de influencia de un actuador, que valdrá 1 o -1 según el sentido de la fuerza donde esté el actuador y 0 en el resto de los grados de libertad

$[P_a]$  es la matriz de influencia de los acelerómetros, cada fila es el vector de influencia del acelerómetro, que valdrá 1 donde esté el acelerómetro y 0 en el resto de los grados de libertad

$[1]_{n_a n_c}$  matriz de  $n_a \times n_c$  con 1 por cada entrada al actuador en función del control suponiendo que se van a controlar un subconjunto de  $n_c$  modos

$\{\nu\}$  es el vector de señales de control (salidas de los filtros)

$[\beta_c] = \text{diag}(2\xi_c \omega_c)$  el amortiguamiento del controlador

$[\Omega_c] = \text{diag}(\omega_c^2)$  las frecuencias naturales del controlador

$[G]$  la matriz diagonal de las ganancias del controlador

$[1]_{n_c n_s}$  la matriz de  $n_c \times n_s$  con un 1 por cada entrada al controlador en función del sensor

En este apartado también supondremos que el amortiguamiento del sistema original es de amortiguamiento proporcional. Agrupando las ecuaciones del sistema 2.61 y reordenando los términos nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ -[1]_{n_a n_f} [P_a] & [1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [\beta_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [K] & [P_a] [1]_{n_a n_f} [G] [\Omega_c] \\ [0] & [\Omega_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

De esta forma nos queda un sistema de  $N + n_c$  ecuaciones de segundo orden, pero en este caso el amortiguamiento no es proporcional.

### 2.7.2.1. Amortiguamiento no proporcional

El sistema de ecuaciones 2.62 se puede poner de forma abreviada de la siguiente manera

$$[M_T]\{\ddot{x}_T\} + [C_T]\{\dot{x}_T\} + [K_T]\{x_T\} = \{f_T(t)\} \quad (2.63)$$

En este caso las matrices  $[M_T]$ ,  $[C_T]$  y  $[K_T]$  no son simétricas ni definidas positivas. Al ser el sistema no proporcional, para resolver siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del sistema original con amortiguamiento no proporcional, es decir añadiéndole al sistema de ecuaciones la siguiente igualdad:

$$[M_T]\{\dot{x}_T\} - [M_T]\{\dot{x}_T\} = \{0\} \quad (2.64)$$

Las ecuaciones matriciales 2.63 y 2.64 escribiendo conjuntamente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M_T] \\ [M_T] & [C_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M_T] & [0] \\ [0] & [K_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

Agrupando las ecuaciones 2.63 y 2.64 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$[A_T] \{\dot{z}_T\} + [B_T] \{z_T\} = \{g_T(t)\} \quad (2.66)$$

En este caso  $[A_T]$  y  $[B_T]$  no son simétricas ni definidas positivas. Por ejemplo, si únicamente se utilizara un filtro con un actuador y un sensor, las matrices  $[A_T]$  y  $[B_T]$  no serían simétricas por cuatro valores. En cambio si para un filtro de control se emplearan dos actuadores y un sensor, la matriz  $[A_T]$  no sería simétrica en dos valores y  $[B_T]$  en seis. Se puede deducir que en la matriz  $[A_T]$  los valores no simétricos son función de número de filtros y del número de sensores que se hayan empleado para realizar cada uno de los filtros; en cambio en la matriz  $[B_T]$  el número de valores no simétricos depende del número de filtros, de actuadores y de sensores que se hayan empleado para controlar con cada uno de los filtros.

Al ser matrices no simétricas al resolver el problema de valores y vectores propios generalizados del sistema 2.66 se cumple que:

$$\begin{aligned} [A_T]_r &= [\Phi_L]^H [A_T] [\Phi_R] \\ [B_T]_r &= [\Phi_L]^H [B_T] [\Phi_R] \end{aligned} \quad (2.67)$$

indicando  $[ ]^H$  la transpuesta conjugada de la matriz. En estas expresiones los vectores propios por la derecha y por la izquierda diagonalizan las matrices  $[A_T]$  y  $[B_T]$ . La diferencia de este caso con el sistema original sin control pero con amortiguamiento no proporcional es que las matrices de vectores propios por la derecha,  $[\Phi_R]$ , y por la izquierda,  $[\Phi_L]$ , son diferentes. Con la condición de diagonalización expresada en 2.67, fácilmente se puede transformar el sistema de ecuaciones 2.66 a la forma diagonal 2.68 realizando primeramente el cambio de variable  $\{z_T\} = [\Phi_R] \{\eta\}$  y posteriormente premultiplicando el sistema de ecuaciones por la matriz  $[\Phi_R]^H$ , siendo  $[\Lambda]$  los valores propios.

$$\{\dot{\eta}\} - [\Lambda] \{\eta\} = [\Phi_L]^H \{g_T(t)\} \quad (2.68)$$

La función de transferencia entre dos grados de libertad  $t$  y  $s$  se expresa mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
H_{ts}(\omega) &= \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\Phi_L\}_{N+t}^r \{\Phi_R\}_{N+s}^r}{a_r(i\omega - \lambda_r)} = \\
&\sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_L\}_t^r \{\psi_R\}_s^r}{a_r(i\omega - \lambda_r)} + \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_L^*\}_t^r \{\psi_R^*\}_s^r}{a_r^*(i\omega - \lambda_r^*)}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

## 2.8. Aplicación del CAAE en una viga empotrada libre

En este apartado se aplica el control activo acústico estructural a una viga empotrada libre. Las técnicas que se aplican son las descritas en el estado del arte para ver así las limitaciones que pueden presentar. En un primer caso se ha calculado la respuesta vibratoria de una viga continua empotrada libre y también se han obtenido los modos de vibración de una viga discreta. Posteriormente se han obtenido las eficiencias de radiación y finalmente se ha realizado un control mediante la técnica de realimentación de la aceleración. El posicionamiento óptimo del actuador y del sensor se ha obtenido con la técnica de Gawronski (1999), siendo los parámetros del controlador calculados mediante la técnica del *punto de corte*. Finalmente se ha estudiado la estabilidad del control y la reducción de ruido que se ha conseguido con todo ello.

### 2.8.1. Respuesta vibratoria de una viga continua empotrada libre

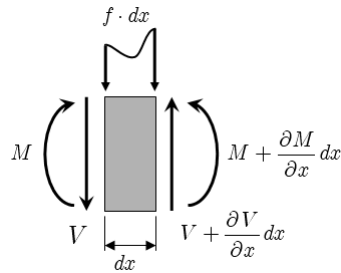
Se considera una viga de Bernoulli-Euler no uniforme de longitud  $L$  cuya deformación transversal se define mediante  $w(x, t)$ , el área de la sección transversal es  $A(x)$ ,  $E(x)$  el módulo de elasticidad,  $\rho(x)$  la densidad,  $I(x)$  el momento de inercia y la fuerza externa aplicada por unidad de longitud  $f(x, t)$ . Por la teoría de resistencia de materiales el momento flector  $M(x, t)$  se relaciona con la deformación de la viga mediante la siguiente expresión:

$$M(x, t) = E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{2.70}$$

En la figura 2.49 se puede observar un elemento diferencial con las condiciones de contorno. Se supone que la deformación de cortadura es mucho más pequeña que la deformación  $w(x, t)$ . Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) - V(x, t) + f(x, t) dx = \rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \tag{2.71}$$

donde  $V(x, t)$  es la fuerza de cortadura en el punto  $x$ .



**Figura 2.21:** Elemento diferencial de la viga empotrada libre con un momento

Aplicando el sumatorio de momentos al elemento de la viga obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left( M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right) - M(x, t) + \left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) dx \\ = \rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Al ser  $dx$  una longitud diferencial,  $(dx)^2$  es despreciable, y por tanto la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$V(x, t) = - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (2.73)$$

Dicha expresión relaciona la fuerza de cortadura con el momento flector. Sustituyendo la expresión anterior en la 2.128 y operando nos queda que:

$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M(x, t)) dx + f(x, t) dx = \rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.74)$$

y sustituyendo la expresión 2.127 en la 2.131 y dividiendo por  $dx$ , obtenemos que:

$$\rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right) = f(x, t) \quad (2.75)$$

Si la fuerza externa aplicada  $f(x, t)$  es cero, la ecuación de movimiento de la viga está dada por:

$$\rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.76)$$

Esta expresión es una ecuación de segundo orden, la cual gobierna la vibración de la viga empotrada libre.

Si los parámetros  $E(x)$ ,  $A(x)$ ,  $I(x)$  y  $\rho(x)$  son constantes, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente forma:

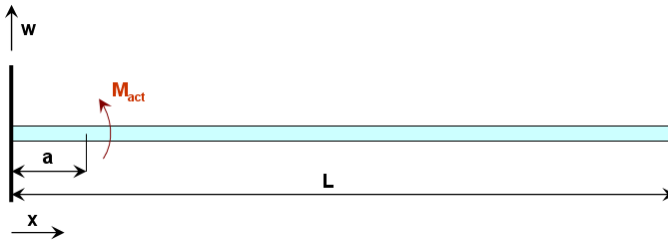
$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.77)$$

donde,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.78)$$

### 2.8.1.1. Ecuación que gobierna la viga empotrada libre con un momento aplicado

En el siguiente análisis se va asumir que en la viga se aplica un momento puntual  $M_{act}$  a una distancia  $a$ ; el modelo se puede observar en la siguiente figura:



**Figura 2.22:** Viga empotrada libre con un momento aplicado

Para resolver el problema acoplado se ha seccionado la viga en dos partes: la primera parte va desde el empotramiento a donde está el momento ( $0 \leq x \leq a$ ), la segunda parte hasta el extremo de la viga que queda libre ( $a \leq x \leq L$ ). Las condiciones de contorno de la viga en el lado del empotramiento son de desplazamiento y rotación nulos, los cuales vienen dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} w(x, t) = 0 \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} x = 0 \quad (2.79)$$

Las condiciones de contorno en el extremo libre son de nulidad del momento flector y de la fuerza de cortadura, como queda reflejado en las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} &= 0 \\ EI \frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \right\} x = L \quad (2.80)$$

La respuesta del sistema en cualquier punto de la viga bajo la influencia de un momento armónico  $M(t) = M_k \sin wt$  en  $x = a$  viene dada por  $w(x, t)$ . En este caso la viga se separa en dos partes,  $0 \leq x \leq a$  y  $a \leq x \leq L$  y la respuesta en esas dos partes viene dada por,

$$w(x, t) = \begin{cases} w_1(x, t); & 0 < x < a \\ w_2(x, t); & a < x < L \end{cases} \quad (2.81)$$

Así las ecuaciones de la viga se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x^4} = 0; \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w_2(x, t)}{\partial x^4} = 0; \quad a < x < L, \quad t > 0 \quad (2.83)$$

Las condiciones de contorno para estas dos partes de la viga se pueden reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} w_2(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w_1(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ EI \frac{\partial^2 w_2(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad y \quad EI \frac{\partial^3 w_2(L, t)}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

En el punto  $x = a$ , el punto donde está aplicado el momento flector la deformada y la rotación son la misma en las dos partes de la viga. En ese punto el momento flector de las dos partes se diferencia por  $1/EI$ . Las siguientes condiciones de contorno representan la unión en el punto  $x = a$ .

$$w_1(a, t) = w_2(a, t) \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial w_1(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_2(a, t)}{\partial x} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial^2 w_1(a, t)}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 w_2(a, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^3 w_1(a, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_2(a, t)}{\partial x^3} \quad (2.88)$$

Llevando a cabo el cambio de variables

$$w_i(x, t) = \nu_i(x) \text{sen}(\omega t), \quad i = 1, 2 \quad (2.89)$$

en las ecuaciones 2.139 y 2.140.

$$EI\nu_1^{IV} - A\rho\omega^2\nu_1 = 0; \quad 0 < x < a \quad (2.90)$$

$$EI\nu_2^{IV} - A\rho\omega^2\nu_2 = 0; \quad a < x < L \quad (2.91)$$

Asimismo, las condiciones de contorno quedan:

$$\nu_1(0) = \nu_1^I(0) = \nu_2^{II}(L) = \nu_2^{III}(L) = 0 \quad (2.92)$$

y las condiciones de unión

$$\begin{aligned} \nu_1(a) = \nu_2(a), \quad \nu_1^I(a) = \nu_2^I(a), \\ \nu_1^{II}(a) - \nu_2^{II}(a) = 1/EI, \quad \nu_1^{III}(a) = \nu_2^{III}(a) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Las ecuaciones 2.147 y 2.148 se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\nu_1^{IV} - \beta^4\nu_1 = 0, \quad 0 < x < a \quad (2.94)$$

$$\nu_2^{IV} - \beta^4\nu_2 = 0, \quad a < x < L \quad (2.95)$$

donde,

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (2.96)$$

La solución general para las ecuaciones 2.151 y 2.152 viene dada por,

$$\nu_i(x) = A_i \text{sen}(\beta x) + B_i \text{senh}(\beta x) + C_i \cos(\beta x) + D_i \cosh(\beta x); \quad i = 1, 2 \quad (2.97)$$

Las cuatro condiciones de contorno y las cuatro condiciones de unión anterior pueden ser usadas para evaluar las ocho constantes  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $D_1$ , quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Az = b \quad (2.98)$$



donde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^2 s\beta a & -\beta^2 c\beta a & \beta^2 sh\beta a & \beta^2 ch\beta a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^3 c\beta a & \beta^3 s\beta a & \beta^3 ch\beta a & \beta^3 sh\beta a \\ s\beta a & c\beta a & sh\beta a & ch\beta a & -s\beta a & -c\beta a & -sh\beta a & ch\beta a \\ \beta c\beta a & -\beta s\beta a & \beta ch\beta a & \beta sh\beta a & -\beta c\beta a & \beta s\beta a & -\beta ch\beta a & -\beta sh\beta a \\ -\beta^2 s\beta a & -\beta^2 c\beta a & \beta^2 sh\beta a & \beta^2 ch\beta a & \beta^2 s\beta a & \beta^2 c\beta a & -\beta^2 sh\beta a & -\beta^2 ch\beta a \\ -\beta^3 c\beta a & \beta^3 s\beta a & \beta^3 ch\beta a & \beta^3 sh\beta a & \beta^3 c\beta a & -\beta^3 s\beta a & -\beta^3 ch\beta a & -\beta^3 sh\beta a \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$z = [A_1 \quad B_1 \quad C_1 \quad D_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad C_2 \quad D_2] \quad (2.100)$$

y

$$b = \frac{1}{EI} e_8 \quad (2.101)$$

siendo,  $e_8$  vector columna de ceros excepto en la posición 8.

El determinante de la matriz  $A$  se calcula para diferentes valores de  $\beta$ ; los valores que la hacen singular se designan como  $\beta_n$  siendo las frecuencias naturales correspondientes:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.102)$$

La ecuación característica del sistema anterior es:

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0 \quad (2.103)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2.155 se hallan las constantes y posteriormente se pueden hallar las funciones de transferencia de los diferentes puntos de la viga. A continuación se pueden observar las funciones de transferencia  $G_{noCol}$  en  $x = L$  y  $G_{Col}$  en  $x = a$ , los cuales se han representado en la figura 2.51:

$$G_{noCol} = \frac{v_2(x=L)}{M(x=a)} = \frac{\sinh(\beta L) \sin(\beta L) - \cos(\beta L) \cosh(\beta a) + \sin(\beta a) \sinh(\beta L)}{2\beta^2 c(1 + \cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} + \frac{\cos(\beta a) \cosh(\beta L) + \cos(-\beta L + \beta a) - \cosh(-\beta L + \beta a)}{2\beta^2 c(1 + \cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \quad (2.104)$$

$$G_{Col} = \frac{v_2(x=a)}{M(x=a)} = \frac{\sin(\beta L) \sinh(2\beta a + \beta L) - \sinh(\beta L) \sin(2\beta a - \beta L) + 2 \sin(\beta a) \sinh(\beta a)}{4\beta^2 c(1 + \cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} + \frac{2 \sinh(-\beta L + \beta a) \sinh(-\beta L + \beta a)}{4\beta^2 c(1 + \cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \quad (2.105)$$

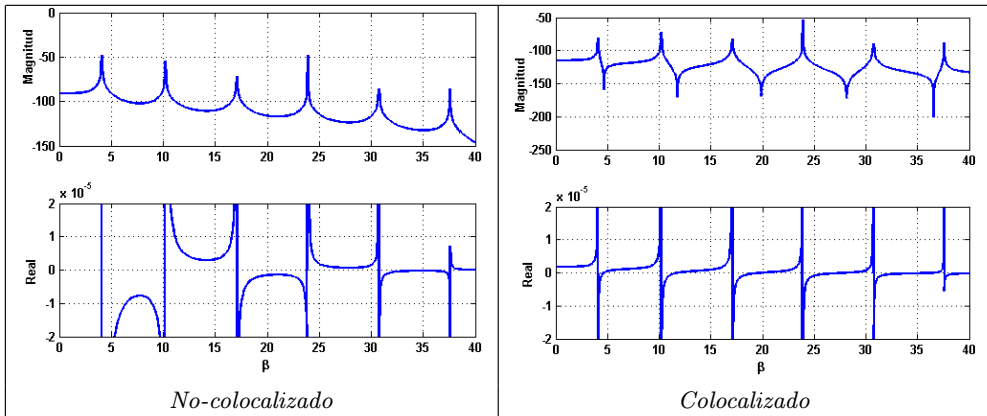


Figura 2.23: FRF *no-colocalizado* y *colocalizado* (un momento aplicado)

### 2.8.1.2. Ecuación que gobierna una viga empotrada libre con dos momentos aplicados

En el siguiente análisis se va asumir que el actuador y la unión producen dos momentos sobre la viga empotrada libre (figura 2.52):

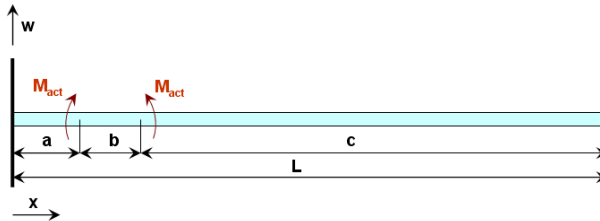


Figura 2.24: Viga empotrada libre con dos momentos aplicados

Para resolver este problema acoplado se han resuelto los casos de los dos momentos independientemente. En el primer caso se ha resuelto suponiendo que la respuesta de la viga solo está gobernada por el momento que está a la distancia  $a$ , en el segundo, con el momento en el punto  $x = a + b$ .

En los dos casos el sistema de ecuaciones que resulta es similar:

$$A_a z_a = b_a \quad (2.106)$$

$$A_{a+b} z_{a+b} = b_{a+b} \quad (2.107)$$

Siendo las matrices  $A_a$  igual a la expresión 2.156 y  $A_{a+b}$  es la misma matriz pero en vez de  $a$  poniendo  $a + b$ . Los vectores  $b_a$  y  $b_{a+b}$  son iguales a la expresión 2.157.

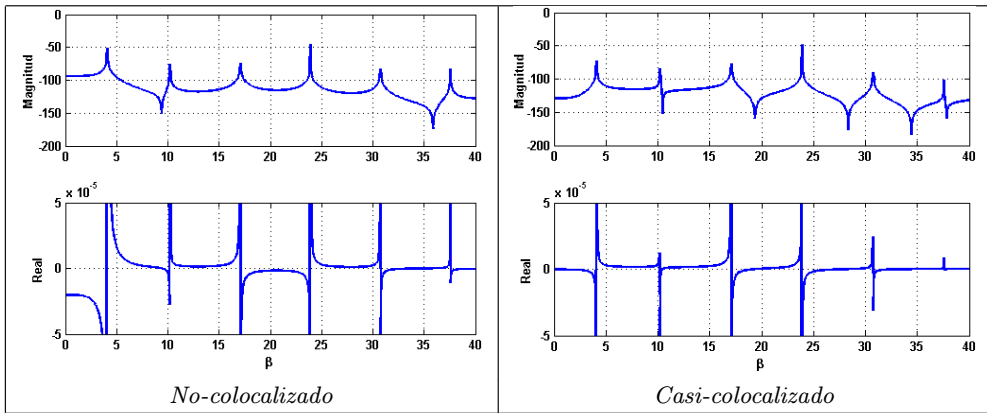
La función de transferencia de los dos momentos y un punto en el extremo de la viga  $x = L$  define la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
G_{noCol} &= G_{noCola} + G_{noColk} = \frac{\nu_{2a}(x=L)}{M(x=a)} + \frac{\nu_{2k}(x=L)}{M(x=a+b)} = \\
&= \frac{\text{sen}(\beta L) \text{senh}(\beta a) - \cosh(\beta L) \cos(\beta a) + \cos(\beta L) \cosh(\beta a)}{2\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} + \\
&+ \frac{\text{sen}(\beta L) \text{senh}(\beta a) + \cosh(-\beta L + \beta a + \beta b) - \cos(-\beta L + \beta a + \beta b) \cos(-\beta L + \beta a)}{2\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\cosh(-\beta L + \beta a) + \cos(\beta L) \cosh(\beta a + \beta b) - \sin(\beta L) \text{sinh}(\beta a + \beta b)}{2\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{-\text{sinh}(\beta L) \text{sen}(\beta a + \beta b) - \cosh(\beta L) \cos(\beta a + \beta b)}{2\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

La función de transferencia de los dos momentos y un punto en la mitad de los dos momentos  $x = a + b/2$  es:

$$\begin{aligned}
G_{Col} &= G_{Cola} + G_{Colk} = \frac{\nu_{2a}(x=a+b/2)}{M(x=a)} + \frac{\nu_{2k}(x=a+b/2)}{M(x=a+b)} = \\
&= \frac{2 \cosh(\beta b/2) + 2 \cos(\beta b/2) + 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta b/2 + \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} + \\
&+ \frac{\text{sinh}(\beta L) \sin(2\beta a + \beta b/2 - \beta L) + \cosh(\beta a + \beta b - \beta L) \cos(\beta a + \beta b/2 - \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\cos(-\beta L + \beta a) \cosh(\beta a + \beta b/2 - \beta L) + \sin(-\beta L + \beta a) \text{sinh}(\beta a + \beta b/2 - \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\text{sen}(\beta L) \text{senh}(2\beta a + \beta b/2\beta L) - \sin(2\beta a + \beta b/2) \text{senh}(\beta a + \beta b)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\cosh(\beta a + \beta b) \cos(\beta a) + \text{senh}(\beta a + \beta b/2) \text{sen}(\beta a) - \cos(\beta a + \beta b/2) \cosh(\beta a)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\cosh(\beta a + \beta b) \cos(\beta a + \beta b/2 - \beta L) + \text{sen}(\beta a + \beta b/2) \text{senh}(\beta a)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{\text{senh}(\beta a + \beta b/2) \text{sen}(\beta a + \beta b) + \cos(\beta a + \beta b/2) \cosh(\beta a + \beta b)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{-\text{senh}(\beta a + \beta b - \beta L) \text{sen}(\beta a + \beta b/2 - \beta L) - \text{senh}(\beta L) \text{sen}(2\beta a + 3\beta b/2 - \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{-\text{senh}(\beta a - \beta L) \text{sen}(\beta a + \beta b/2 - \beta L) - 2 \cos(\beta L) \cosh(\beta b/2 - \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{-\text{sen}(\beta L) \text{senh}(2\beta a + 3\beta b/2 - \beta L) - \cosh(\beta a + \beta b/2) \cos(\beta a + \beta b)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)} \\
&+ \frac{-\cos(\beta a + \beta b - \beta L) \cosh(\beta a + \beta b/2 - \beta L) - \text{sen}(\beta a + \beta b - \beta L) \text{senh}(\beta a + \beta b/2 - \beta L)}{4\beta^2 EI(1+\cos(\beta L)) \cosh(\beta L)}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Las FRF de dichas funciones de transferencia se han representado en la figura 2.53.

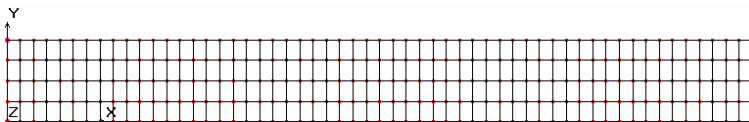


**Figura 2.25:** FRF *no-colocalizado* y *colocalizado* (dos momentos aplicados)

En los estudios que se han realizado de las FRF con un momento y dos momentos se puede observar que, en el caso del actuador pegado al empotramiento y el sensor en el mismo punto el rango de frecuencia en la que aparecen antiresonancias detrás de un pico de resonancia es muy amplio. En cambio si el actuador está separado del empotramiento, la FRF entre dicho actuador y el sensor en la mitad de los momentos no presenta una antiresonancia entre el primer modo y el segundo de flexión.

### 2.8.2. Modos de vibración de un sistema discreto

Se considera un modelo de viga empotrada libre discretizada como se puede indicar en la siguiente figura.



**Figura 2.26:** Modelo de elementos finitos de la viga empotrada libre

En las figuras 2.55 y 2.56 se pueden observar los cuatro primeros modos de flexión de la viga empotrada libre del modelo de elementos finitos de la figura 2.54.

### 2.8.3. Eficiencias de radiación

Los modos de una viga empotrada libre calculados analíticamente representando en una dimensión son los de la expresión y su forma se puede observar en la figura 2.57

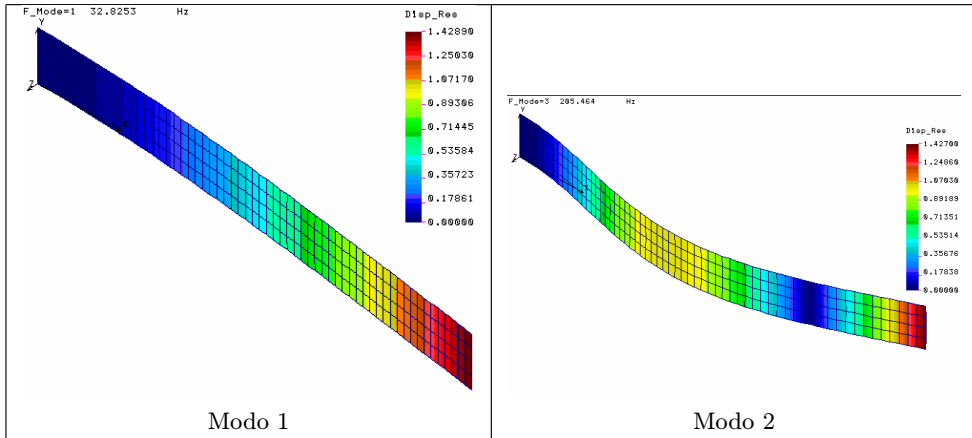


Figura 2.27: Primeros dos modos de flexión

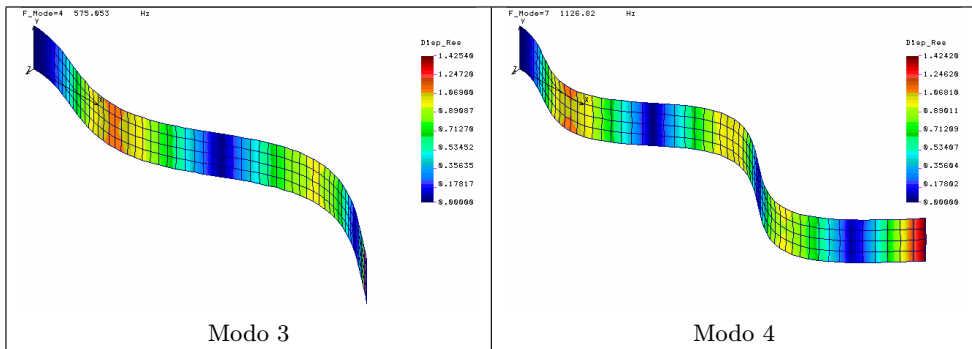


Figura 2.28: Tercer y cuarto modos de flexión

(a):

$$\phi(x) = \cosh(k_n x) - \cos(k_n x) - \sigma_n (\sinh(k_n x) - \sin(k_n x)) \quad (2.110)$$

siendo,

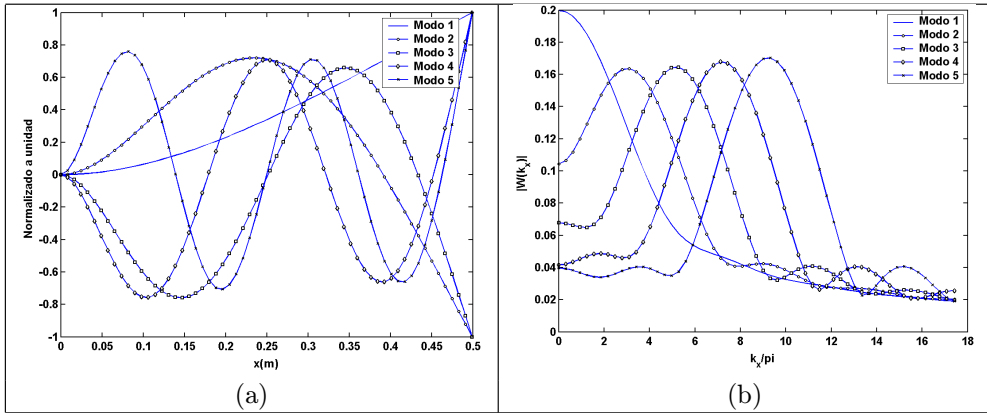
$k_n$  número de onda estructural

$\sigma_n$  parámetro adimensionales de las frecuencias naturales

Aplicando a los modos naturales (figura 2.57 (a)) de la expresión 2.167 la *transformada de Fourier espacial* en una dimensión, expresión 2.168, se obtiene la forma de los modos de flexión en el dominio de número de onda, expresión 2.169, los cuales se han representado en la figura 2.57 (b):

$$\phi(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{jk_x x} dx \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \phi(k_x) &= \frac{[k_n \sinh(k_n L) - j k_x \cosh(k_n L)] e^{jk_x L} + j k_x -}{k_n^2 + k_x^2} - \\ &\frac{[k_n \sin(k_n L) + j k_x \cos(k_n L)] e^{jk_x L} - j k_x -}{k_n^2 - k_x^2} - \\ \sigma_n &\left[ \frac{[k_n \cosh(k_n L) - j k_x \sinh(k_n L)] e^{jk_x L} - k_n -}{k_n^2 + k_x^2} - \right. \\ &\left. \frac{k_n - e^{jk_x L} [k_n \cos(k_n L) - j k_x \sin(k_n L)]}{k_n^2 - k_x^2} \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$



**Figura 2.29:** Modos de vibración y transformación al dominio de número de onda

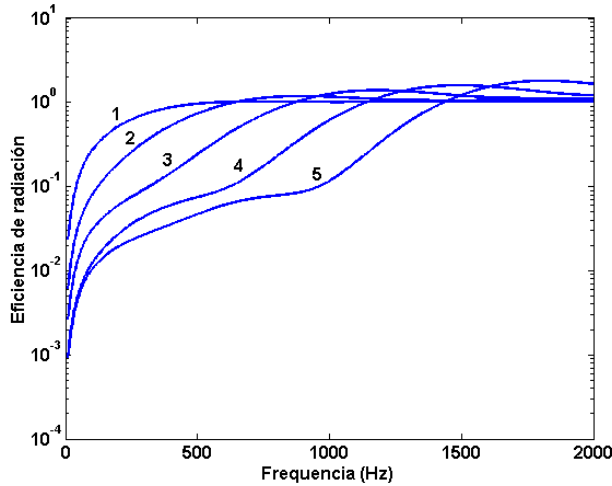
A continuación se ha calculado la eficiencia de radiación (figura 2.58) mediante la fórmula de Wallace (Fahy, 1985):

$$\sigma_n = \frac{\Pi}{\langle |\dot{w}_n| \rangle \rho_0 c_0 L} \quad (2.113)$$

donde  $\Pi$  (2.172) es la potencia de ruido radiado,  $\rho_0$  densidad del aire,  $c_0$  velocidad del aire,  $L$  la longitud de la viga y  $\langle |\dot{w}_n| \rangle$  la media temporal y espacial de la velocidad modal de la viga, siendo su expresión:

$$\overline{\langle |\dot{w}^2(x)| \rangle} \approx \frac{1}{2N_x} \sum_{i=1}^{N_x} |\dot{w}(x_i)|^2 \quad (2.114)$$

$$\Pi = \frac{\omega \rho_0}{8\pi^2} \operatorname{Re} \left[ \int_{k_x^2 \leq k^2} \frac{|\dot{\phi}(k_x)|^2}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_x \right] \quad (2.115)$$



**Figura 2.30:** Eficiencias de radiación

En la figura 2.58 se puede observar que a bajas frecuencias los modos más eficientes son los de orden inferior, siendo el más eficiente el de primer orden y que cuanto mayor es el orden la eficiencia va decayendo.

Una vez observado que los modos de vibración más eficientes para radiar ruido son los primeros, se ha considerado actuar sobre los tres primeros de flexión, calculando para ello el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor una vez elegido estos.

#### 2.8.4. Posicionamiento óptimo con el método de Gawronski

A continuación se ha realizado una selección simultánea de las localizaciones óptimas del actuador y del sensor mediante el algoritmo de posicionamiento de actuadores y sensores desarrollado para estructuras flexibles basado en la norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  o la norma modal de Hankel (Gawronski, 1999). El algoritmo consiste en determinar la norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  o la norma modal de Hankel para la función de transferencia de cada combinación de modo, actuador y sensor. Basado en esas normas se generan las matrices de los índices de posición de actuadores y sensores para cada modo considerado. Posteriormente las matrices se evalúan y se obtienen simultáneamente las posiciones del actuador y del sensor allí donde se maximice la norma de cada modo.

La función de transferencia del modo  $i$  entre el actuador y el sensor se obtiene con la siguiente expresión:

$$G_{ijk}(s) = \frac{\{\psi_{a,j}^i\} \{\psi_{s,k}^i\}}{s^2 + 2\xi_{n,i}\omega_{n,i}s + \omega_{n,i}^2} \quad (2.116)$$

siendo  $\{\psi_a\}$  y  $\{\psi_s\}$  los vectores de influencia modal del actuador y del sensor, respectivamente.

$\{\psi_a\} = \{P_a\} [\Psi]$  es el vector columna de influencia modal del actuador.

$\{\psi_s\} = \{P_s\} [\Psi]$  es el vector fila de influencia modal del acelerómetro.

$[\Psi]$  es la matriz modal normalizado a masa modal y  $\{P_a\}$  es el vector de influencia del actuador, el cual valdrá 1 o -1 según el sentido de la fuerza donde esté el actuador y 0 en el resto de los grados de libertad.  $\{P_s\}$  es el vector de influencia del acelerómetro, el cual valdrá 1 donde esté el acelerómetro y 0 en el resto de los grados de libertad.  $\omega_n$  y  $\xi_n$  son las frecuencias naturales y el coeficiente de amortiguamiento modal, respectivamente.

La norma  $H_2$  de una función de transferencia se define como:

$$\|G_{ijk}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ijk}^*(\omega) G_{ijk}(\omega) d\omega \quad (2.117)$$

Esta norma,  $\|G_{ijk}\|$ , se calcula para el modo  $i$  con el actuador  $j$  y el sensor  $k$  de una selección de  $J$  candidatos de actuadores y  $S$  candidatos de sensores. La maximización de dicha norma se emplea como criterio para la optimización del posicionamiento del actuador y del sensor.

El índice del actuador y del sensor para el modo  $i$  se define como:

$$\sigma_{ijk} = \frac{\|G_{ijk}\|}{\|G_{mi}\|} \quad (2.118)$$

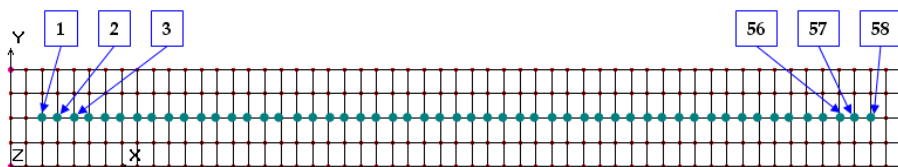
siendo  $\|G_{mi}\|$  la suma de la media cuadrática de todos los actuadores y sensores para el modo  $m$ :

$$\|G_{mi}\|_2^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^S \|G_{ijk}\|_2^2 \quad (2.119)$$

La técnica de Gawronski (Gawronski,1999) se ha aplicado al ejemplo de viga empotrada libre, para hallar el posicionamiento óptimo de actuador y sensor, con un actuador piezoeléctrico de tipo pila posicionado paralelamente como se puede ver en la figura 2.13 y como sensor un acelerómetro para medir el movimiento vertical a la viga empotrada libre. En la siguiente figura se pueden observar los posibles posicionamientos de



los actuadores y sensores considerados, la longitud del sensor que se ha considerado ha sido de 3 cm:



**Figura 2.31:** Posiciones posibles de actuadores y sensores

Los resultados que se han obtenido para los tres primeros modos de flexión son los representados en la figura 2.60, 2.61 y 2.62:

El máximo valor del índice de posicionamiento de los dos primeros modos resulta ser de 1 para el actuador y de 58 para el sensor. Es por esto que se han definido las posiciones del actuador y del sensor en los puntos 1 y 58, respectivamente, para controlar los tres primeros modos de flexión, siendo la posición del actuador al lado del empotramiento y la del sensor en el extremo libre de la viga.

### 2.8.5. Control de realimentación de segundo orden

La estrategia de control por realimentación de la aceleración (*Acceleration Feedback Control*, AFC) con un filtro de segundo orden es una solución para introducir amortiguamiento en un sistema. En esta estrategia de control la salida del sistema es una aceleración y la entrada una fuerza. La figura 2.63 muestra el diagrama de bloques del sistema de control:

Las ecuaciones del sistema para el caso multimodal con un actuador y un sensor *no-colocalizados* son:

$$\left. \begin{aligned} [M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} &= -\{P_a\} \{G\}^T [\Omega_c] \{\nu\} + \{F\} \\ \{\ddot{\nu}\} + [\Delta_c] \{\dot{\nu}\} + [\Delta_c] \{\nu\} &= \{P_s\}^T \{\ddot{x}\} \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

donde,

$\{P_a\}$  y  $\{P_s\}$  son vectores de ceros excepto en la posición correspondiente al grado de libertad del actuador y del sensor donde habrá un 1 respectivamente.

$[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente.

$\{x\}$  es el vector de coordenadas del sensor.

Suponiendo que se van a controlar un subconjunto de  $p$  modos, tal que  $p \leq n$ , siendo  $n$  el número de modos seleccionados para modelizar el sistema, sean:

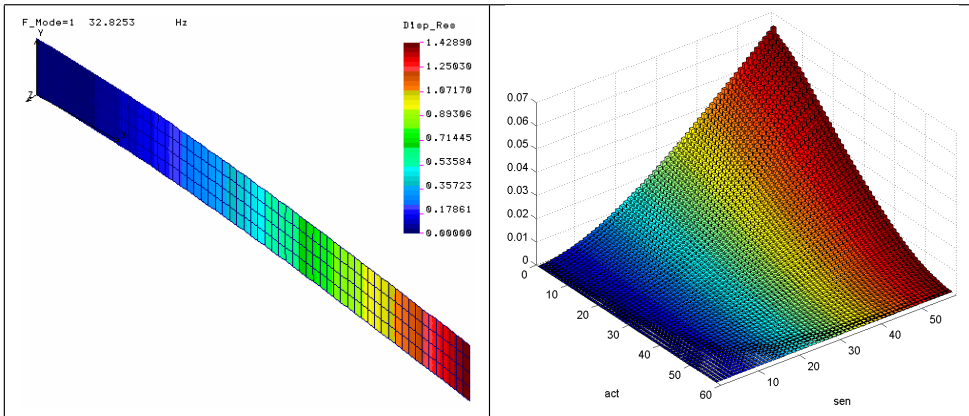


Figura 2.32: Posiciones óptimas de actuador y sensor para el primer modo

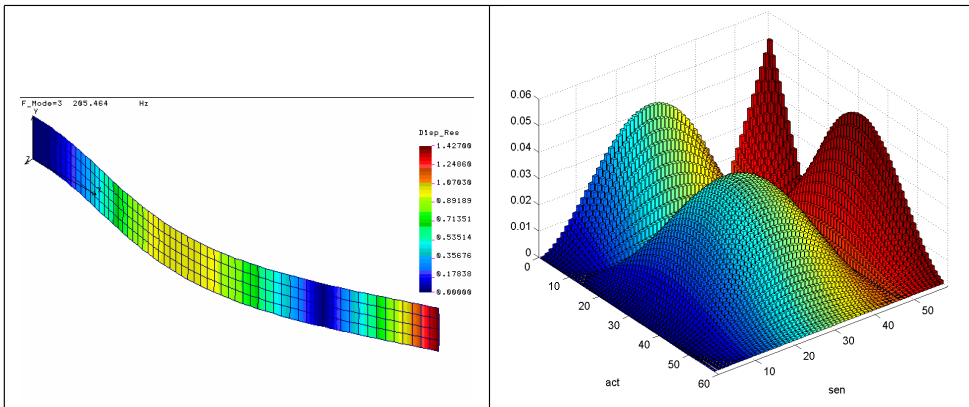


Figura 2.33: Posiciones óptimas de actuador y sensor para el segundo modo

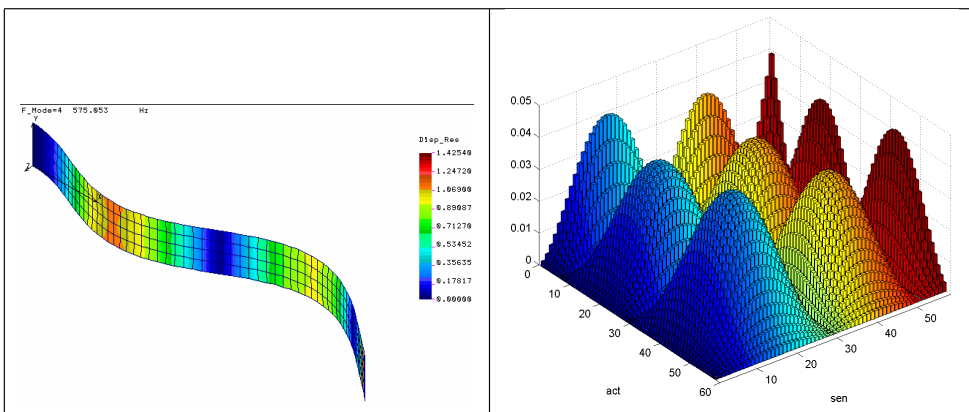
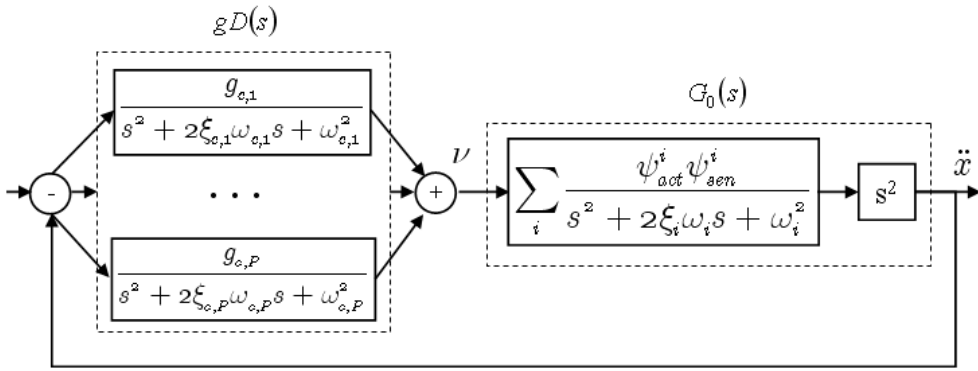


Figura 2.34: Posiciones óptimas de actuador y sensor para el tercer modo



**Figura 2.35:** Diagrama de bloques AFC

$\{\nu\}$  es el vector de señales del control (salidas de los filtros).

$[\Delta_c] = \text{diag}(2\xi_c \omega_c)$  el amortiguamiento del controlador.

$[\Delta_c] = \text{diag}(\omega_c^2)$  las frecuencias naturales del controlador.

$[G]$  el vector columna de la ganancia del controlador.

Realizando el cambio de variable  $\{x\} = [\psi] \{y\}$ , donde  $[\psi]$  es la matriz de modos normalizado a masa modal y  $\{y\}$  el vector de las  $n$  coordenadas modales de la estructura, las ecuaciones modales del la viga con el controlador quedan:

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{y}\} + [\Delta_n] \{\dot{y}\} + [\Omega_n] \{y\} &= -\{\psi_a\} \{G\}^T [\Omega_c] \{\nu\} + \{F_{exc}\} \\ \{\ddot{\nu}\} + [\Delta_c] \{\dot{\nu}\} + [\Delta_c] \{\nu\} &= \{\psi_s\}^T \{\ddot{y}\} \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

donde,

$\{y\}$  es el vector de coordenadas modales

$[\Delta_n] = \text{diag}(2\xi_n \omega_n)$  es el amortiguamiento de la estructura.

$[\Omega_n] = \text{diag}(\omega_n^2)$  son las frecuencias naturales de la estructura.

$\{\psi_a\} = \{P_a\} [\psi]$  es el vector columna de influencia modal del actuador.

$\{\psi_s\} = [\psi]^T \{P_s\}$  es el vector columna de influencia modal del acelerómetro.

$\{\bar{F}\} = [\psi]^T \{F\}$  el vector fuerza modal.

### 2.8.6. Sintonía del controlador *AFC* de 2º orden: Técnica del *punto de corte*

A continuación se va a detallar el procedimiento para calcular los parámetros de los filtros de control con la técnica del *punto de corte* para controlar los tres primeros modos de flexión en la viga empotrada, posicionando el actuador cerca del empotramiento y el sensor en el extremo libre de la viga. Para el cálculo de estos parámetros se ha realizado un estudio selectivo del primer, segundo y el tercer modos de flexión, es decir los parámetros se han calculado independientemente para cada filtro de control, suponiendo que la respuesta del sistema está únicamente dominada por el modo que se desea controlar. En estos casos las ecuaciones de lazo cerrado en coordenadas modales de cada modo con su controlador tienen la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + 2\xi_n\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y &= \phi_{exc}^n F_{exc} - \psi_a^n g\omega_c^2\nu \\ \ddot{\nu} + 2\xi_c\omega_c\dot{\nu} + \omega_c^2\nu &= \psi_s^n \ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

siendo,  $y$  la coordenada modal del modo que se desea controlar,  $\omega_n$  y  $\xi_n$  la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del modo que se desea controlar respectivamente.  $g$  la ganancia del controlador,  $\omega_c$  y  $\xi_c$  la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del filtro de control, respectivamente.  $\psi_{exc}^n$  parámetro de influencia de la fuerza de excitación  $\psi_{exc}^n = \{\psi^n\}^T \{P_{exc}\}$ , siendo  $\{\psi^n\}$  el modo natural que se desea controlar y  $\{P_{exc}\}$  un vector de ceros excepto en el grado de libertad que actúa la fuerza de excitación que habrá un 1.

Los parámetros  $\psi_a^n$  y  $\psi_s^n$  son los parámetros de influencia modal del actuador y del acelerómetro, cuyos valores se calculan de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \psi_a^n &= \{\psi^n\}^T \{P_a\} \\ \psi_s^n &= \{P_s\} \{\psi^n\} \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

siendo  $\{P_a\}$  y  $\{P_s\}$  vector de ceros excepto en la posición correspondiente al grado de libertad del actuador y del sensor que habrá un 1 respectivamente.

Para calcular los parámetros de los tres filtros de control de los tres modos, con el objetivo de conseguir la condición del *punto de corte*, los polos de funcionamiento en lazo cerrado de la función de transferencia entre el actuador y el sensor tenga dos polos complejos conjugados iguales.

Es decir, si la función de transferencia en lazo cerrado, suponiendo que la respuesta está dominada únicamente por el modo que se desea controlar, es:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2}{(s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2)(s^2 + 2\xi_n\omega_n s + \omega_n^2) + \psi_a^n \psi_s^n g\omega_c^2 s^2} \quad (2.124)$$

Para que se cumpla la condición de corte los parámetros deben de ser:

$$\begin{aligned}\omega_c &= \omega_n \\ \xi_c &= \sqrt{g\psi_a^n\psi_s^n} + \xi_n\end{aligned}\tag{2.125}$$

Por tanto eligiendo una ganancia del controlador el resto de los parámetros quedan definidos mediante las ecuaciones 2.182. En la siguiente tabla se han representado los parámetros de los tres filtros de control para controlar los tres primeros modos de flexión de la viga empotrada libre.

Modo	$\omega_n$ (Hz)	$\xi_n$	$\omega_c$ (Hz)	$\xi_c$	$g$
1	32,82	0,01	32,82	0,3146	-5,16
2	205,46	0,01	205,46	0,2918	0,8
3	575,05	0,01	575,05	0,1662	0,05

**Tabla 2.4:** Frecuencias naturales y amortiguamientos sin control y parámetros del controlador

En las tres figuras 2.64, 2.65 y 2.66 se han representado las FRF-s de los tres primeros modos con y sin control y el lugar geométrico de las raíces, suponiendo que en cada una de ellas la respuesta esá dominada únicamente por el modo que se desee controlar.

En las tres figuras de las FRF-s se puede apreciar la amplitud de la FRF se reduce en la frecuencia natural de los tres modos de flexión. También queda patente que el sistema amortiguado tiene una amplitud menor, y que fuera de esa frecuencia las dos curvas coinciden y no se produce ningún pico adicional en ninguno de los tres casos.

## 2.8.7. Resultados vibroacústicos

### 2.8.7.1. Resultados vibratorios

Se ha llevado a cabo un diseño de control de múltiples modos en el sistema que se ha representado anteriormente de la viga empotrada libre con nueve modos de flexión. Los tres primeros modos de flexión se han controlado con un único actuador y sensor pero con tres ecuaciones del compensador de segundo orden puestos en paralelo.

En la figura 2.67 se puede observar tanto la FRF del sistema controlado como la del sistema sin control según la expresión 2.183. Como se puede apreciar, la amplitud de la FRF se reduce en las frecuencias naturales de los modos controlados. Además el sistema amortiguado tiene una amplitud menor en los modos controlados, y fuera de esa frecuencia las dos curvas coinciden y no produce ningún pico adicional ni excitan a ningún otro modo no controlado con las ganancias que se han elegido.

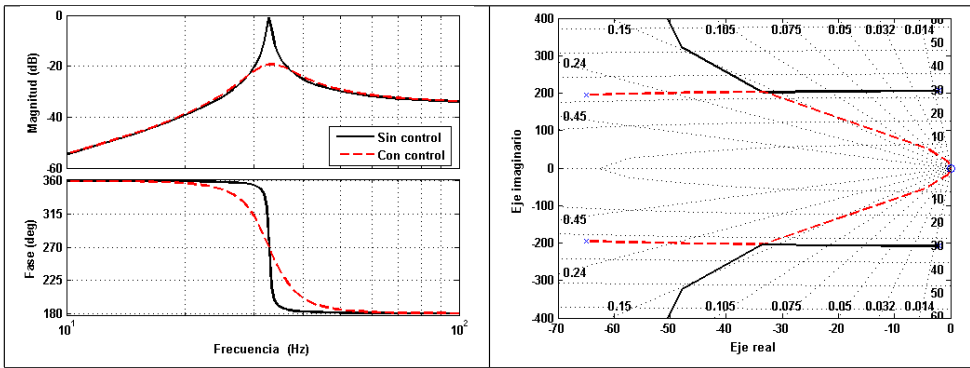


Figura 2.36: FRF y lugar geométrico de las raíces del primer modo

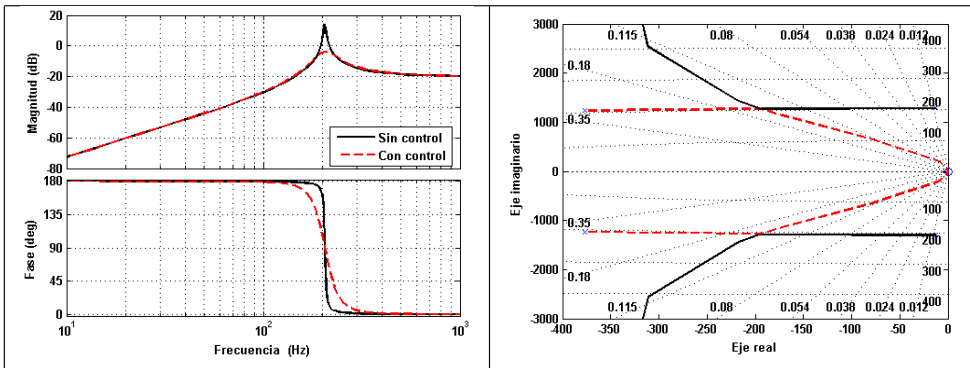


Figura 2.37: FRF y lugar geométrico de las raíces del segundo modo

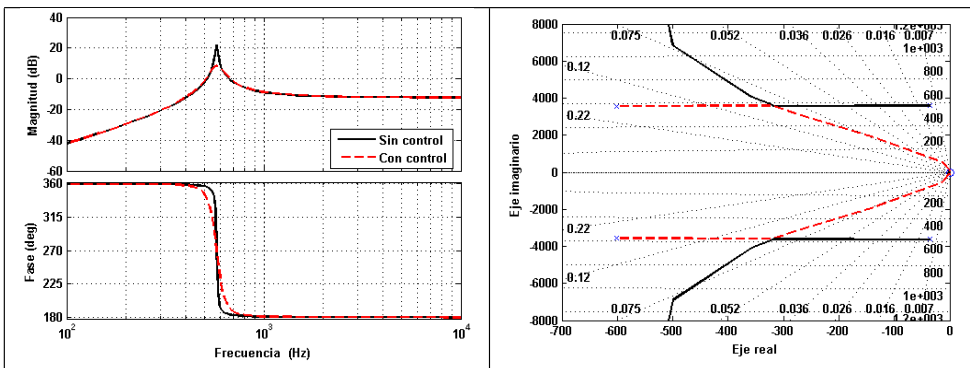
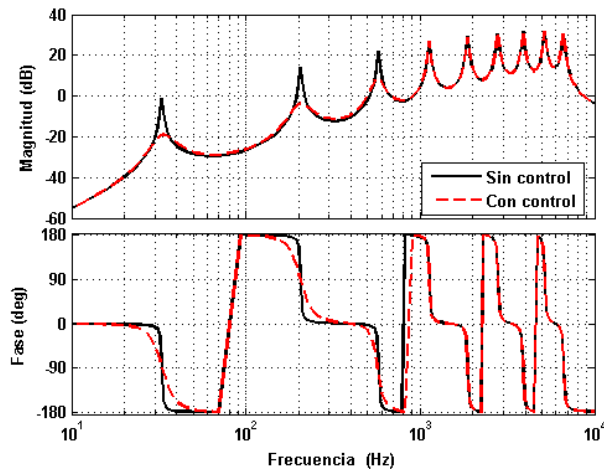


Figura 2.38: FRF y lugar geométrico de las raíces del tercer modo

$$G(s) = \frac{\sum_k \frac{\psi_a^k \psi_s^k s^2}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}}{1 - \left( \sum_p \frac{-g_{c,p} \omega_{c,p}^2}{s^2 + 2\xi_{c,p} s + \omega_{c,p}^2} \right) \left( \sum_k \frac{\psi_a^k \psi_s^k s^2}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2} \right)} \quad (2.126)$$



**Figura 2.39:** FRF del modelo de cinco modos

En el primer modo se ha conseguido una reducción del desplazamiento del extremo de la viga de  $7,210^{-3}$  m a  $8,6810^{-4}$  m, tal como se puede observar en la figura 2.68, consiguiendo un coeficiente de amortiguamiento final del sistema de 0,1623 con una fuerza máxima del actuador de 600N ( $F_{act} = -gw_s^2\ddot{y}$ ) en todo el rango (300/-300N).

En el segundo modo de flexión se ha conseguido obtener en el sistema final un coeficiente de amortiguamiento de 0,1509 con una fuerza máxima del actuador de 100N en todo el rango (50/-50N). En el sistema original (sin controlar), la fuerza de excitación generaba en el extremo una vibración de  $1,710^{-4}$ m de amplitud. Sin embargo, en el sistema controlado dicha amplitud se reduce hasta  $8,6810^{-4}$ m (figura 2.69).

En este caso se observa que se consigue un mayor amortiguamiento con menos fuerza del actuador; pero el sistema es más sensible al valor de la ganancia y podría hacerse inestable debido a valores grandes de amortiguamiento del segundo modo flexional.

En el tercer modo de flexión se ha conseguido un coeficiente de amortiguamiento de 0,0881 con una fuerza máxima del actuador de 34N en todo el rango (17/-17N). En el sistema original la fuerza de excitación crea en el extremo una vibración de  $1,2410^{-5}$ m de amplitud; sin embargo, en el sistema controlado la amplitud se reduce hasta  $6,710^{-6}$ m (figura 2.70).

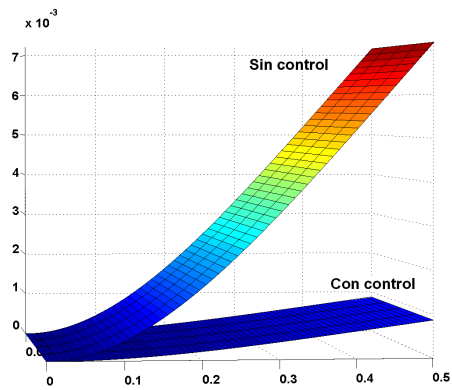


Figura 2.40: Primer modo de flexión con y sin control

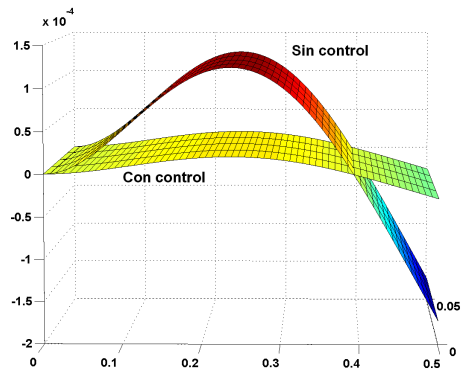


Figura 2.41: Segundo modo de flexión con y sin control

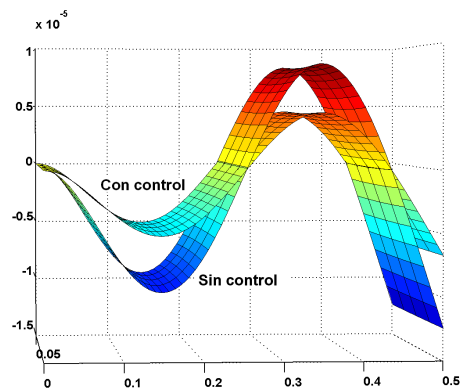


Figura 2.42: Tercer modo de flexión con y sin control



### 2.8.7.2. Resultados acústicos

Los resultados de desplazamientos del sistema modelizado calculados en MATLAB, tanto sin control como con control, han sido introducidos en el programa SYSNOISE, para mediante el cálculo de los elementos de contorno obtener la presión acústica radiada, tanto en el caso de estar el sistema con control como sin ella. Así, en este programa se han obtenido las directividades de los tres modos para todos los casos.

En dicho programa se han obtenido las presiones de radiación acústica en una esfera de radio 2 m centrada en el centro de gravedad de la viga. En las siguientes figuras se observan las diferentes presiones que se han obtenido. En la figura 2.71 (a coordenadas polares y b coordenadas cartesianas se representa la directividad de la radiación de la viga, con y sin control, a la frecuencia del primer modo, que como se puede observar se reduce en un orden de magnitud. Se observa también que tanto con control y como sin control la radiación de la viga sigue siendo de monopolo con mayor presión en la zona de 90 grados. En la figura 2.74 se ha representado la presión acústica del primer modo con y sin control.

En las figuras 2.72 y 2.75 se puede observar que la presión acústica entre el sistema con y sin control del segundo modo de flexión se reduce en casi un orden de magnitud.

En las figuras 2.73 y 2.76 se puede observar la disminución de medio orden de magnitud que ha habido en la presión acústica entre el sistema con y sin control en el tercer modo de flexión. En este caso las zonas de mayor presión acústica son cerca de los 45 y 135 grados.

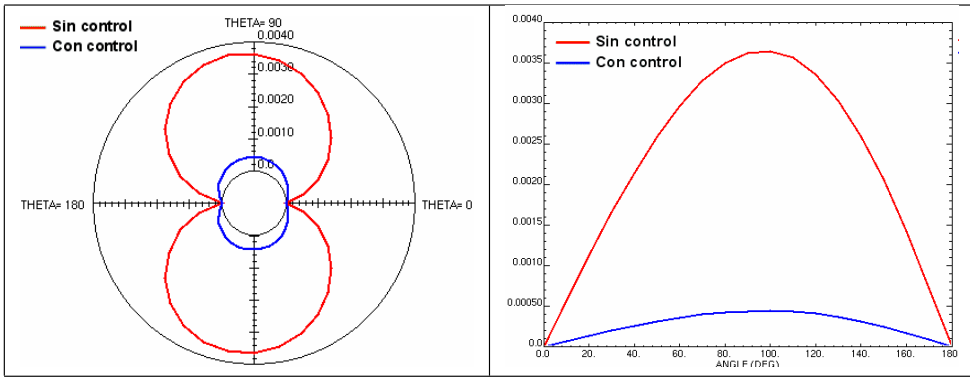


Figura 2.43: Directividad del primer modo de flexión

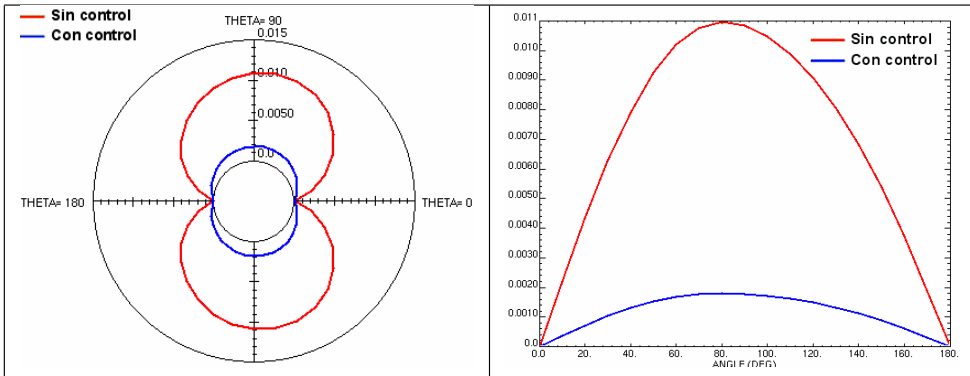


Figura 2.44: Directividad del segundo modo de flexión

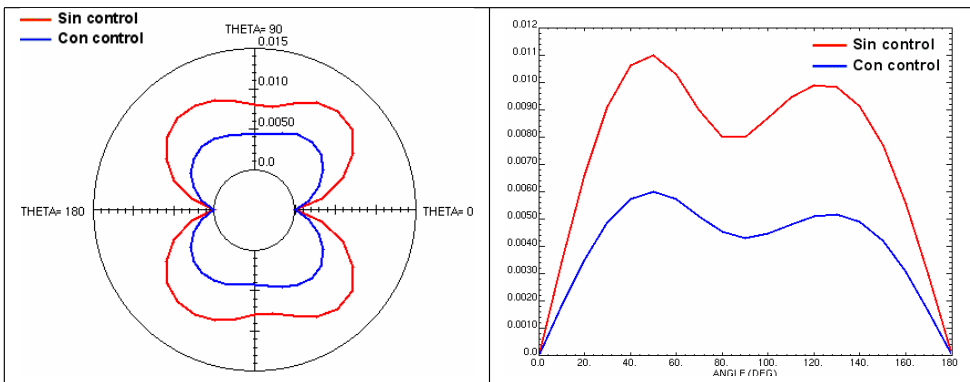
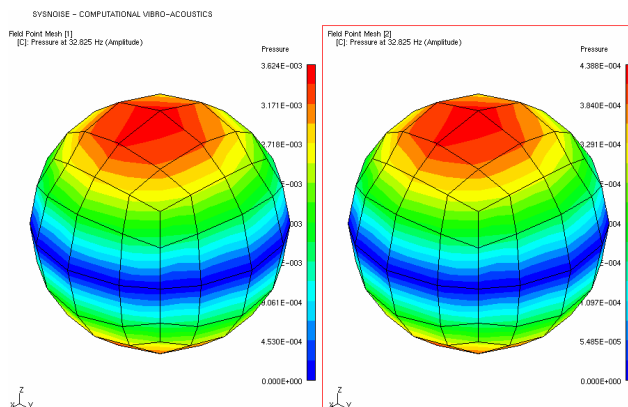
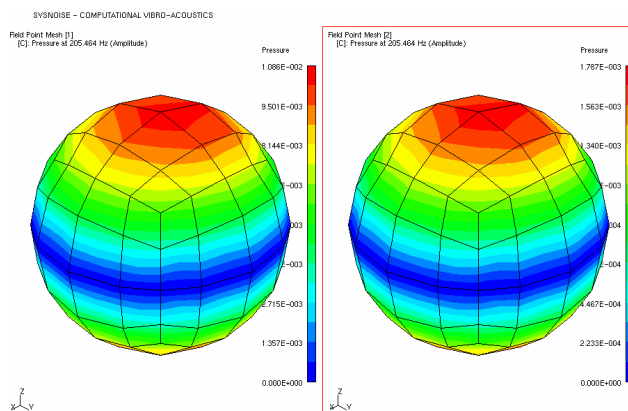


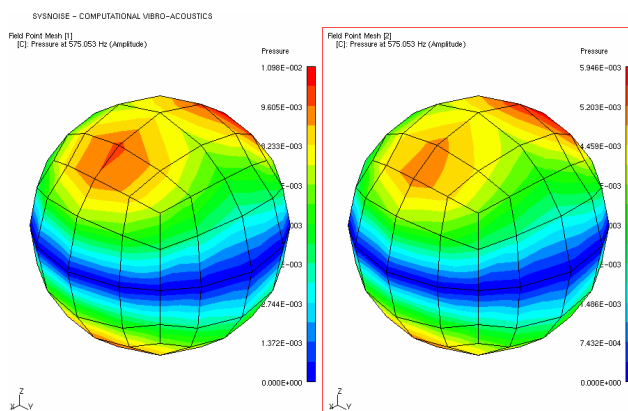
Figura 2.45: Directividad del tercer modo de flexión



**Figura 2.46:** Radiación del primer modo de flexión



**Figura 2.47:** Radiación del segundo modo de flexión



**Figura 2.48:** Radiación del tercer modo de flexión

## 2.9. Conclusiones

Para sistemas de CAAE se requiere una carga activa externa para excitar el sistema físico con objeto de reducir el efecto de las fuentes primarias. En comparación con otros materiales de actuación los piezoeléctricos PZT son los más adecuados en control de ruido y vibraciones debido a sus altos coeficientes piezoeléctrico, dieléctrico y de elasticidad, su alta rigidez y su amplio ancho de banda. Para aumentar la densidad de energía de estos actuadores se suelen utilizar de tipo pila.

Otro de los componentes principales de un sistema de control es el sensor. Los que más se utilizan en un sistema CAAE son los sensores estructurales, con el objetivo de que ocupen el menor espacio posible. Dentro de los diferentes tipos de sensores estructurales los que más se suelen utilizar en estos controles son los acelerómetros y los sensores distribuidos de láminas de PVDF. En el caso de los sensores, aunque los acelerómetros miden variables relacionadas con las vibraciones de la estructura, dependiendo de los tipos de leyes de control que se empleen, su señal se tiene que hacer pasar por un filtro electrónico antes de llevarla al controlador. En caso de que se empleen controladores modales con el objetivo de reducir el ruido radiado, no es necesario el empleo de dichos filtros electrónicos, por tanto en estos casos el procesador de tiempo real no tiene la carga computacional adicional que eso conlleva.

Respecto al tipo de control, las principales ventajas que presentan los métodos *feedback* de “amortiguamiento modal” o control modal son la no necesidad del modelo y la garantía de estabilidad cuando el sistema es *colocalizado*. La principal desventaja que presentan es que son efectivos sólo cerca de las resonancias. En estos tipos de controladores, aunque la estabilidad esté garantizada, en muchos casos reales no se consigue el mayor rendimiento del sistema de control. Por tanto en muchas aplicaciones es necesaria la utilización de un controlador *no-colocalizado* con la desventaja de no tener garantizada la estabilidad del sistema. La estabilidad de este tipo de controladores limita la ganancia de los modos amortiguados ya que al aumentar la ganancia se puede desestabilizar el sistema. En estos casos los filtros de segundo orden son beneficiosos en sistemas con poco amortiguamiento, debido a que los filtros tienen una pendiente de  $-40\text{dB/década}$  y una fase de  $-180^\circ$  por década; por tanto estos controles reducen el riesgo de inestabilizar el sistema en caso de tener un control *colocalizado*. El inconveniente que presentan es que hay que tener mucho cuidado en el diseño del controlador si solo se desean amortiguar los modos seleccionados.

En la bibliografía existen muchos métodos de posicionamiento de actuadores y sensores, y también se encuentran métodos de optimización de posicionamiento simultáneamente con la ganancia del *feedback*. En cambio no existe ninguna técnica en la que se optimiza el posicionamiento de actuadores y sensores para amortiguar los modos seleccionados teniendo en cuenta las leyes de control y además sabiendo de antemano cuales son las posiciones (de actuadores y sensores) proclives a la inestabilización del sistema.

Por último, los métodos empleados en la bibliografía para obtener un sistema estable con control *no-colocalizado* han sido mediante la introducción de un retardo en el tiempo y las técnicas de pasivación. No obstante, no siempre es fácil obtener

---

un sistema de control estable introduciendo un retardo en el tiempo, y en el caso de la pasivación el diseño de un controlador robusto se convierte en un problema de pasivación robusto, que en algunos casos puede ser aún más difícil.



## Capítulo 3

# Optimización del control modal *no-colocalizado*

### 3.1. Introducción

En este capítulo se describe la optimización del controlador, cuyo objetivo es aumentar el amortiguamiento de los modos seleccionados. La optimización se ha realizado con el propósito de conseguir el mayor rendimiento posible tanto del actuador como del sistema de control. Para ello se han tenido en cuenta tanto los parámetros del controlador como el posicionamiento del actuador y del sensor.

La optimización de los parámetros del filtro y el posicionado del actuador y del sensor que se ha realizado en esta tesis se describen en este capítulo, mientras que en el siguiente se realiza el estudio de estabilidad, ya que no siempre lo óptimo suele ser robusto. Por ello en muchos casos se tiene que conseguir un compromiso entre el máximo rendimiento del sistema de control y su estabilidad.

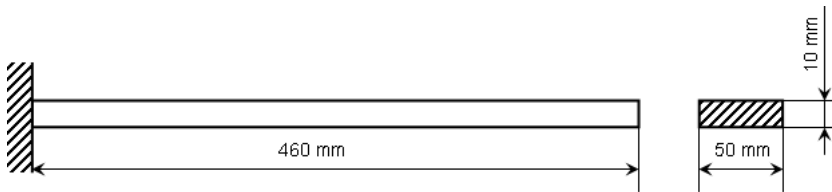
Primeramente se va a describir el estudio de optimización de los parámetros del control de realimentación de la aceleración con un filtro de segundo orden con la técnica del *punto de corte* (“*cross-over point*”) no selectivo, para posteriormente estudiar la influencia de los modos no controlados, los cuales no se han tenido en cuenta a la hora de calcular los parámetros del filtro. También se han estudiado los parámetros que influyen en la pérdida de dicho *punto de corte*. A continuación se detallará la optimización del posicionamiento del actuador y del sensor, que se ha realizado con dos métodos diferentes: un primer método basado en la técnica de Gawronski (1999) de la norma de la función de transferencia y un segundo basado en el análisis modal del sistema con control propuesta en esta tesis. Finalmente se comparan las dos técnicas, presentado las ventajas e inconvenientes de la técnica propuesta en esta tesis.

Como caso práctico de aplicación se ha utilizado la viga empotrada libre descrita

en el siguiente subapartado. Con ella se han estudiado tanto los resultados de optimización de los parámetros del controlador como el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor.

### 3.2. Descripción del modelo de la viga empotrada libre

El modelo que se ha usado tanto en este capítulo como en el siguiente ha sido el de una viga empotrada libre; siendo el material empleado el acero y la geometría adoptada la que se muestran en la figura 3.1.



**Figura 3.1:** Modelo físico de la viga empotrada libre

La geometría y las propiedades mecánicas de la viga que se ha modelizado se muestran en la tabla 3.1:

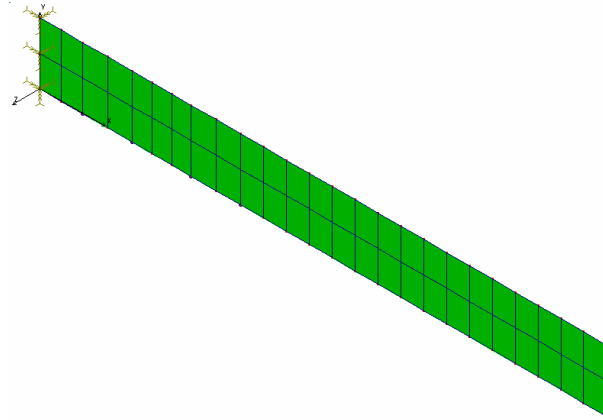
Longitud	460 mm
Anchura	50 mm
Espesor	10 mm
Módulo de elasticidad	200 GPa
Densidad	7860 kg/m <sup>3</sup>

**Tabla 3.1:** Parámetros de la viga

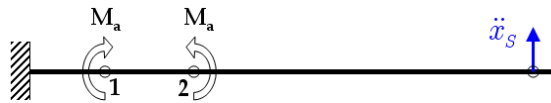
El modelo de elementos finitos que se ha utilizado para describir dicha estructura puede verse en la figura 3.2. Para ello se han empleado 50 elementos cáscara, resultando en un total de 78 nudos.

La respuesta de la viga se ha considerado mediante superposición modal. En este apartado también el actuador se ha posicionado cerca del empotramiento, modelizándose mediante dos momentos de signos contrarios separados una distancia igual a la longitud del actuador. Por otra parte el sensor se ha posicionado en el extremo libre de la viga (figura 3.3).





**Figura 3.2:** Modelo de elementos finitos de la viga empotrada libre



**Figura 3.3:** Viga empotrada libre con actuador y sensor modelizados idealmente

### 3.3. Diseño del controlador: Técnica del *punto de corte*

Para ajustar los parámetros del controlador en esta tesis se ha seleccionado la técnica del *punto de corte* por las ventajas que se han presentado en el capítulo del estado del arte en el apartado 2.5.2.

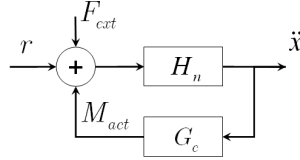
#### 3.3.1. La técnica del *punto de corte*

En el diseño del controlador se ha supuesto que la respuesta del sistema a la frecuencia de un modo natural  $\omega_n$  únicamente depende de dicho modo. La función de transferencia a dicha frecuencia se puede suponer que únicamente está dominada por la frecuencia de dicho modo  $\omega_n$ . Dicha función de transferencia entre el sensor y el actuador sin control se escribe de la siguiente manera:

$$H_n(s) = \frac{\ddot{X}_s(s)}{F_a(s)} = \frac{\psi_s^n \psi_a^n s^2}{s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

siendo,  $\xi_n$  el amortiguamiento relativo de dicho modo y  $\psi_s^n$  y  $\psi_a^n$  las formas modales de la posición del sensor y del actuador, respectivamente.

Para controlar el modo  $n$  se ha empleado un controlador de realimentación de la aceleración tal y como se puede ver en la figura 3.4. En este esquema se ha supuesto que la perturbación exterior se produce en el mismo punto que la actuación del controlador. Para estudiar la estabilidad del sistema es indiferente que coincidan la perturbación y la fuerza de actuación, debido a que el denominador de la función de transferencia en lazo cerrado coincide en ambos casos.



**Figura 3.4:** Diagrama de bloques del control de realimentación de la aceleración

Para controlar el modo  $n$  con un controlador de realimentación de la aceleración se ha utilizado un filtro de segundo orden que tiene el siguiente aspecto:

$$G_c(s) = \frac{g\omega_c^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \quad (3.2)$$

donde,  $\omega_c$  es la frecuencia natural del filtro,  $\xi_c$  el amortiguamiento relativo de dicho filtro y  $g$  la ganancia del controlador. Estos tres son los parámetros del filtro que son precisos calcular para el diseño del controlador.

Para la obtención de los parámetros del filtro de segundo orden se ha empleado la técnica del *punto de corte* propuesta por Bayon de Noyer y Hanagud (1997). Esta técnica consigue introducir amortiguamiento adicional en la estructura evitando cualquier cambio en las frecuencia y modos naturales, a la vez que evita también la aparición de nuevos picos de frecuencia en la respuesta del lazo cerrado. Para conseguir esto, dicha técnica escoge el punto de funcionamiento en el cual las ramas del lugar geométrico de las raíces que salen de los polos de la estructura y del controlador se cortan. Este punto se conoce con el nombre de *punto de corte*.

En este trabajo se ha realizado un diseño de control de múltiples modos, pero el diseño de cada compensador ha sido selectivo, es decir, supone que la influencia de los otros modos es despreciable, aunque el acoplamiento de los diferentes modos puede introducir variaciones en el comportamiento de los polos del lazo cerrado provocando la pérdida del punto exacto del *punto de corte*.

En este punto, los polos del sistema en lazo cerrado coinciden con los del controlador. Esto quiere decir que la respuesta frecuencial del sistema en lazo cerrado tendrá un solo pico o frecuencia natural de orden múltiple. En el *punto de corte* se cumple que las raíces de la ecuación característica son dos polos complejos conjugados repetidos.

La función de transferencia del sistema controlado es:

$$H(s) = \frac{H_n(s)}{1 + G_c(s)H_n(s)} \quad (3.3)$$

Introduciendo en la expresión 3.3 la función de transferencia sin control  $H_n(s)$  y el filtro de controlador  $G_c(s)$  se obtiene la función de transferencia del sistema controlado siguiente:

$$H(s) = \frac{\psi_s^n \psi_a^n s^2 (s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2)}{(s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) (s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2) + \psi_s^n \psi_a^n g \omega_c^2 s^2} \quad (3.4)$$

En el *punto de corte* las raíces del polinomio característico, denominador de la función de transferencia del sistema controlado, son dos polos complejos conjugados repetidos, de frecuencia natural  $\omega_s$  y amortiguamiento relativo  $\xi_s$ :

$$\begin{aligned} (s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) (s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2) + \psi_s^n \psi_a^n g \omega_c^2 s^2 = \\ (s^2 + 2\xi_s \omega_s s + \omega_s^2)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desarrollando, e igualando los términos de la misma potencia de  $s$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2\xi_s \omega_s = \xi_n \omega_n + \xi_c \omega_c \quad (3.6)$$

$$2\omega_s^2 + 4\xi_s^2 \omega_s^2 = \omega_n^2 + 4\xi_n \omega_n \xi_c \omega_c + \omega_c^2 + \psi_s^n \psi_a^n g \omega_c^2 \quad (3.7)$$

$$2\xi_s \omega_s^3 = \omega_n^2 \xi_c \omega_c + \omega_c^2 \xi_n \omega_n \quad (3.8)$$

$$\omega_s^4 = \omega_n^2 \omega_c^2 \quad (3.9)$$

Utilizando las ecuaciones 3.6, 3.8 y 3.9 para buscar una relación entre la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del compensador y la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo de la estructura, se obtiene la siguiente expresión 3.10:

$$\omega_n \omega_c (\xi_n - \xi_c) (\omega_n - \omega_c) = 0 \quad (3.10)$$

Esta ecuación da lugar a tres posibilidades de diseño:

- $\omega_c = 0$
- $\xi_c = \xi_n$
- $\omega_c = \omega_n$

### 3.3.1.1. Posibilidad 1: $\omega_c = 0$

Esta condición no sirve, ya que implica que la ganancia del control de realimentación de la aceleración ( $g\omega_c$ ) sea cero, y por tanto el sistema no puede ser controlado.

**3.3.1.2. Posibilidad 2:**  $\xi_c = \xi_n$ 

$$\xi_c = \xi_n \Rightarrow \xi_s = \frac{\xi_n}{2} \left( \frac{\omega_n}{\omega_s} + \frac{\omega_s}{\omega_n} \right) \quad (3.11)$$

Esta condición tampoco es válida porque lo que se quiere es aumentar el amortiguamiento del sistema. En este caso, para que el amortiguamiento final sea una cantidad estimable mayor que la del sistema inicial, la frecuencia natural del sistema de lazo cerrado  $\omega_s$  debe ser mucho mayor que la frecuencia natural del sistema inicial  $\omega_n$ .

Sin embargo, el objetivo es en lo posible evitar cambios en las principales características del sistema. Por ejemplo, para conseguir un valor de amortiguamiento de  $\xi_s = 5\xi_n$ ,  $\omega_s$  debe de ser 10 veces  $\omega_n$ .

**3.3.1.3. Posibilidad 3**  $\omega_n = \omega_c$ 

$$\omega_n = \omega_c \Rightarrow \omega_s = \omega_n \quad (3.12)$$

Esta ecuación proporciona un diseño práctico, pues la frecuencia del sistema de lazo cerrado no varía respecto a la inicial. Ésta es pues la primera condición para el diseño del *punto de corte*.

Partiendo de esta primera condición, y utilizando las ecuaciones 3.6 y 3.7, se llega a la segunda condición:

$$g\psi_a^n \psi_s^n = (\xi_c - \xi_n)^2 \quad (3.13)$$

En esta condición el producto de la izquierda es siempre positivo, como lo son el resto de los términos del polinomio característico; condición ésta, necesaria pero no suficiente, para que el sistema de lazo cerrado de un grado de libertad sea estable.

Finalmente, de la ecuación 3.6 se deduce el ratio de amortiguación del sistema de lazo cerrado, que es el siguiente:

$$\xi_s = \frac{1}{2} (\xi_n + \xi_c) \quad (3.14)$$

Como puede verse, el ratio de amortiguamiento final es la media entre el amortiguamiento del sistema original y el amortiguamiento del controlador. Por eso, para proporcionar electrónicamente amortiguación adicional al sistema, el ratio de amortiguamiento del controlador debe ser mayor que el del sistema inicial.

En esta tercera posibilidad, se consigue un aumento de amortiguamiento del sistema sin que haya ninguna variación de la frecuencia del modo controlado. Para obtener los parámetros del filtro del controlador ( $g, \omega_c, \xi_c$ ) los datos necesarios son:

1. Frecuencia natural del modo que se desea controlar:  $\omega_n$
2. Amortiguamiento relativo del modo que se desea controlar:  $\xi_n$
3. El residuo de la función de transferencia del modo que se desea controlar:  $\psi_s^n \psi_a^n$

Los pasos que se siguen para la obtención de los parámetros del filtro son:

1. Fijar la ganancia  $g$  del controlador
2. Despejar el amortiguamiento del filtro  $\xi_c$  de la expresión 3.14
3. Calcular el amortiguamiento del sistema final que se obtiene con control

### 3.3.2. Estudio de la influencia de los modos no controlados

Mediante la técnica del *punto de corte* (descrita en 3.3.1) los parámetros del controlador se calculan considerando que la respuesta del sistema está dominada por el modo que se desea controlar. Sin embargo, dicho *punto de corte* deja de existir (debido a que las ramas de los lugares geométricos que salen del polo del controlador y del sistema en lazo abierto no se cortan) por la influencia de los otros modos que no se han tenido en cuenta a la hora de calcular los parámetros del filtro.

En este apartado se va a estudiar la influencia que tienen los modos que no se han tenido en cuenta a la hora de diseñar el filtro de control. Para ello se calculan los polos del sistema controlado en lazo cerrado cuando la respuesta del sistema es calculada con más de un modo.

El estudio de los modos en el *punto de corte* se ha realizado en el caso de la viga empotrada libre que se ha descrito en el apartado 3.2. En dicha viga el actuador se ha posicionado cerca del empotramiento y el sensor casi en el extremo libre de la viga. Tanto el actuador como el sensor se han modelizado idealmente, es decir el actuador produce dos momentos iguales y de signo contrario separados una cierta distancia y el sensor mide el desplazamiento perpendicular a la viga, tal como se representa en la figura 3.3.

La función de transferencia entre la aceleración del sensor y el momento del actuador representado con  $n$  modos es:

$$H_n(s) = \frac{\ddot{X}_s(s)}{M_a(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_s^i (\psi_{a2}^i - \psi_{a1}^i) s^2}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (3.15)$$

siendo  $\omega_i$  la frecuencia de modo  $i$ -ésimo,  $\xi_i$  el amortiguamiento relativo de dicho modo,  $\psi_s^i$  la forma modal de la posición del sensor, y  $\psi_{a1}^i$  y  $\psi_{a2}^i$  las formas modales del actuador en las posiciones 1 y 2. En adelante la diferencia  $\psi_{a2}^i - \psi_{a1}^i$  se denominará mediante  $\psi_a^i$ .

Sustituyendo las expresiones 3.15 y 3.2 en el denominador de la expresión 3.3 se obtiene la ecuación característica del sistema. Si para representar el sistema se escogen  $n$  modos, el sistema controlado tendrá  $n + 1$  pares de polos conjugados complejos. En la siguiente expresión el sistema se ha representado con  $n$  modos:

$$\begin{aligned} & (s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2) \\ & + \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\psi_s^i \psi_a^i g \omega_c^2 s^2 (s^2 + 2\xi_j\omega_j s + \omega_j^2)) = \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$(s^2 + 2\xi_{cf}\omega_{cf} s + \omega_{cf}^2) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\xi_{if}\omega_{if} s + \omega_{if}^2)$$

siendo  $\omega_{cf}$  y  $\xi_{cf}$  la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del polo del controlador en lazo cerrado, y  $\omega_{fi}$  y  $\xi_{fi}$  la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del modo  $i$ -ésimo en lazo cerrado.

Para ver la influencia de los demás modos en el *punto de corte* se ha controlado el primer modo calculando los parámetros del controlador con la técnica del *punto de corte* selectivo. Para ello los datos que se necesitan son: la frecuencia natural, el amortiguamiento relativo y el residuo del modo que se desea controlar (Tabla 3.2).

Frecuencia natural, $\omega_1$	38,8 Hz
Amortiguamiento relativo, $\xi_1$	1 %
Residuo, $\psi_a^1 \psi_s^1$	0,0196

**Tabla 3.2:** Datos para calcular los parámetros del filtro de forma selectiva: parámetros modales del primer modo

Con los datos de la tabla 3.2 y eligiendo para la ganancia del controlador un valor de 10, los parámetros del controlador calculando con la técnica del *punto de corte* selectivo son:

Ganancia del controlador, $g$	10
Frecuencia natural del filtro, $\omega_c$	38,8 Hz
Amortiguamiento relativo del filtro, $\xi_c$	45,3 %

**Tabla 3.3:** Parámetros del filtro para el control de primer modo calculando de forma selectiva

Con los valores del filtro de la tabla 3.3 se han calculado los pares de polos complejos conjugados mediante la función *roots* de Matlab. Además, para ver la influencia de los modos no controlados en el *punto de corte* se han calculado los polos del sistema

en lazo cerrado representando el sistema con dos o más modos, hasta un máximo de quince (que corresponde con una frecuencia de 23.000Hz).

Con estos polos en lazo cerrado se han calculado en función del número de modos empleados: la variación de la frecuencia entre el polo del modo controlado y el polo del controlador en lazo cerrado,  $\Delta\omega(\%) = 100 \cdot (\omega_{1f} - \omega_{cf})/\omega_1$ , el amortiguamiento relativo del polo del modo controlado,  $\xi_{1f}$ , y el del polo del controlador,  $\xi_{cf}$ . En la gráfica 3.5 se han representado  $\Delta\omega$  y los amortiguamientos relativos, en función del número de modos, tanto del polo del modo controlado como del polo del controlado en lazo cerrado.

Por otra parte, en la figura 3.6 se han representado los polos en lazo cerrado, de la zona del polo del modo controlado y del controlador (dos polos), en función del número de modos que se han tenido en cuenta para representar la respuesta del sistema.

Cuando la respuesta se calcula con un modo, en lazo cerrado, en la gráfica de la figura 3.5 se puede observar que la frecuencia del primer modo y del controlador coinciden ( $\Delta\omega = 0$ ), y que el amortiguamiento del polo del controlador y del modo también coinciden ( $\xi_{1f} = \xi_{cf} = 23,15\%$ ). Además, en la gráfica 3.6 puede verse que el polo del controlador y del modo coinciden, indicándose este punto con la etiqueta “Modo 1”. Sin embargo, cuando la respuesta del sistema está representada por más de un modo no sucede esto, es decir hay una variación tanto de la frecuencia como del amortiguamiento de los polos del modo controlado y del polo del controlador (gráfica 3.5), y por tanto, en la gráfica de la figura 3.6 de los polos aparece un desdoble de los polos, que están indicados con las etiquetas, “Modo 2”, “Modo 3” y “Modo 4-15”.

En la gráfica de la figura 3.5 se puede observar cómo al incorporar el segundo modo la variación de la frecuencia es aproximadamente de 6,79%. En este caso el amortiguamiento relativo del polo del controlador y del primer modo no son iguales, sino que el del controlador (25,54%) es mayor que el que se obtenía con un modo, y el del modo es un 2,77% menor que en el caso de estar representado por un solo modo (20,38%). En este caso, como se puede observar en la gráfica de la figura 3.6 de los polos, aparecen dos polos los cuales están indicados con la etiqueta “Modo 2”.

Cuando la respuesta del sistema se calcula con tres modos, la variación que existe en la frecuencia ( $\Delta\omega = 4,47\%$ ) es menor que la que hay con dos modos, y lo mismo ocurre con el amortiguamiento relativo ( $\xi_{1f} = 21,39\%$  y  $\xi_{1c} = 24,75\%$ ). En este caso, tal como puede verse en la gráfica 3.6, los polos en lazo cerrado del modo controlado y del controlador están más cerca que con dos. A partir del cuarto modo la variación de frecuencia es menor que con dos modos y mayor que con tres modos, lo cual en la gráfica de los polos se traduce en que los polos están entre los etiquetados como “Modo 2” y “Modo 3”.

A partir del séptimo modo (4.700 Hz) la diferencia entre las frecuencias se mantiene casi constante en 24,9%, al igual que el amortiguamiento relativo del controlador queda en 24,9% y el del modo en 21,11%.

En la figura 3.7 se han representado las respuestas frecuenciales del sistema en lazo cerrado y del sistema original sin control para ver la influencia del resto de los

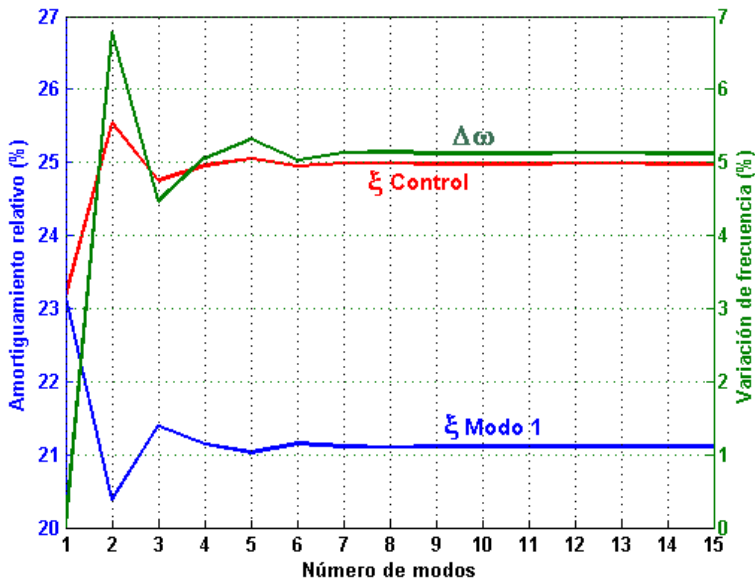


Figura 3.5: Variación de la frecuencia del punto de corte y de los amortiguamientos relativos en función del número de modos

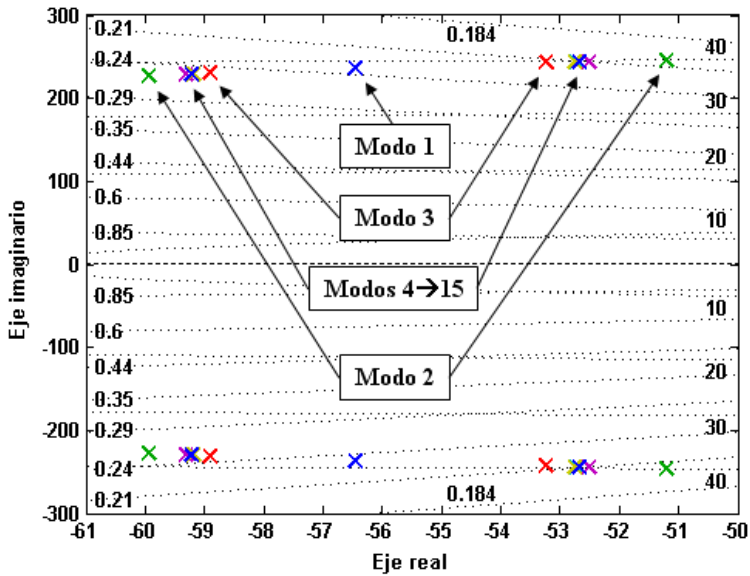
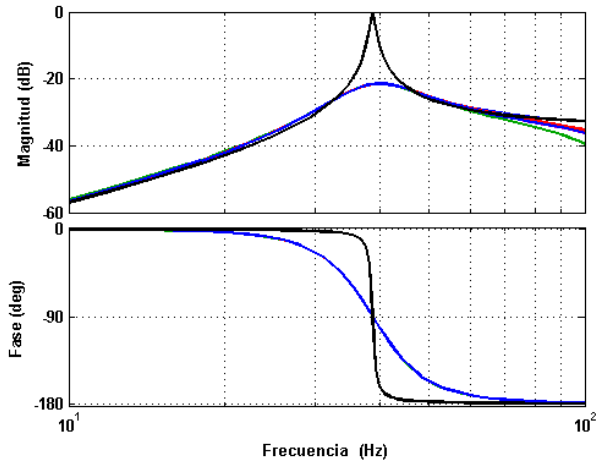


Figura 3.6: Polos en lazo cerrado del modo controlado y del controlador en función del número de modos



modos. En ella se observa que la variación del pico amortiguado en la FRF es muy pequeña y que además siempre hay un solo pico de resonancia amortiguada, es decir que no hay ningún desdoble del pico.



**Figura 3.7:** FRF-s en lazo cerrado con diferente número de modos; solo se ha representado en el rango del primer modo ( $g=10$ )

De las gráficas 3.5, 3.6 y 3.7 se puede concluir que, cuando los parámetros del controlador se calculan con la técnica del *punto de corte* selectivo y si la respuesta del sistema se representa con más modos que con el controlado, el *punto de corte* se pierde y en vez de dos polos complejos conjugados repetidos aparecen dos polos complejos conjugados no repetidos: uno del modo controlado y el otro del polo del controlador. Se puede observar que el amortiguamiento relativo del modo controlado en lazo cerrado es menor que cuando la respuesta está dominada solamente con el modo controlado. Asimismo se deduce que a partir de un modo, en este caso del séptimo modo, la separación de los dos polos se mantiene constante y que la más influyente en la separación de los dos modos es el segundo modo. Por último, aunque haya una separación de los dos polos (del modo controlado y del controlador), en la FRF con control (figura 3.7) no aparecen dos picos cerca del modo controlado, sino que únicamente existe un pico amortiguado. Esto es debido a que existe un cero en la función de transferencia en lazo cerrado en la frecuencia original del modo controlado.

Sustituyendo el filtro del controlador 3.2 y la función de transferencia original 3.15 en la expresión de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado 3.3, ésta queda:

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \psi_s^i \psi_a^i s^2 (s^2 + 2\xi_j \omega_j s + \omega_j^2) (s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i)} \quad (3.17)$$

siendo  $p_i$  los polos del sistema en lazo cerrado.

En el numerador de la expresión 3.17 aparecen los ceros del sistema original sin control, además de un cero adicional que corresponde a un polo del controlador; la frecuencia de este cero es la del modo original que se ha controlado. Este cero es el que hace que en la FRF con control no aparezcan dos picos cerca del modo controlado.

En las siguientes dos figuras (3.8 y 3.9) se han representado las siguientes tres respuestas frecuenciales: la del cero que aparece en lazo cerrado del sistema controlado 3.18, la del polo del modo que se ha controlado 3.19 y la del polo del controlador en lazo cerrado 3.20:

$$\text{Cero} = \frac{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2}{1} \quad (3.18)$$

$$\text{Polo Modo} = \frac{1}{s^2 + 2\xi_{1f} \omega_{1f} s + \omega_{1f}^2} \quad (3.19)$$

$$\text{Polo Control} = \frac{1}{s^2 + 2\xi_{cf} \omega_{cf} s + \omega_{cf}^2} \quad (3.20)$$

En la figura 3.8 se han representado las FRF-s del cero y del producto de las funciones de transferencia del polo del modo y del polo del controlador. En ella se puede observar cómo la fase del producto de los dos polos cerca de 38Hz tiene un retraso de  $180^\circ$  y que no aparecen dos picos porque las dos frecuencias de los dos polos están muy cerca y con un amortiguamiento grande. En cambio, la FRF del cero cerca de 38Hz tiene un adelanto de  $90^\circ$ .

En la figura 3.9 se han representado las FRF del polo del modo controlado, del controlador en lazo cerrado y el producto de las funciones de transferencia de los dos polos con el cero. En ella se aprecia cómo el cero hace que la fase cerca de 38Hz tenga solo un retraso de  $180^\circ$ ; tampoco en este caso aparecen picos dobles cerca del modo controlado.

En esta tesis los parámetros del controlador se calculan con la técnica del *punto de corte* de forma selectiva, es decir, para el cálculo de los parámetros del controlador se supone que la respuesta del sistema está dominada únicamente por el modo que se desea controlar. Como se ha demostrado, en este apartado el sistema de control no va a añadir ningún pico adicional cerca del modo controlado, aunque el amortiguamiento que se obtenga en lazo cerrado sea menor que cuando el sistema se representa solo con un modo.

Como es posible que se cometan errores en la estimación de los datos necesarios para dicho cálculo, en el siguiente apartado se realiza un estudio de la influencia que pueden tener dichos errores. Para simular los resultados con dichos errores se han introducido deliberadamente variaciones con respecto al valor de dichos datos.

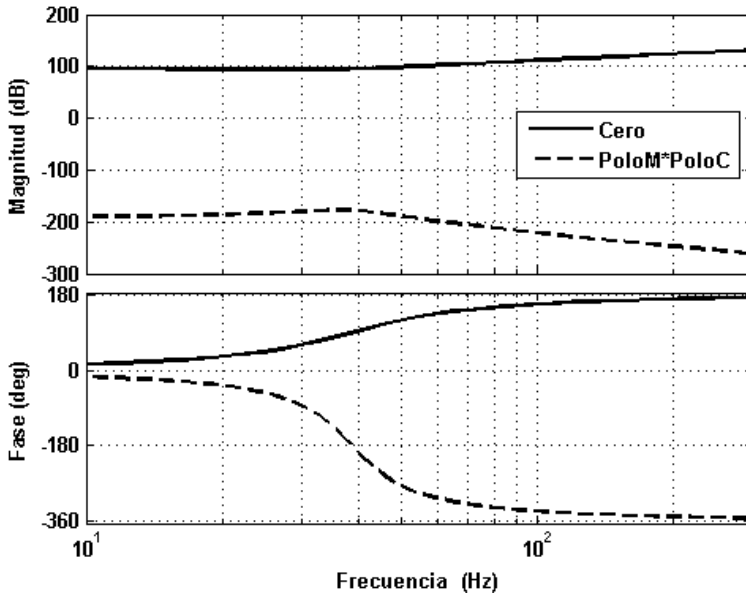


Figura 3.8: FRF-s del cero y de la multiplicación del polo del modo por el del controlador

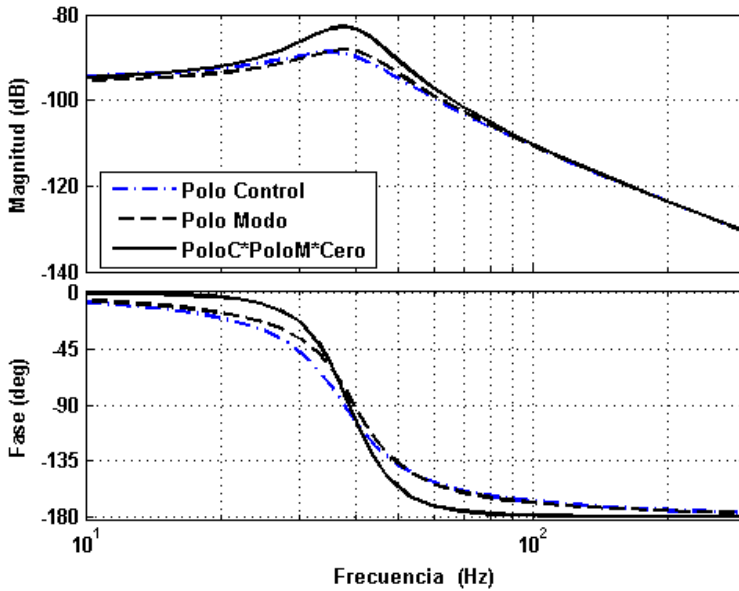


Figura 3.9: FRF-s de los dos polos y de la multiplicación de los dos polos con el cero

### 3.3.3. Influencia de los parámetros del controlador en los espectros de vibraciones y de ruido

Aunque en esta tesis se haya trabajado con controladores modales que no requieren de un modelo, sí que necesitan de una estimación de los parámetros modales del modo a controlar ( $i$ ), la frecuencia natural  $\omega_i$ , el amortiguamiento relativo  $\xi_i$  y el residuo de la función de transferencia del modo a controlar  $\psi_a^i \psi_s^i$ .

En este apartado se analiza la influencia de los errores de estas estimaciones en el sistema de lazo cerrado. Para ello, al igual que en el apartado anterior, se ha escogido para la resolución numérica el caso de la viga empotrada libre referido en el apartado 3.2; se va a trabajar únicamente con el primer modo, es decir se supondrá que la respuesta del sistema está dominada por el modo que se controla.

Los parámetros del controlador se han calculado con la técnica del *punto de corte* con ganancia de valor 10. No obstante, en los cálculos se han introducido deliberadamente variaciones con respecto al valor exacto en: la frecuencia natural del modo que se desea controlar  $\omega_n$ , el amortiguamiento relativo de dicho modo  $\xi_n$  y el residuo de la función de transferencia  $\psi_a^n \psi_s^n$ . Para ello, inicialmente se ha obtenido la ecuación característica del sistema controlado, tal como en el apartado 3.3.1, pero en este caso, a diferencia de dicho apartado, los polos del sistema controlado no van a coincidir debido a las variaciones que se han introducido en el cálculo de los parámetros del *punto de corte*. Así, el polinomio característico se iguala a:

$$\begin{aligned} (s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2) (s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2) + \psi_s^n \psi_a^n g \omega_c^2 s^2 = \\ (s^2 + 2\xi_{nf} \omega_{nf} s + \omega_{nf}^2) (s^2 + 2\xi_{cf} \omega_{cf} s + \omega_{cf}^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desarrollando e igualando los términos de la misma potencia de  $s$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{nf} \omega_{nf} + \xi_{cf} \omega_{cf} &= \xi_n \omega_n + \xi_c \omega_c \\ \omega_{nf}^2 + 4\xi_{nf} \xi_{cf} \omega_{nf} \omega_{cf} + \omega_{cf}^2 &= \omega_n^2 + 4\xi_n \omega_n \xi_c \omega_c + \omega_c^2 + \psi_s^n \psi_a^n g \omega_c^2 \\ \omega_{nf}^2 \xi_{cf} \omega_{cf} + \omega_{cf}^2 \xi_{nf} \omega_{nf} &= \omega_n^2 \xi_c \omega_c + \omega_c^2 \xi_n \omega_n \\ \omega_{nf}^2 \omega_{cf}^2 &= \omega_n^2 \omega_c^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Al ser un sistema no lineal se ha resuelto de forma numérica mediante la función *fsolve* de Matlab.

#### 3.3.3.1. Variaciones en la frecuencia natural

Se trata de analizar la influencia del error en la estimación de la frecuencia del modo que se quiere controlar. El error que se ha introducido en la estimación de la frecuencia ha sido desde un -90 % hasta el 90 % de su valor.

Para el control del primer modo los parámetros modales que se necesitan son:

Los pasos que se han seguido para el cálculo de los parámetros del controlador mediante la técnica del *punto de corte* son:

- Fijar la ganancia del controlador, que ha sido de  $g = 10$  para todos los casos.
- Escoger la frecuencia natural del filtro,  $\omega_c = (1 + R)\omega_1$ , siendo  $R$  el error cometido expresado en tanto por uno.
- Calcular el amortiguamiento relativo con la expresión  $\xi_c = \sqrt{g\psi_a^1\psi_s^1} + \xi_1$ .

Una vez calculados los parámetros del controlador se ha resuelto el sistema de ecuaciones 3.22 con la función *fsolve* de Matlab para obtener los polos en lazo cerrado. Los parámetros obtenidos con este sistema de ecuaciones son:  $\omega_{1f}$ ,  $\omega_{cf}$ ,  $\xi_{1f}$  y  $\xi_{cf}$ .

En la figura 3.10 se han representado la variación de la frecuencia,  $\Delta\omega(\%) = 100(\omega_{1f} - \omega_{cf})/\omega_1$ , y los amortiguamientos relativos  $\xi_{1f}$  y  $\xi_{cf}$  en función del porcentaje del error cometido.

En la figura 3.11 se ha representado el lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación de la frecuencia. En la figura 3.11 de la izquierda se han representado todos los polos; en cambio en la de la derecha se han representado únicamente los polos de la parte imaginaria positiva.

En la tabla 3.4 se han indicado los polos en lazo cerrado del modo controlado y del controlador en los casos extremos de subestimación y sobreestimación (-90% y +90%, respectivamente).

En la figura 3.10 se puede observar que cuando el error cometido en la frecuencia es nulo el amortiguamiento relativo del modo controlado tiene un máximo crítico y que con un error pequeño de la frecuencia, tanto de subestimación como de sobreestimación, el amortiguamiento del polo controlado en lazo cerrado empieza a disminuir muy rápido.

En la figura 3.10 se puede observar que en el caso de subestimación ( $\Delta\omega < 0$ ) el amortiguamiento relativo del polo del modo tiende al valor del 1% (tabla 3.4<sup>1</sup>), que es el amortiguamiento del modo original sin control. En este caso, en la gráfica del lugar geométrico de las raíces, el polo del modo tiende al polo del sistema original y el polo del control tiende hacia el punto cero con una pendiente que hace que tenga un amortiguamiento. La razón de esto es que la ganancia total del controlador,  $g_T = g \cdot \omega_c^2$ , (expresión 3.2) tiende a cero con la subestimación de la frecuencia. En el caso de que  $\omega_c$  fuera nulo sería como no tener ningún controlador.

Con un error por sobreestimación ( $\Delta\omega > 0$ ) el amortiguamiento relativo del modo controlado también va disminuyendo, pero la disminución es más lenta que en el caso de la subestimación. Sin embargo si se incrementase mucho el error de sobreestimación, al final, el polo del modo controlado en lazo cerrado tendería a tener un

<sup>1</sup>Con la etiqueta "Modo C" se denomina al modo adicional que aparece en el sistema por añadir el sistema de control

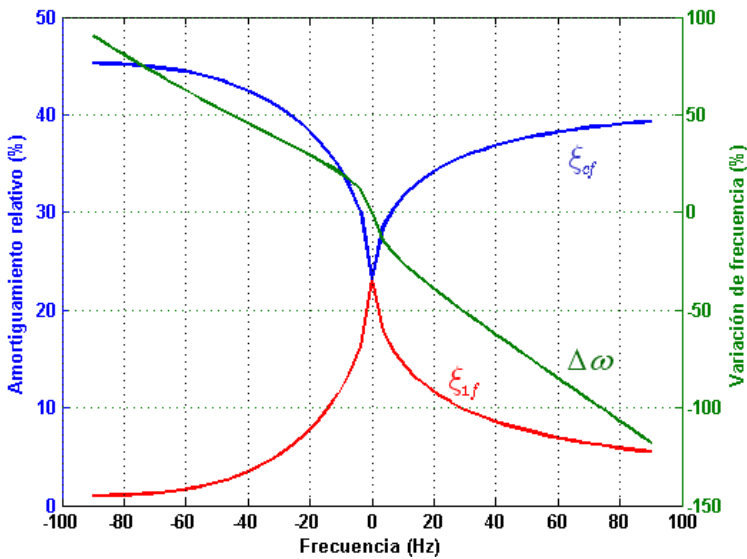


Figura 3.10: Variación de la frecuencia del punto de corte y de los amortiguamientos relativos

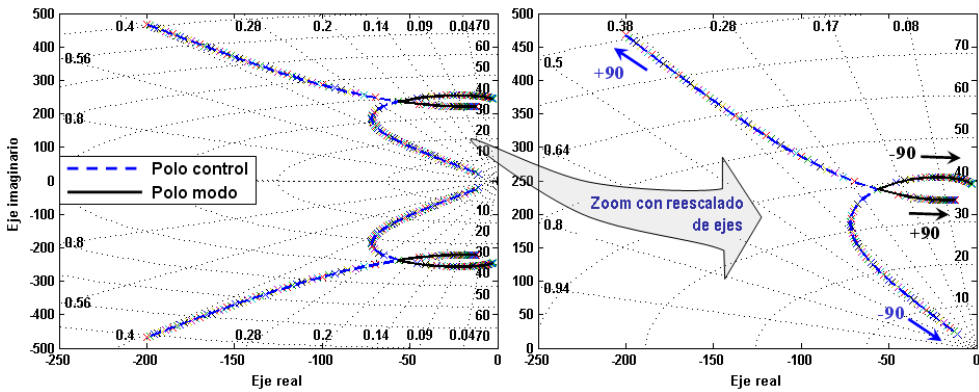


Figura 3.11: Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación de la frecuencia natural

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Modo 1 (Sub.)	$-2,46 \pm 244i$	38,8	1,01
Modo C (Sub.)	$-11 \pm 21,7i$	3,88	45,3
Modo 1 (Sobr.)	$-12,2 \pm 221i$	35,3	5,48
Modo C (Sobr.)	$-200 \pm 468i$	81	39,3

Tabla 3.4: Polos de funcionamiento con un modo ( $g = 10$ ), con subestimación y sobreestimación, ambos del 90% de la frecuencia natural

amortiguamiento relativo igual al del sistema original sin control, es decir de 1 %. La razón de que en el caso de la sobreestimación cueste más reducir el amortiguamiento del modo controlado es que la ganancia total del control se está incrementando con el error cometido.

En la figura 3.12 se han representado las FRF-s con control para varios errores desde  $-90\%$  a  $90\%$  y con la FRF del sistema original sin control. Sin embargo, en la figura 3.13 únicamente se han representado cuatro FRF-s: la del sistema original sin control, con control sin error y con control con un error de  $-90\%$  y de  $90\%$ . En estas figuras se puede observar que en el caso de la subestimación la FRF del sistema controlado tiende a pasar del óptimo al del sistema original y que en el caso de la subestimación de  $-90\%$  la FRF con control casi coincide con la del sistema original sin control.

En el caso de la sobreestimación, si aumentara cada vez más la frecuencia del filtro el pico del modo controlado también se iría acercando al del sistema original sin control, pero estos casos tendrían una ganancia total del filtro muy grande. En el caso de la subestimación de la frecuencia no aparece ningún pico adicional en la FRF en lazo cerrado debido al cero que introduce el sistema de control cerca del polo del controlador. En cambio en el caso de la sobreestimación, en la fase de la FRF sí aparece un pequeño adelanto y retraso cerca del polo del controlador debido a la separación que existe entre el cero y el polo que introduce el controlador en lazo cerrado.

En la tabla 3.5 se han indicado la frecuencia y el amortiguamiento relativo del polo del modo, del controlador y del cero en lazo cerrado con un error de sobreestimación de  $90\%$ . En esta tabla se puede ver que el polo del controlador y el cero que introduce el control difieren en frecuencia; por eso, al tener un amortiguamiento grande, aunque en la magnitud de la FRF no aparece un pico, en la fase sí aparecen un retraso y un adelanto.

	Polo del modo	Polo del controlador	Cero
Frecuencia (Hz)	35	81	74
Amortiguamiento (%)	5	39	45

**Tabla 3.5:** Polo y cero en lazo cerrado con una sobreestimación de  $90\%$

En resumen, se demuestra que el amortiguamiento que se obtiene en el sistema controlado es muy sensible a las variaciones con respecto al valor exacto de la frecuencia natural del filtro, y que como resultado el amortiguamiento relativo que se obtiene en el sistema controlado es menor que si no se cometiera ningún error. No obstante, y a pesar de dicha variación en frecuencia, en la frecuencia del modo controlado de la FRF del sistema con control no aparecen dos picos cuando el error cometido es por subestimación. En cambio en el caso de la sobreestimación, aunque en la magnitud de la FRF no aparezca un nuevo pico debido al amortiguamiento que tienen el polo del controlador y el cero que introduce el sistema de control, en la fase sí se nota un pequeño retraso y adelanto cerca de la frecuencia del polo del controlador y del cero.

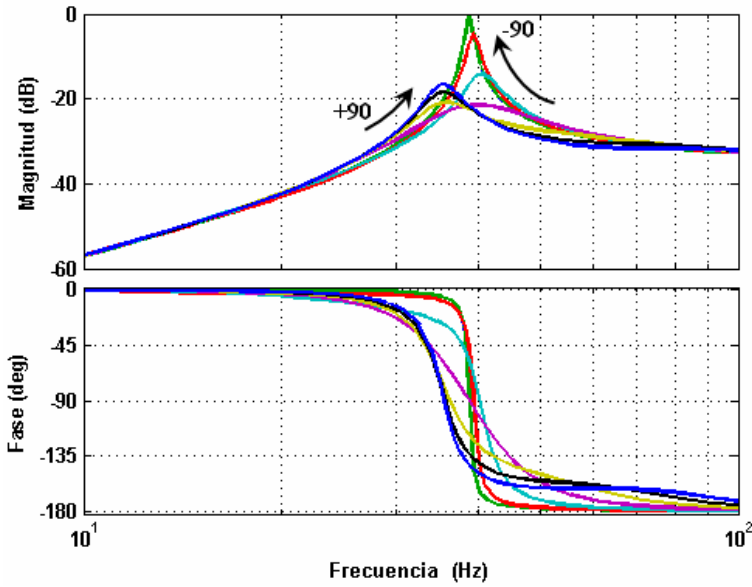


Figura 3.12: FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores de estimación

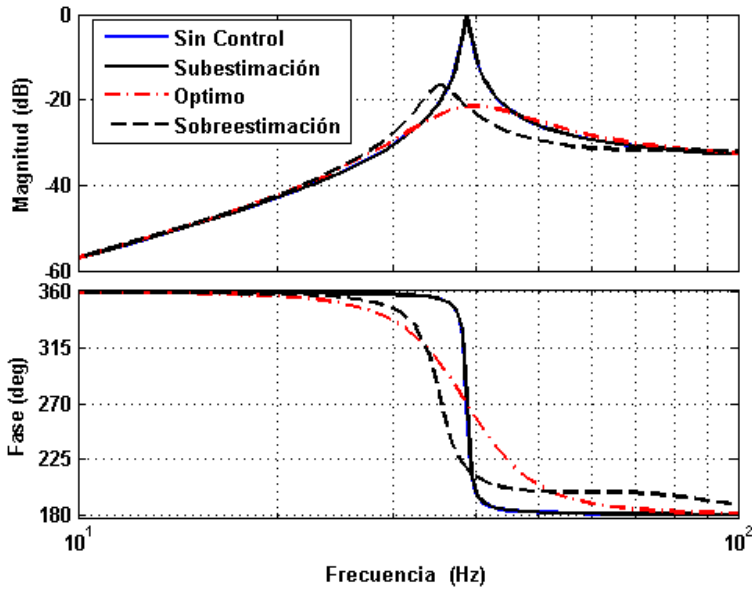


Figura 3.13: FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores extremos de estimación



### 3.3.3.2. Variaciones en el amortiguamiento relativo

Para este estudio se ha introducido una variación con respecto al valor exacto del amortiguamiento relativo, siendo el amortiguamiento relativo de todos los modos de 1 %. En este caso la variación introducida con respecto al valor exacto en el parámetro de amortiguamiento relativo para el cálculo de los parámetros del filtro del modo ha sido:  $\xi_{1est} = (1 + R)\xi_1$ , siendo  $R$  el error, que ha sido variado de  $-90\%$  a  $90\%$ .

Los pasos que se han seguido para el cálculo de los parámetros del controlador, que han sido calculadas con la técnica del *punto de corte*, han sido:

- Fijar la ganancia del controlador, que ha sido de  $g = 10$  para todos los casos.
- Escoger la frecuencia natural del filtro,  $\omega_c = \omega_1$ .
- Calcular el amortiguamiento relativo con la expresión  $\xi_c = \sqrt{g\psi_a^1\psi_s^1} + \xi_{1est} = \sqrt{g\psi_a^1\psi_s^1} + (1 + R)\xi_1$ .

En la figura 3.14 se ha representado la variación de la frecuencia  $\Delta\omega(\%) = 100(\omega_{1f} - \omega_{cf})/\omega_1$ , así como el amortiguamiento relativo del polo de control y del modo controlado en lazo cerrado, en función del error cometido en la estimación del amortiguamiento relativo del modo a controlar. En esta figura se observa que cuando existe una subestimación del parámetro del amortiguamiento relativo la frecuencia del polo de control y del modo se diferencian, pero en cambio se mantienen iguales los amortiguamientos relativos de ambos polos. Sin embargo, cuando hay una sobreestimación del amortiguamiento la frecuencia de los dos polos se mantiene constante pero el amortiguamiento relativo diverge, fenómeno justamente contrario a lo que ocurre con la subestimación.

La figura 3.15 muestra que cuando hay una subestimación, los amortiguamientos relativos de los dos polos se mantienen constantes; en cambio, cuando hay una sobreestimación, son las frecuencias de los dos polos las que se mantienen constantes. Cuando las dos ramas de los polos del controlador y del modo se cortan se cumple que el error cometido en la estimación es nulo, punto que es denominado *punto de corte*.

En la tabla 3.6 se pueden observar los valores de los polos del controlador y del modo en los dos casos de  $90\%$ : en el de subestimación y en el de sobreestimación. En el caso de la subestimación el amortiguamiento relativo para ambos modos es igual, pero las frecuencias difieren en 3,5 Hz; en cambio cuando hay una sobreestimación los dos polos tienen la misma frecuencia, pero el amortiguamiento relativo difiere en un 9%.

Aunque difieran las frecuencias (3,5 Hz) o los amortiguamientos relativos (9%), en la figura 3.16 se observa que la FRF con control con dichos errores no varía mucho y que tampoco aparece ningún desdoble de la frecuencia del modo controlado.

En la tabla 3.7 se han indicado la frecuencia y el amortiguamiento relativo del polo del modo, del controlador y del cero en lazo cerrado con un error de subestimación de  $90\%$ .

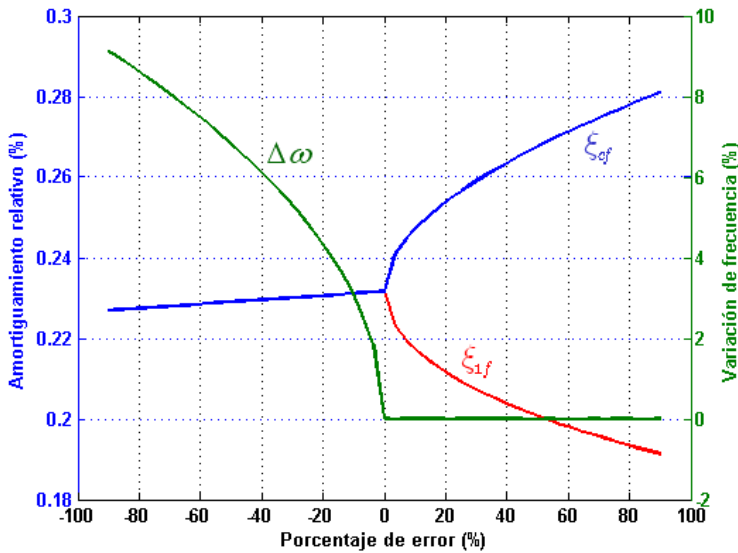


Figura 3.14: Variación de la frecuencia del punto de corte y de los amortiguamientos relativos en función del error cometido en el amortiguamiento relativo

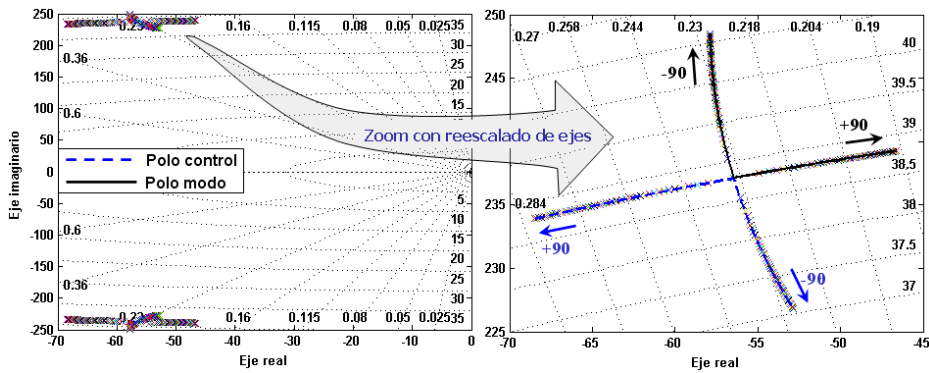
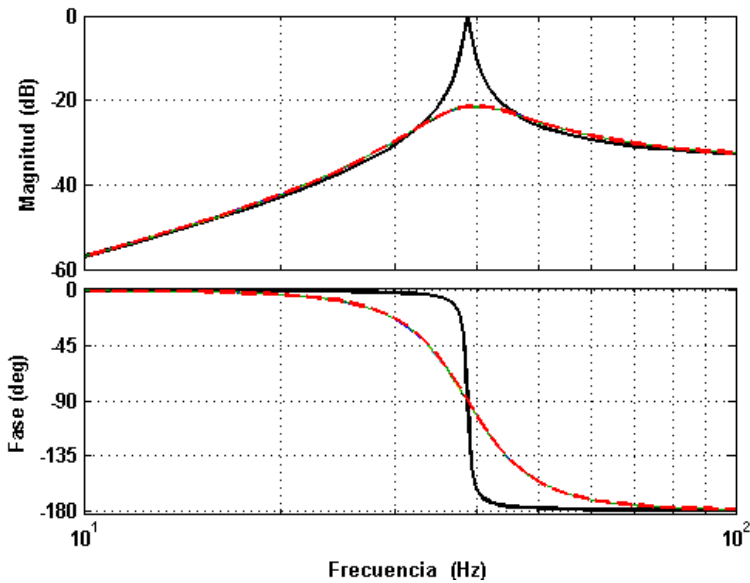


Figura 3.15: Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación del amortiguamiento relativo

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Modo 1 (Sub.)	$-57,9 \pm 248i$	40,6	22,7
Modo C (Sub.)	$-52,8 \pm 227i$	37,1	22,7
Modo 1 (Sobr.)	$-46,6 \pm 239i$	38,8	19,1
Modo C (Sobr.)	$-68,5 \pm 234i$	38,8	28,1

Tabla 3.6: Polo de funcionamiento con un modo ( $g=10$ )



**Figura 3.16:** FRF-s en lazo cerrado para el error de subestimación del amortiguamiento relativo de 90 %

	Polo del modo	Polo del controlador	Cero
Frecuencia (Hz)	37	40	39
Amortiguamiento (%)	22,7	22,7	46

**Tabla 3.7:** Polo y cero en lazo cerrado con una subestimación de 90 %

En tabla 3.7 se puede observar que la variación en frecuencia tanto de los dos polos como del cero es pequeña, que además los dos polos tienen el mismo amortiguamiento y que el cero tiene el doble de amortiguamiento que los polos. Por tanto, aunque haya una variación en frecuencia, es insuficiente para que pueda aparecer un nuevo pico en la FRF en lazo cerrado.

### 3.3.3.3. Variaciones en el residuo de la función de transferencia

En este subapartado se ha introducido una variación en el residuo de la función de transferencia con respecto al valor exacto, cuyo valor para el primer modo con la configuración de actuador y sensor que se ha elegido es de  $\psi_a^1 \psi_s^1 = 0,0196$ . Con el residuo estimado,  $(\psi_a^1 \psi_s^1)_{est} = (1 + R) \psi_a^1 \psi_s^1$ , se ha calculado el amortiguamiento relativo del filtro con la técnica del *punto de corte* selectivo.

Los pasos que se han seguido para el cálculo de los parámetros del controlador mediante la técnica del *punto de corte* son:

- Fijar la ganancia del controlador, que ha sido de  $g = 10$  para todos los casos.
- Escoger la frecuencia natural del filtro,  $\omega_c = \omega_1$ .
- Calcular el amortiguamiento relativo con la expresión  $\xi_c = \sqrt{g(\psi_a^1 \psi_s^1)_{est}} + \xi_1 = \sqrt{g(1+R)(\psi_a^1 \psi_s^1)} + \xi_1$ .

En la figura 3.17 se ha representado la variación del amortiguamiento de los polos del controlador y del modo controlado, y también el amortiguamiento relativo del polo de control y del modo controlado en función del error cometido en la estimación del residuo del modo a controlar. En ella se puede observar que cuando existe una subestimación del parámetro del amortiguamiento relativo, la frecuencia del polo de control y del modo difieren, pero en cambio se mantienen iguales los amortiguamientos relativos de ambos polos. Sin embargo, cuando hay una sobreestimación del amortiguamiento se produce el fenómeno inverso; situación semejante a la que ocurre en el caso de que el error se cometa en la estimación del amortiguamiento relativo.

En la figura 3.18 se ha representado el lugar geométrico de los polos en función del error cometido en la estimación del residuo. En ella se puede observar que cuando hay una subestimación del residuo los amortiguamientos relativos del polo del control y del modo siempre tienen el mismo amortiguamiento relativo, en cambio la diferencia de la frecuencia de los dos polos va aumentando con la subestimación. Cuando se da una sobreestimación la frecuencia de los dos polos coincide, pero la diferencia entre el amortiguamiento relativo de los dos polos va aumentando con la sobreestimación.

En la tabla 3.8 se listan los valores de los dos polos de funcionamiento en el caso de una subestimación y sobreestimación del 90 %. En el caso de la subestimación se puede observar que el amortiguamiento es igual en los dos modos, pero que la frecuencia de los dos polos ha variado en 16,3 Hz; en cambio en el caso de la sobreestimación la frecuencia de los dos polos es la misma, pero el amortiguamiento relativo a variado en un 42,1 %.

En las figuras 3.19 y 3.20 se puede observar que la FRF en lazo cerrado con dichos errores varía mucho, y que cuando hay una subestimación del residuo aparece un desdoble en la frecuencia del modo controlado. En cambio en el caso de que haya una sobreestimación no hay ningún desdoble, únicamente disminuye el amortiguamiento del modo controlado a la vez que el error es sobreestimado. En el caso de la subestimación del 90 %, en la FRF (figura 3.20) se aprecia cómo en la frecuencia del modo controlado han aparecido dos picos con una amplitud menor que el del modo sin control.

El valor extremo de la subestimación del residuo sería cuando el valor de  $(\psi_a^1 \psi_s^1)_{est}$  fuera nula; en este caso el filtro del control tendría un amortiguamiento igual al del sistema original sin control, es decir  $\xi_c = 1$  %. La FRF en lazo cerrado con este filtro de control se ha representado en la figura 3.21. En ella se puede observar que los dos polos (tabla 3.9) que han aparecido en el sistema controlado tienen un amortiguamiento relativo muy parecido al del sistema original ( $g = 1$  %) y que el cero tiene una frecuencia y un amortiguamiento iguales al del sistema original sin control.

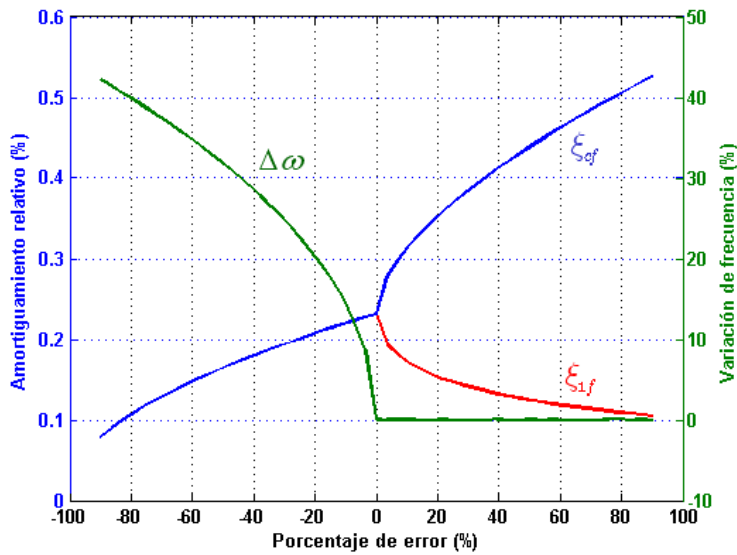


Figura 3.17: Variación de la frecuencia del *punto de corte* y de los amortiguamientos relativos en función del error cometido en el residuo

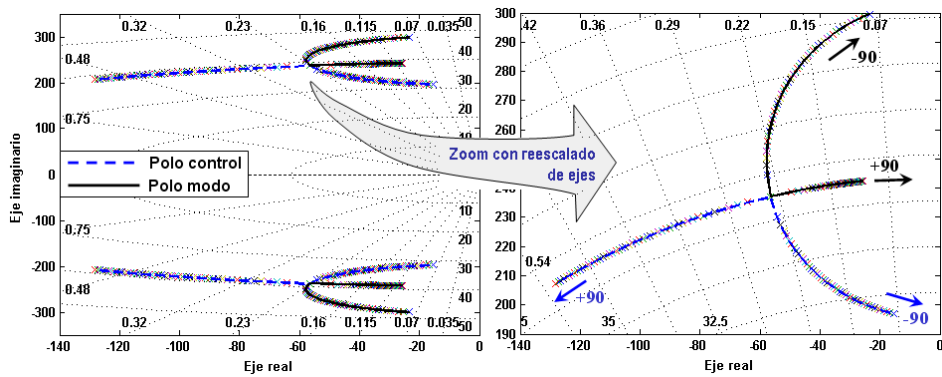
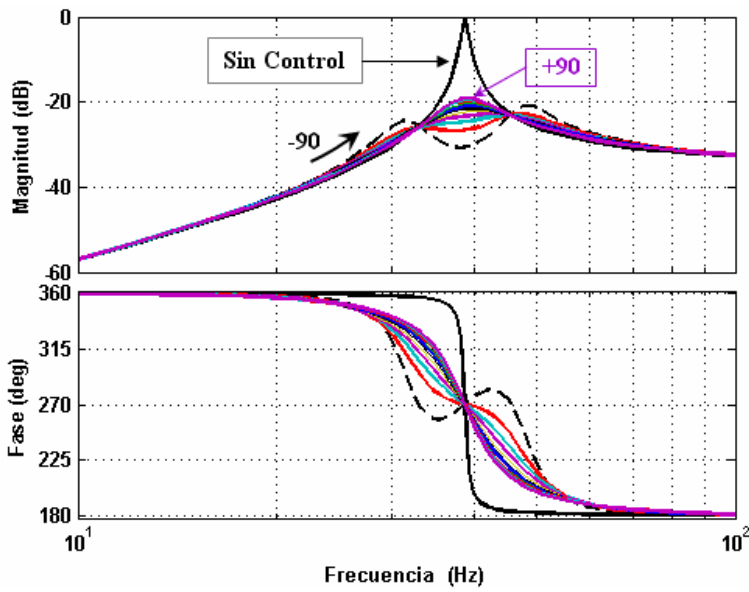


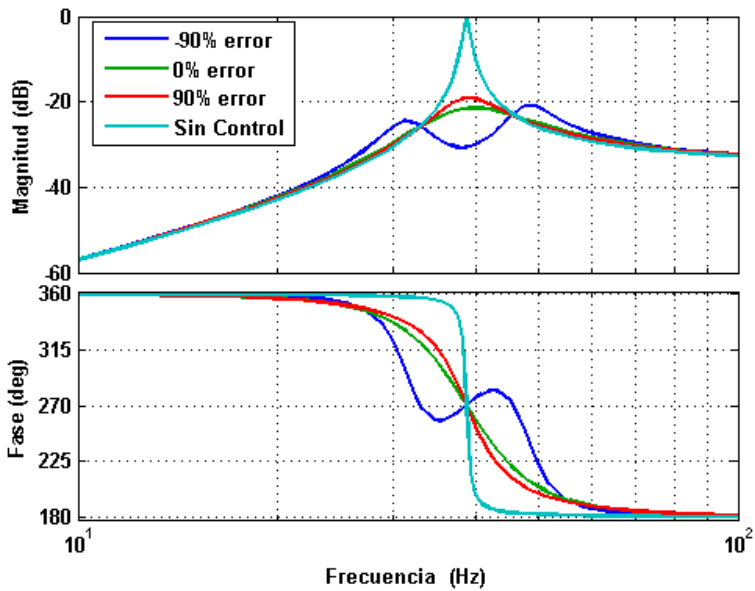
Figura 3.18: Lugar geométrico de las raíces en función del error cometido en la estimación del residuo

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Modo 1 (Sub.)	$-57,9 \pm 248i$	47,8	7,84
Modo C (Sub.)	$-52,8 \pm 227i$	31,5	7,84
Modo 1 (Sobr.)	$-46,6 \pm 239i$	38,8	10,5
Modo C (Sobr.)	$-68,5 \pm 234i$	38,8	52,6

Tabla 3.8: Polo de funcionamiento con un modo ( $g=10$ )



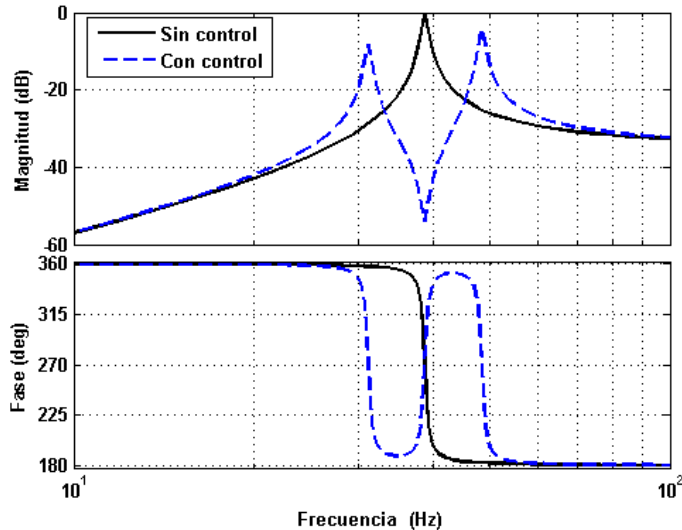
**Figura 3.19:** FRF-s en lazo cerrado para diferentes errores de estimación del residuo y del sistema original sin control



**Figura 3.20:** FRF-s con un error del residuo de +90 %, -90 %, sin error y del sistema original sin control

	Polo 1	Polo 2	Cero
Frecuencia (Hz)	31	48	39
Amortiguamiento (%)	0,97	0,97	1

**Tabla 3.9:** Polos y cero en lazo cerrado con una subestimación de 100 %



**Figura 3.21:** FRF-s del sistema original sin control y con control con un error de subestimación de 100 %

### 3.3.3.4. Conclusiones de la influencia de los parámetros del controlador en el espectro de vibraciones

De este estudio se puede concluir que el cálculo de los parámetros mediante la técnica del *punto de corte* es sensible a la estimación de los parámetros modelos del modo a controlar. En la estimación de los tres parámetros enseguida se empieza a perder el amortiguamiento óptimo que se puede conseguir en el modo controlado.

En el caso de la estimación de la frecuencia con subestimación la disminución del amortiguamiento óptimo es mayor que con sobreestimación debido a que en la ganancia total del controlador influye la estimación de la frecuencia del modo a controlar. En el caso de sobreestimación de la frecuencia, aunque en la magnitud de la FRF no se aprecie la aparición de un nuevo pico debido al elevado amortiguamiento de dicho polo, en la fase sí se nota un pequeño adelanto y retraso cerca del cero y del polo que introduce el controlador en el sistema en lazo cerrado.

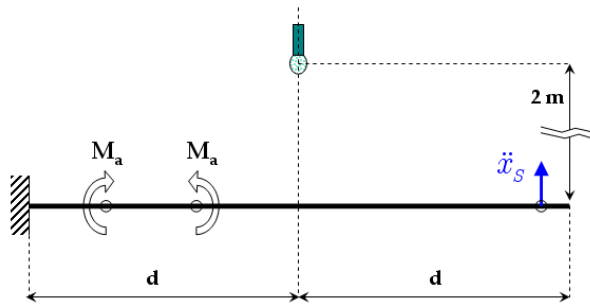
Por otra parte, la influencia que presentan la estimación del amortiguamiento relativo y del residuo del modo que se desea controlar es muy parecida, debido a que ambos parámetros intervienen en el cálculo del amortiguamiento del filtro mediante la siguiente expresión:  $\xi_c = \sqrt{g(\psi_a^1 \psi_s^1)} + \xi_1$ . Tanto la estimación del amortiguamiento

como la del residuo presentan el mismo efecto, lo único que cambia es la influencia que puede tener la variación de cada uno en el amortiguamiento relativo del filtro; es más sensible el amortiguamiento relativo del filtro a la estimación del residuo que a la del amortiguamiento relativo. De ahí que en el caso de la subestimación del residuo la variación que se producía en el amortiguamiento relativo del filtro era pequeña, y por eso no había ningún desdoble en el modo controlado en lazo cerrado. En cambio, en el caso del residuo, al ser mayor la influencia sobre el amortiguamiento del filtro en caso de subestimación, sí aparece un desdoble del modo que se ha controlado.

### 3.3.3.5. Influencia de los parámetros del controlador en el espectro de ruido

En el estudio de la influencia del error que se cometa en el cálculo de los parámetros del controlador en el espectro del ruido se ha considerado el caso de la subestimación del residuo para ver si aparece un desdoble del pico cerca del modo controlado en el espectro del ruido.

El modelo empleado es el de la viga empotrada libre descrita en el apartado 3.2, en el cual se ha posicionado un actuador cerca del empotramiento y un acelerómetro en el extremo libre. En la figura 3.22 se puede observar el esquema de la viga con el actuador, el sensor y el micrófono para medir el ruido, que se ha posicionado a una distancia de 2 m sobre el centro de la viga.



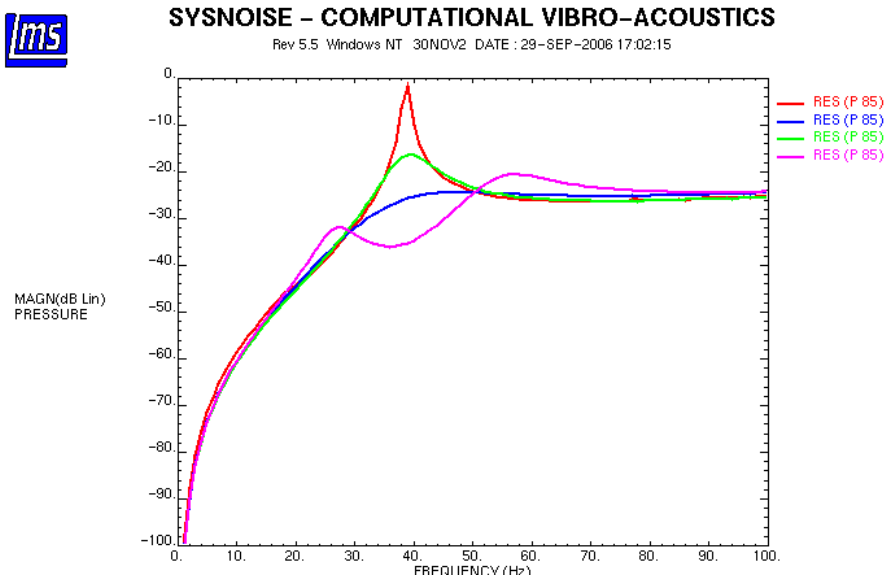
**Figura 3.22:** Posición del micrófono para la medida de radiación

A continuación se ha calculado la respuesta frecuencial de la viga excitando con dos momentos unitarios en el rango de frecuencias de 1 a 100 Hz en la posición del actuador. La respuesta se ha calculado diagonalizando el sistema de ecuaciones con los valores y vectores propios, según la expresión 2.68.

$$\begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ -\{P_{acc}\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\}^T & \beta_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & \{P_{act}\} G \Omega_c \\ \{0\}^T & \Omega_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$



Posteriormente dicha respuesta se ha introducido en el programa SYSNOISE, en el cual se ha calculado la presión sonora, a una distancia de dos metros perpendicularmente a la viga, en el mismo rango de frecuencia que la excitación; ésta se ha representado en la figura 3.23.



**Figura 3.23:** Presión sonora con diferentes parámetros del controlador

En la figura 3.23 se ha dibujado en rojo la presión sonora sin control, en verde la presión sonora con control, con una ganancia de 1 y con los parámetros del controlador calculados con la técnica del *punto de corte*, en azul la presión sonora con control con una ganancia de 10 y con los parámetros del controlador calculados con la técnica del *punto de corte* y por último en rosa la presión sonora con control, con una ganancia de 10, pero con una subestimación en el residuo del 90%. Obsérvese que cuando hay una subestimación de 90% del residuo, en la presión sonora también aparecen dos picos cercanos a la frecuencia controlada.

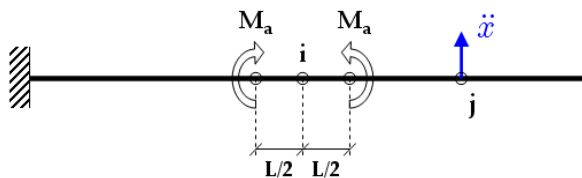
Se concluye que los errores que se cometan en el cálculo de los parámetros del filtro de control también hacen que en el espectro de ruido exista un desdoble en la frecuencia del modo que se ha controlado.

### 3.4. Posicionamiento óptimo

El posicionamiento del actuador y del sensor son también objetivos en la optimización del sistema de control, además de los ya estudiados parámetros del filtro de control. En este apartado se propone una nueva técnica para hallar el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor teniendo en cuenta las leyes de control. La novedad de esta técnica no es hallar la posición óptima del actuador y del sensor teniendo en cuenta dichas leyes, sino saber de antemano la influencia que va a tener el sistema de control en los modos no controlados en función de la posición del actuador y del sensor. Tal y como se ha descrito en el capítulo 2, ya existen técnicas de optimización del actuador y del sensor teniendo en cuenta las leyes de control, pero estas técnicas optimizan la ganancia del controlador y las posiciones del actuador y del sensor sin tener en cuenta la influencia que puede tener dicho control y el posicionamiento de los actuadores y sensores en los modos no controlados.

Primeramente se describirá la técnica de Gawronski (Gawronski, 1999), la cual se ha utilizado para hallar el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor del modelo de viga empotrada libre descrito en el apartado 3.1. A continuación se desarrollará la técnica propuesta en esta tesis, que se ha denominado “*técnica de posicionamiento óptimo basado en los polos en lazo cerrado*”. Posteriormente se ha utilizado esta técnica para hallar el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor del modelo de viga empotrada libre. Para finalizar se han comparado las dos técnicas para ver cómo contribuye a la estabilidad del sistema controlado saber de antemano la influencia que van a tener dichas posiciones en los modos no controlados.

El efecto que produce el actuador que se emplea para realizar el posicionamiento son dos momentos de signo contrario separados una distancia igual a la longitud del actuador ( $L$ ). El sensor es un acelerómetro que medirá el desplazamiento perpendicular al plano de la viga. (Vid. figura 3.24).



**Figura 3.24:** Actuador y sensor en una de las posibles posiciones

#### 3.4.1. Posicionamiento de actuador y sensor: Técnica de Gawronski

Con la técnica de Gawronski se realiza una selección simultánea de las localizaciones óptimas del actuador y del sensor. Para ello se utiliza un algoritmo de posicionamiento de actuadores y sensores desarrollado para estructuras flexibles; el algoritmo

consiste en determinar la norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  o la norma modal de Hankel para la función de transferencia de cada combinación de modo, actuador y sensor. Basado en esas normas se generan las matrices de los índices de posición de actuadores y sensores para cada modo considerado. Posteriormente las matrices se evalúan y se obtienen simultáneamente las posiciones del actuador y del sensor allí donde se maximice la norma de cada modo.

La función de transferencia del modo  $i$  entre el actuador y el sensor se obtiene con la siguiente expresión:

$$G_{ijk}(s) = \frac{\phi_{act,k}^i \phi_{sen,k}^j}{s^2 + 2\xi_{n,k}\omega_{n,k}s + \omega_{n,k}^2} \quad (3.24)$$

siendo  $\phi_{act,k}^i$  y  $\phi_{sen,k}^j$  los vectores de influencia modal del actuador y del sensor, respectivamente:

$\{\phi_{act}^i\} = \{P_{act}^i\} [\Phi]$  es el vector columna de influencia modal del actuador

$\{\phi_{sen}^j\} = \{P_{sen}^j\} [\Phi]$  es el vector fila de influencia modal del acelerómetro

$[\Phi]$  es la matriz modal normalizada a masa modal unidad y  $\{P_{act}^i\}$  es el vector de influencia del acelerómetro, el cual valdrá 1 o -1 según el sentido de la fuerza donde esté el actuador, en  $i$ , y 0 en el resto de los grados de libertad.  $\{P_{sen}^j\}$  es el vector de influencia del acelerómetro, el cual valdrá 1 donde esté el acelerómetro y 0 en el resto de los grados de libertad.  $\omega_n$  y  $\xi_n$  son las frecuencias naturales y el coeficiente de amortiguamiento modal, respectivamente.

Cualquiera de las tres normas que propone Gawronski (1999) da el mismo resultado en lo que se refiere al posicionamiento óptimo de actuador y sensor. Por tanto, lo que se va a describir a continuación está basado en la norma  $H_2$ .

La norma  $H_2$  de una función de transferencia 3.24 se define como:

$$\|G_{ijk}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ijk}^*(\omega) G_{ijk}(\omega) d\omega \quad (3.25)$$

donde, \* es el complejo conjugado.

Esta norma,  $\|G_{ijk}\|$ , se calcula para el modo  $i$ , con el actuador  $j$  y el sensor  $k$ , de una selección de  $J$  candidatos de actuadores y  $S$  candidatos de sensores. La maximización de dicha norma se emplea como criterio para la optimización del posicionamiento del actuador y del sensor.

El índice del actuador y del sensor para el modo  $i$  se define como:

$$\sigma_{ijk} = \frac{\|G_{ijk}\|_2}{\|G_{mi}\|_2} \quad (3.26)$$

siendo  $\|G_{mi}\|_2$  la suma de la media cuadrática de todos los actuadores y sensores para el modo  $m$ :

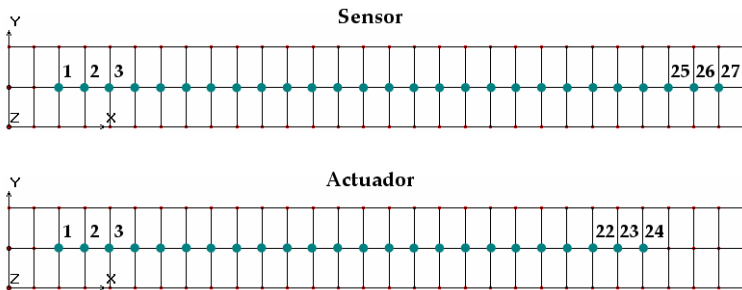
$$\|G_{mi}\|_2^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^S \|G_{ijk}\|_2^2 \quad (3.27)$$

El posicionamiento óptimo del actuador y sensor para el modo  $i$ , se elige donde se maximice el índice del actuador y del sensor  $\sigma_{ijk}$ .

### 3.4.1.1. Posicionamiento óptimo de actuador y sensor en la viga empotrada libre mediante la técnica de Gawronski

En este apartado se ha calculado el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor en el modelo de la viga empotrada libre (descrita en el apartado 3.1) mediante la técnica de Gawronski. Para esto el actuador generará dos momentos sobre la viga y el sensor medirá el movimiento perpendicular a ella.

En la figura 3.25 se pueden observar los posibles posicionamientos de los actuadores y sensores considerados, la posición 1, que puede verse en la figura, siendo en el lado del empotramiento y la posición 27 en el extremo libre de la viga.

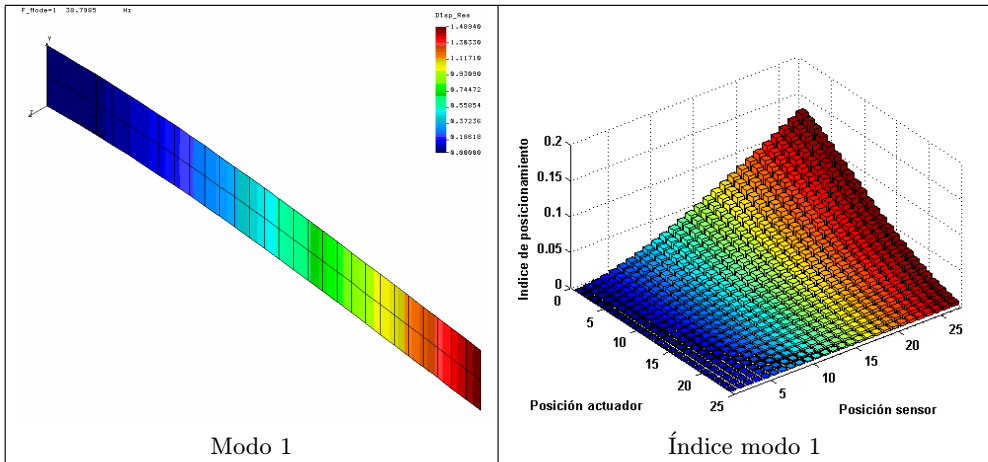


**Figura 3.25:** Posibles posiciones de sensor y de actuador en una viga

Con estas posiciones posibles de actuador y de sensor se han calculado los índices de posicionamiento del actuador y del sensor para los cuatro primeros modos con la expresión 3.27. En las siguientes figuras se han representado dichos índices de posicionamiento, junto con el modo de flexión, para los primeros cuatro modos.

En la siguientes figuras 3.26, en la de la izquierda se ha representado la forma modal del primer modo de flexión y en la de la derecha los índices de posicionamiento del primer modo. Es fácil darse cuenta que en la figura de posicionamiento, el máximo valor del índice del primer modo resulta ser de 1 para el actuador y de 27 para el sensor. Estas posiciones son para el actuador cerca del empotramiento y para el sensor en el extremo libre de la viga.

En las figuras 3.27 se representan los índices de posicionamiento del segundo, tercer y cuarto modo:



**Figura 3.26:** Posicionamiento óptimo de actuador y sensor del modo 1

- El máximo valor del índice de posicionamiento del segundo modo resulta ser de 1 para el actuador y de 27 para el sensor.
- El máximo valor del índice de posicionamiento del tercer modo resulta ser de 20 para el actuador y de 8 para el sensor.
- El máximo valor del índice de posicionamiento del cuarto modo resulta ser de 22 para el actuador y de 5 para el sensor.

Por tanto queda de manifiesto que, tanto para el primer modo y como para el segundo modo de flexión, el posicionamiento máximo del actuador y sensor es el mismo. Pero en los resto de los modos esta posición óptima es distinta y además puede haber posiciones que tienen un máximo local parecido. También se hace constar que estos máximos locales aumentan en función del orden modal.

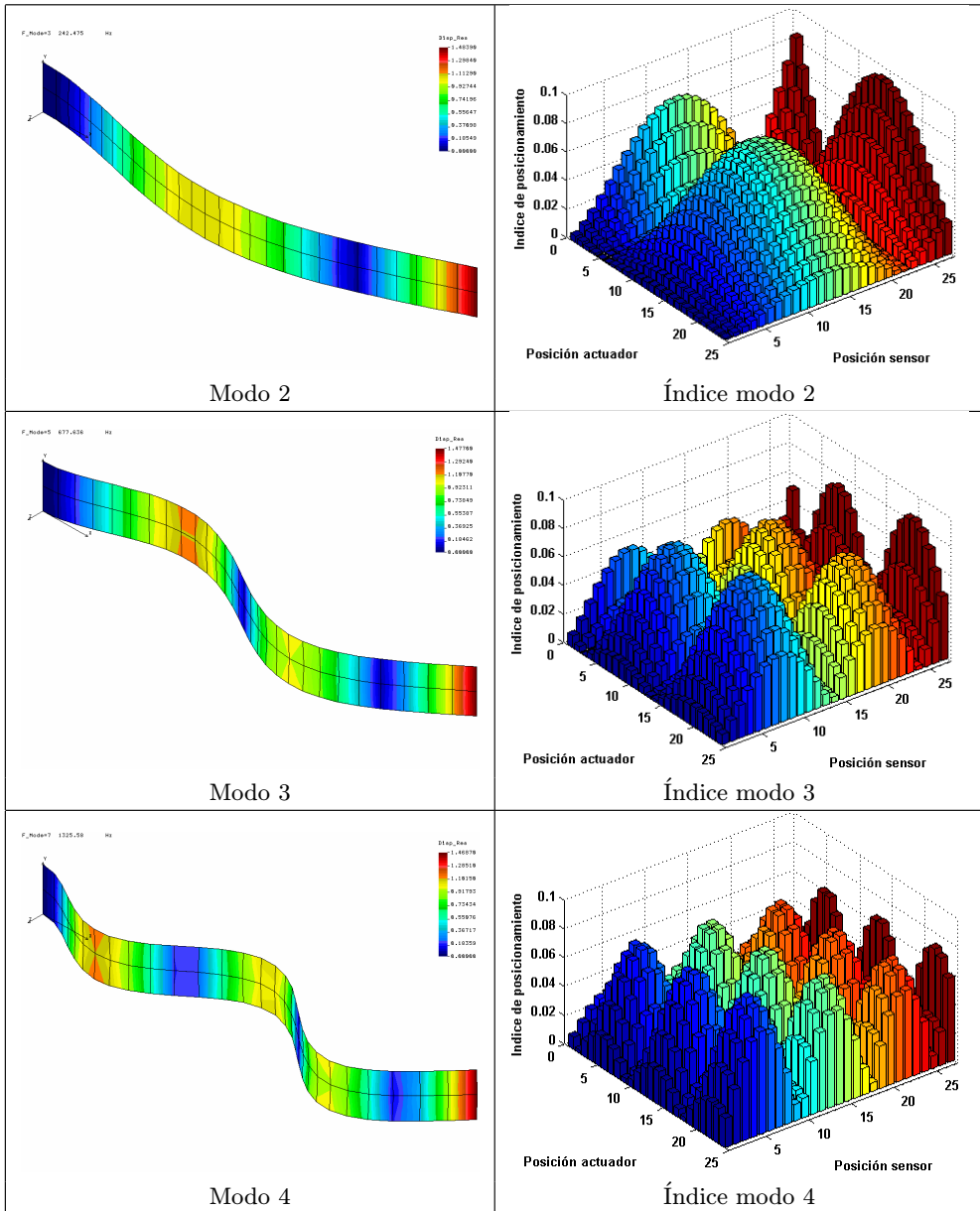


Figura 3.27: Posicionamiento óptimo de actuador y sensor de los modos 2, 3 y 4

### 3.4.2. Posicionamiento óptimo basado en los polos en lazo cerrado

En este apartado se lleva a cabo la optimización del posicionamiento del actuador y del sensor teniendo en cuenta las leyes de control que se van a utilizar en el sistema. La novedad está en que no sólo tiene en cuenta el modo que se desea controlar, sino también el efecto que puede tener dicho control y el posicionamiento de actuador y sensor en los modos no controlados. El control utilizado ha sido de realimentación de la aceleración con un filtro de segundo orden. Para ello se han discretizado las posibles posiciones del actuador y del sensor.

La primera fase de esta técnica consiste en obtener las matrices de masa y rigidez del sistema ( $[M]$  y  $[K]$ ), así como la de amortiguamiento ( $[C]$ ); para ello se supone que el amortiguamiento del sistema es proporcional. Posteriormente a la ecuación de equilibrio del sistema se le añade la ecuación del controlador; reordenando las ecuaciones se obtiene un sistema de  $n+1$  grados de libertad, siendo  $n$  el del sistema sin control. Finalmente con este sistema de ecuaciones se consiguen los valores y vectores propios del sistema controlado; de estos valores propios se obtiene la matriz de amortiguamientos relativos de los polos en función de las posiciones del actuador y del sensor.

Tal como se ha dicho, para hallar el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor primeramente se han obtenido las matrices de masa y rigidez del modelo discretizado. Con estas matrices, y suponiendo el amortiguamiento proporcional, la ecuación de equilibrio del sistema original sin control queda:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\} \quad (3.28)$$

siendo  $[C]$  la matriz de amortiguamiento del sistema que se ha obtenido con la expresión 3.29.

$$[C] = ([M] [\Phi]) [C_r] (\Phi^T [M]) \quad ; \quad [C_r] = [2\xi\omega] \quad (3.29)$$

$[\Phi]$  es la matriz de vectores propios del sistema 3.30.

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (3.30)$$

A continuación, a la ecuación de equilibrio se le añade la aportación del sistema de control SISO de realimentación de la aceleración de segundo orden para unas posiciones genéricas del actuador,  $i$ , y del sensor,  $j$ ; resultando el sistema siguiente:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\} - \{P_{a,i}\} g \Omega_c \nu \quad (3.31)$$

$$\ddot{\nu} + \beta_c \dot{\nu} + \Omega_c \nu = \{P_{s,j}\}^T \{\ddot{x}\}$$

siendo,

- $\{P_{s,j}\}_{N \times 1}$  el vector de influencia del sensor en la posición  $j$ , el cual es un vector de ceros excepto en el grado de libertad del sensor, donde vale 1 ó -1 según el sentido en el que mida.
- $\{P_{a,i}\}_{N \times 1}$  el vector de influencia del actuador en la posición  $i$ , el cual es un vector de ceros excepto en los grados de libertad en los cuales ejerce el actuador; según el signo de la fuerza que produce puede valer 1 ó -1.
- $\beta_c = 2\xi_c\omega_c$ ,  $\Omega_c = \omega_c^2$  y  $\nu$  la variable del controlador.

Agrupando las ecuaciones del sistema 3.31 y reordenando los términos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ -\{P_{s,j}\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\}^T & \beta_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} [K] & \{P_{a,i}\}^T G \Omega_c \\ \{0\}^T & \Omega_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Expresando de forma abreviada el sistema de ecuaciones anterior:

$$[M_T] \{\ddot{x}_T\} + [C_T] \{\dot{x}_T\} + [K_T] \{x_T\} = \{f_T(t)\} \quad (3.33)$$

De esta forma nos queda un sistema de  $n+1$  ecuaciones de segundo orden, donde las matrices  $[M_T]$ ,  $[C_T]$  y  $[K_T]$  no son simétricas ni definidas positivas. Sin embargo, en este caso el amortiguamiento no es proporcional, por lo que para resolver se va a añadir la siguiente identidad nula:

$$[M_T] \{\dot{x}_T\} - [M_T] \{\dot{x}_T\} = \{0\} \quad (3.34)$$

Las ecuaciones matriciales 3.33 y 3.34 pueden expresarse conjuntamente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M_T] \\ [M_T] & [C_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M_T] & [0] \\ [0] & [K_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_T(t)\} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Abreviadamente se puede reescribir como:

$$[A_T] \{\dot{z}_T\} + [B_T] \{z_T\} = \{g_T(t)\} \quad (3.36)$$

Tampoco en este caso las matrices  $[A_T]$  y  $[B_T]$  son simétricas ni definidas positivas.

Prescindiendo de la existencia de perturbaciones externas ( $\{g_T\} = \{0\}$ ) se han obtenido los valores propios del sistema en función de la posición del actuador ( $i$ ) y del sensor ( $j$ ). El valor propio  $k$  tiene la siguiente expresión:



$$p_{f(i,j)}^k = -\xi_{f(i,j)}^k \omega_{f(i,j)}^k \pm i \omega_{f(i,j)}^k \sqrt{1 - (\xi_{f(i,j)}^k)^2} \quad (3.37)$$

donde,  $\omega_{f(i,j)}^k$  y  $\xi_{f(i,j)}^k$  son la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del modo  $k$  del sistema controlado cuando el actuador y el sensor están posicionados en  $i$  y  $j$ , respectivamente.

Para cada modo  $k$  se ha obtenido una matriz de amortiguamiento relativo en función de la posición de actuador y sensor:

$$[M]_{f(\xi,k)} = \begin{bmatrix} \xi_{f(1,1)} & \cdots & \xi_{f(1,i)} & \cdots & \xi_{f(1,A)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{f(j,1)} & \cdots & \xi_{f(j,i)} & \cdots & \xi_{f(j,A)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{f(S,1)} & \cdots & \xi_{f(S,i)} & \cdots & \xi_{f(S,A)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

siendo,  $A$  y  $S$  el número total de posiciones elegidas para el actuador y el sensor.

Las posiciones óptimas del actuador y del sensor se eligen de tal forma que el amortiguamiento relativo en el modo controlado sea el máximo posible y además tratando de minimizar la posibilidad de inestabilizar los modos cercanos al controlado.

Para realizar esta optimización las matrices de masa y de rigidez se han obtenido de un modelo de elementos finitos de ABAQUS del sistema que se desea controlar. Mediante el siguiente comando de ABAQUS se obtienen las matrices de cada elemento:

```
*FILE FORMAT, ASCII
*ELEMENT MATRIX OUTPUT, ELSET=elementuak, OUTPUT FILE =
USER DEFINED, FILE NAME=MASA, MASS=Yes
*ELEMENT MATRIX OUTPUT, ELSET=elementuak, OUTPUT FILE =
USER DEFINED, FILE NAME=RIGIDEZ, STIFFNESS=Yes
```

**Figura 3.28:** Comandos de ABAQUS para la obtención de  $[M]$  y  $[K]$

Posteriormente estas matrices elementales se han leído en MATLAB, se han ensamblado e impuesto las condiciones de contorno para obtener las matrices globales de la estructura.

Los valores y vectores propios del sistema original se han obtenido con la función *eig* de MATLAB, mientras que los valores propios del sistema controlado se han obtenido con la función *qr* de MATLAB para matrices no simétricas.

### 3.4.2.1. Posicionamiento óptimo del actuador y del sensor en la viga empotrada libre

En este apartado calcula el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor en el modelo de la viga empotrada libre descrita en el apartado 3.1, mediante la técnica basado en los polos en lazo cerrado desarrollada en esta tesis. También en este caso el actuador que se utiliza generará dos momentos sobre la viga y el sensor medirá el movimiento perpendicular a ella.

Con esta técnica se han calculado las matrices de amortiguamiento del modo controlado y de los modos no controlados cercanos al modo controlado. Las posiciones óptimas han sido calculadas para los tres primeros modos, controlando cada modo independientemente.

Antes de realizar la optimización, inicialmente se ha realizado un análisis modal de la viga empotrada libre (figura 3.2) sin control y posteriormente con control.

Se ha simulado la viga empotrada libre con un modelo de elementos finitos en ABAQUS empleando elementos cascará S4R5 de cinco grados de libertad: tres de traslación  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_z$  y dos de giro  $G_x$  y  $G_y$ . En este caso también se asume que tanto el sensor como el actuador son ideales. Se ha supuesto que el actuador produce dos momentos en el eje  $Y$  sobre la viga a una distancia de separación igual a la longitud del actuador. Por otra parte el sensor se ha posicionado perpendicularmente a la viga, midiéndose el desplazamiento en la dirección  $Z$ . (Vid. figura 3.24).

Se han calculado diferentes casos de posicionamientos óptimos, controlando un solo modo que han sido el primero, segundo y tercero. Las posibles posiciones que se han supuesto, tanto para el actuador y sensor, se pueden observar en la figura 3.25, que han sido las mismas que con la técnica de Gawronski. El número de posibles posiciones de actuador que se han elegido ha sido de 24 y de sensor 27.

El primer modo se ha controlado con tres diferentes ganancias ( $g = 1, 10$  y  $20$ ), para observar si el posicionamiento óptimo si cambia en función de la ganancia. El segundo y tercero únicamente se han calculado con una ganancia.

#### 3.4.2.1.1. Posicionamiento óptimo para el control del primer modo

En este apartado se obtienen las posiciones óptimas para el primer modo con ganancias de valores de 1, 10 y 20 para todas las combinaciones de posiciones de actuador y sensor, ya indicadas en la figura 3.25. Para todas estas combinaciones se ha supuesto que la ganancia del controlador es la misma, calculándose los parámetros del controlador con la técnica del *punto de corte*. La ecuación de equilibrio del sistema controlado 3.32 particularizada para el primer modo es:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ -\{P_{s,j}\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\}^T & \beta_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} [K] & \{P_{a,i}\} g \Omega_{c1} \\ \{0\}^T & \Omega_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde,

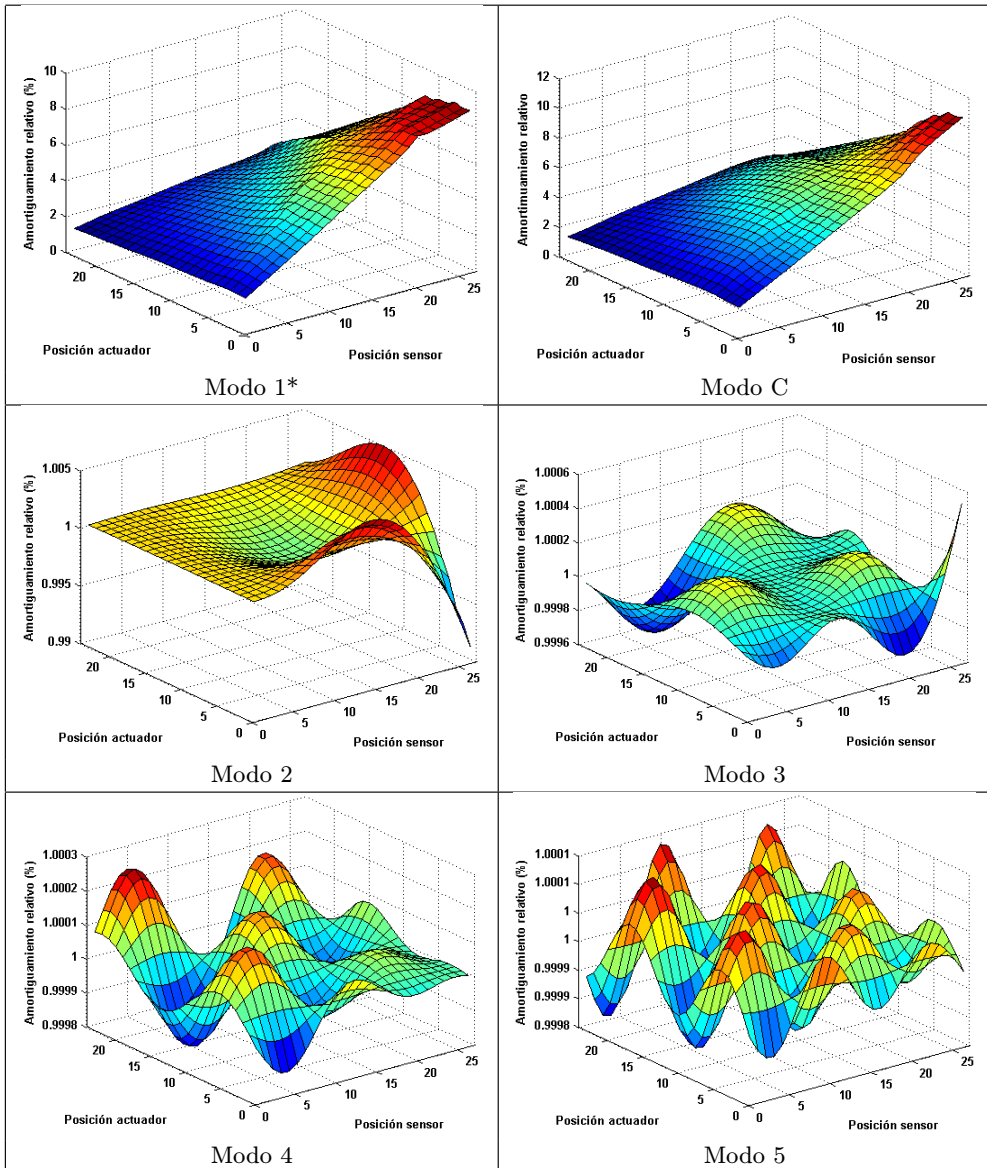
- $\Omega_{c1} = \omega_{c1}^2$  y  $\beta_{c1} = 2\xi_{c1}\omega_{c1}$ , siendo  $\omega_{c1}$  la frecuencia natural del controlador, la cual en este caso va a ser igual a la frecuencia del primer modo del sistema sin control.
- $\xi_{c1}$  es el amortiguamiento relativo del controlador, el cual se ha calculado con la técnica del *punto de corte*.

Siguiendo el procedimiento, ya explicado al principio de este apartado (3.4.2), se ha calculado la matriz de amortiguamientos del modo  $k$  para la posición  $i$  del actuador y  $j$  del sensor. Como resultado se han obtenido las matrices de amortiguamientos de los polos en lazo cerrado de los cuatro primeros modos y del controlador. En la matriz de amortiguamientos del primer modo,  $[M]_{f(\xi,1)}$ , se puede observar en qué posiciones del actuador y del sensor se obtiene el máximo de amortiguamiento del modo controlado. Por otra parte en las matrices de amortiguamientos del segundo, tercer y cuarto polos en lazo cerrado,  $[M]_{f(\xi,2)}$ ,  $[M]_{f(\xi,3)}$  y  $[M]_{f(\xi,4)}$ , se puede ver el amortiguamiento que se obtendría en los modos no controlados; en ellas se refleja la influencia que tiene el control de inestabilizar los modos no controlados.

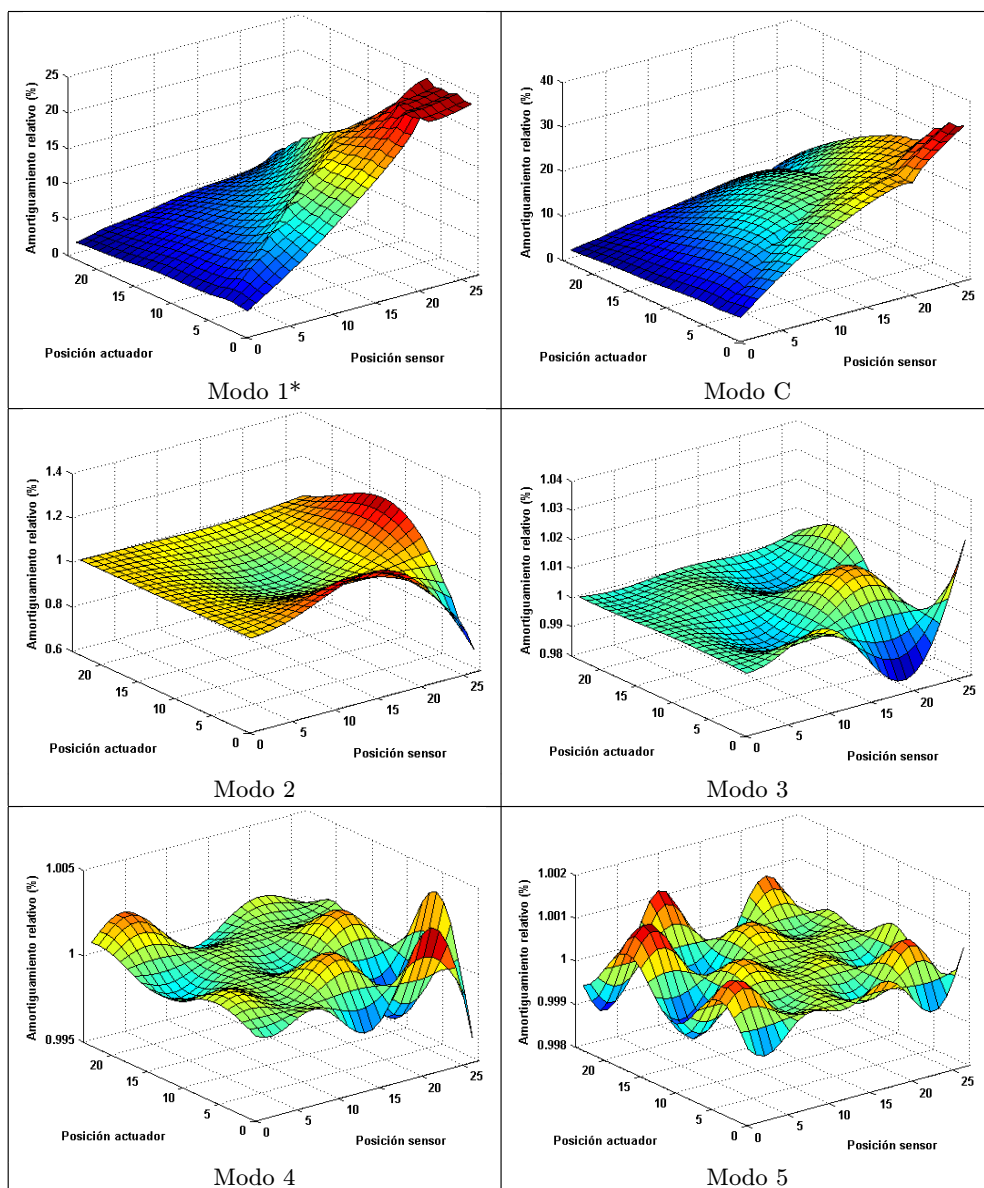
Las figuras 3.29 representan las matrices de amortiguamientos de los cinco primeros modos de flexión, así como del modo del controlador, con una ganancia del controlador de valor 1. Asimismo en las figuras 3.30 se observan las mismas matrices pero en este caso el primer modo se ha controlado con una ganancia de valor 10. Por último, en las figuras 3.31 se han representado las mismas matrices para una ganancia de valor 20.

En la figura correspondiente al primer modo de flexión cuando se controla con una ganancia igual a 1 (figura 3.29) se puede observar que el posicionamiento óptimo para conseguir el mayor amortiguamiento posible de dicho modo corresponde a las coordenadas (3-27), es decir la posición 3 para el actuador y la 27 para el sensor. Tal como se recordará de la figura 3.24 esto significa que el actuador se encuentra cerca del empotramiento y que el sensor se sitúa en el extremo libre de la viga.

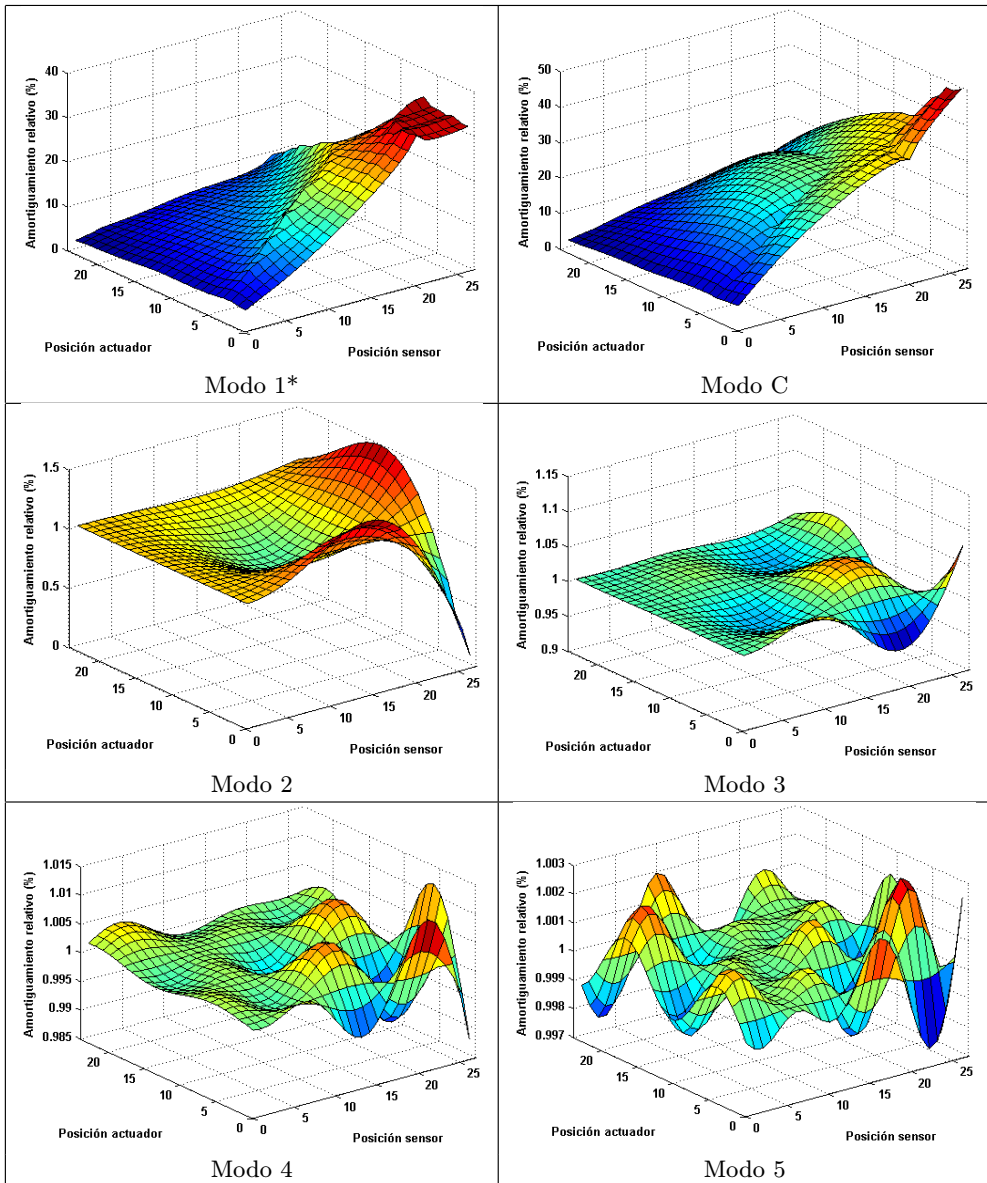
En el caso de que el primer modo se controle con una ganancia de valor 10 ó 20 (figuras 3.30 y 3.31) el máximo amortiguamiento relativo se consigue en el punto (7-27), es decir la posición 7 para el actuador y 27 para el sensor. Nótese que el máximo no se alcanza en el mismo punto que con ganancia unidad, sino que ha habido una pequeña variación en la posición del actuador. Con ganancia 10 en el punto (3-27) se consigue un amortiguamiento modal del primer modo de 23,84% y en el punto (7-27) de 24,09%, una variación de 0,26%. Esta variación del punto óptimo, que no es muy



**Figura 3.29:** Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con  $g = 1$ . (\* indica el modo controlado)



**Figura 3.30:** Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con  $g = 10$ . (\* indica el modo controlado)



**Figura 3.31:** Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el primer modo con  $g = 20$ . (\* indica el modo controlado)

grande con respecto al amortiguamiento, es debida a la influencia de los otros modos no controlados cercanos al modo que se quiere controlar.

Por otra parte también en los amortiguamientos en lazo cerrado de los modos 2, 3, 4 y 5 con las diferentes ganancias, se puede ver la influencia que tiene el control en los modos no controlados cercanos al modo controlado. Por ejemplo en el caso de los amortiguamientos del segundo modo se puede observar que el punto (1-27) es el peor desde el punto de vista de la estabilidad. Es decir, que si el actuador estuviera en el punto 1 (cerca del empotramiento), el sensor en el extremo libre de la viga y se controlará el primer modo con esta configuración, si aumentásemos la ganancia del controlador el segundo modo llegaría a inestabilizarse. A su vez podemos ver que en el mismo punto el tercer modo no se inestabiliza ni tiene ningún riesgo de que ocurra.

Otra circunstancia que se puede observar es que cuanto más se aleja un modo no controlado del modo controlado la influencia del control en ellos es menor con el tipo de controlador que se ha elegido.

El aspecto que presentan estas curvas de amortiguamiento para cada modo depende de su forma modal y de la del modo controlado. Por otra parte la razón de que en algunos puntos el amortiguamiento aumente y en otros disminuya depende de los signos de los residuos del modo controlado,  $\psi_{act,i}^k \psi_{sen,j}^k$ , y de los modos no controlados,  $\psi_{act,i}^m \psi_{sen,j}^m$ , de la función de transferencia entre el actuador y el sensor. En este caso  $[\psi]$  es la matriz modal de la viga empotrada libre normalizada a masa modal unidad. Si el signo de estos dos términos es el mismo no hay ningún riesgo de inestabilizar el modo que se estudia; en cambio si el signo es contrario existe una limitación de la ganancia por consideraciones de estabilidad del modo no controlado.

El criterio de selección del posicionamiento del actuador y del sensor es elegir de tal forma que el amortiguamiento que se obtenga en el modo controlado sea lo mayor posible, pero teniendo en cuenta que los modos cercanos al modo controlado no tengan tendencia a inestabilizarse.

Con el actuador y el sensor en (3-27) y con las ganancias 1, 10 y 20, los amortiguamientos relativos que se obtendrían para los cinco primeros modos se han representado en la figura 3.32 y en la tabla 3.10. En ellas se puede observar que en el segundo modo el amortiguamiento relativo se ha reducido, es decir que en este caso si aumentásemos la ganancia del control llegaría un momento en el que el segundo modo se inestabilizaría. Con una ganancia de valor 10 también la influencia del controlador es perjudicial sobre el modo quinto, porque en este modo también se da una disminución del amortiguamiento, aunque no tanto como en el segundo modo debido a que se encuentra más lejos del modo controlado. En cambio sobre el tercer y cuarto modos la influencia del controlador tiende a aumentar el amortiguamiento de estos modos, por tanto estos modos no tendrían ningún riesgo de inestabilizarse si el actuador y el sensor estuvieran posicionados en las posiciones (3-27).

Para el caso de la posición (7-27) en la figura 3.33 y en la tabla 3.11 se han representado los amortiguamientos de los primeros cinco modos, con ganancias de 1, 10 y 20. Se puede observar que el segundo y el cuarto modos no tienen ningún riesgo de inestabilizarse, pero en cambio el tercero y el quinto modo sí.

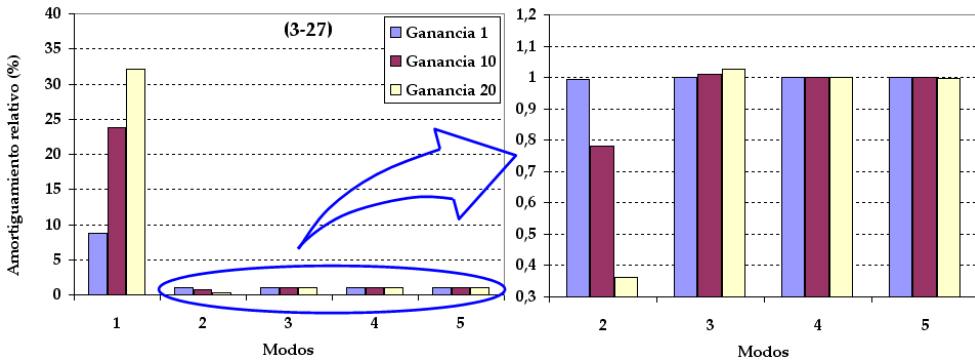


Figura 3.32: Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos en la posición (3-27)

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
$g = 1$	8,8202	0,9938	1,0002	1	1
$g = 10$	23,8445	0,7886	1,0087	1,0003	0,99961
$g = 20$	32,136	0,36303	1,0255	1,001	0,99856

Tabla 3.10: Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos en la posición (3-27)

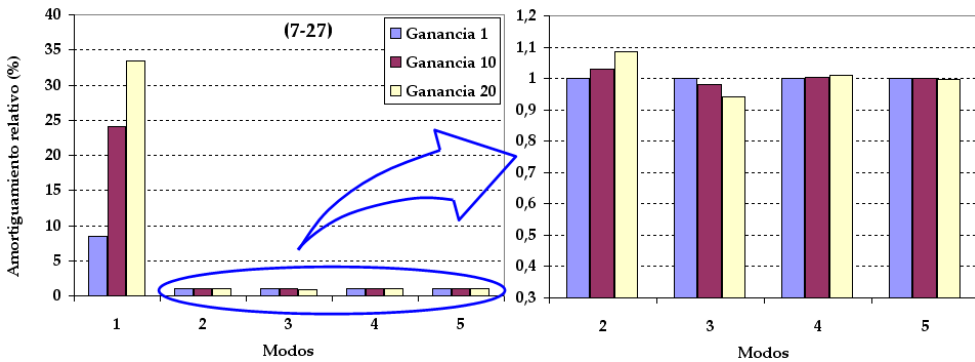


Figura 3.33: Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos en la posición (7-27)

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
$g = 1$	8,423	1,001	0,9997	1	1
$g = 10$	24,0984	1,0297	0,98227	1,0034	0,99967
$g = 20$	33,4075	1,0847	0,94036	1,0088	0,99867

Tabla 3.11: Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos en la posición (7-27)



Desde el punto de vista de la estabilidad el punto (7-27) es mejor que el (3-27) ya que la ganancia del controlador del primer modo tiene más margen antes de que pueda inestabilizar el primer modo. Asimismo es mejor que el primer modo que pueda inestabilizar el controlador esté lejos del modo controlado, pues esto permite disponer de un mayor rango de ganancia del controlador.

#### 3.4.2.1.2. Posicionamiento óptimo para el control del segundo modo

En este apartado se calculan las matrices de amortiguamientos para el control del segundo modo con una ganancia de valor 1, teniendo en cuenta todas las combinaciones de posiciones de actuador y sensor que se pueden observar en la figura 3.25. Los parámetros del controlador se han calculado con la técnica del *punto de corte*.

En este caso también se ha seguido el mismo procedimiento que en el caso anterior. El sistema de ecuaciones del sistema global de la viga y el controlador queda de la siguiente manera:

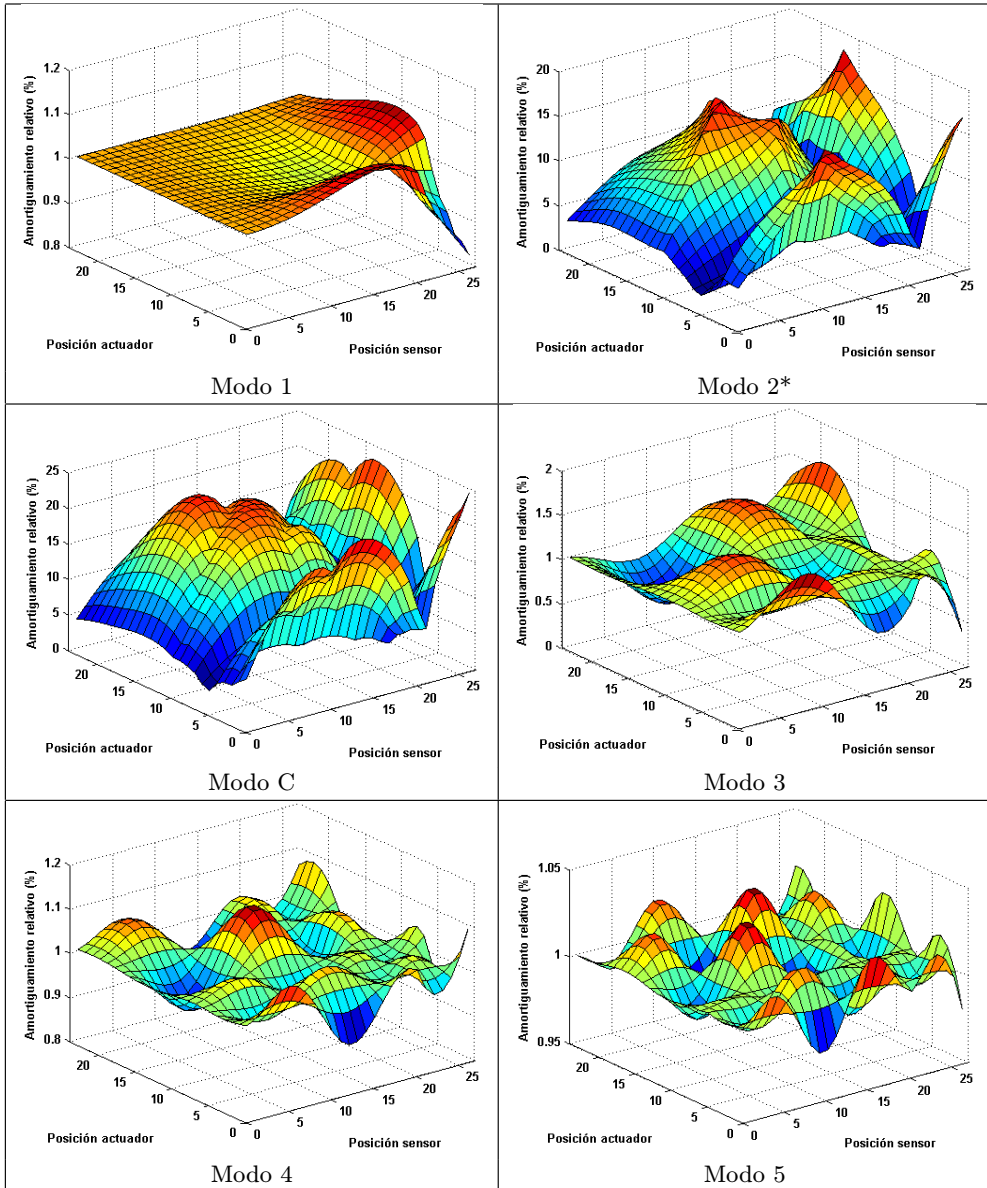
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ -\{P_{acc}\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\}^T & \beta_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [K] & \{P_{act}\}^T G \Omega_{c2} \\ \{0\}^T & \Omega_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde,

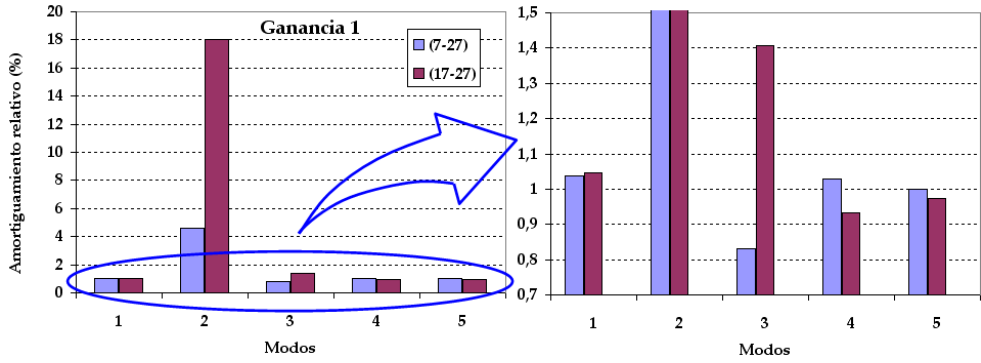
- $\Omega_{c2} = \omega_{c2}^2$  y  $\beta_{c2} = 2\xi_{c2}\omega_{c2}$ , siendo  $\omega_{c2}$  la frecuencia natural del controlador, la cual en este caso va a ser igual a la frecuencia del segundo modo del sistema sin control.
- $\xi_{c2}$  es el amortiguamiento relativo del controlador, el cual se ha calculado con la técnica del *punto de corte*.

Siguiendo el mismo procedimiento ya descrito se han obtenido las matrices de amortiguamientos  $[M]_{f(\xi,1)}$ ,  $[M]_{f(\xi,2)}$ ,  $[M]_{f(\xi,3)}$ ,  $[M]_{f(\xi,4)}$  y  $[M]_{f(\xi,c)}$ , únicamente para la ganancia 1 (figura 3.34).

En este caso el máximo del amortiguamiento relativo para el segundo modo resulta en el punto (17-27). En la figura 3.35 y en la tabla 3.12 se han representado los amortiguamientos de los cinco primeros modos en los puntos (7-27) y (17-27). Se puede observar que la posición (17-27) es mucho mejor tanto para el control del segundo modo como para la estabilidad de los modos de alrededor. En esta posición se consigue mucho más amortiguamiento del segundo modo que con la posición (7-27), y además el primer y tercer modos no tienen ningún riesgo de inestabilizarse cosa que no ocurre con la posición (7-27) en el que el tercer modo sí se inestabilizaría si se incrementa la ganancia del segundo modo.



**Figura 3.34:** Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el segundo modo con  $g = 1$ . (\* indica el modo controlado)



**Figura 3.35:** Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos para las posiciones (7-27) y (17-27)

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(7-27)	1,0373	4,6204	0,83104	1,0292	0,999631
(17-27)	1,0458	17,9984	1,4071	0,93271	0,9733

**Tabla 3.12:** Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos para las posiciones (7-27) y (17-27)

### 3.4.2.1.3. Posicionamiento óptimo para el control del tercer modo

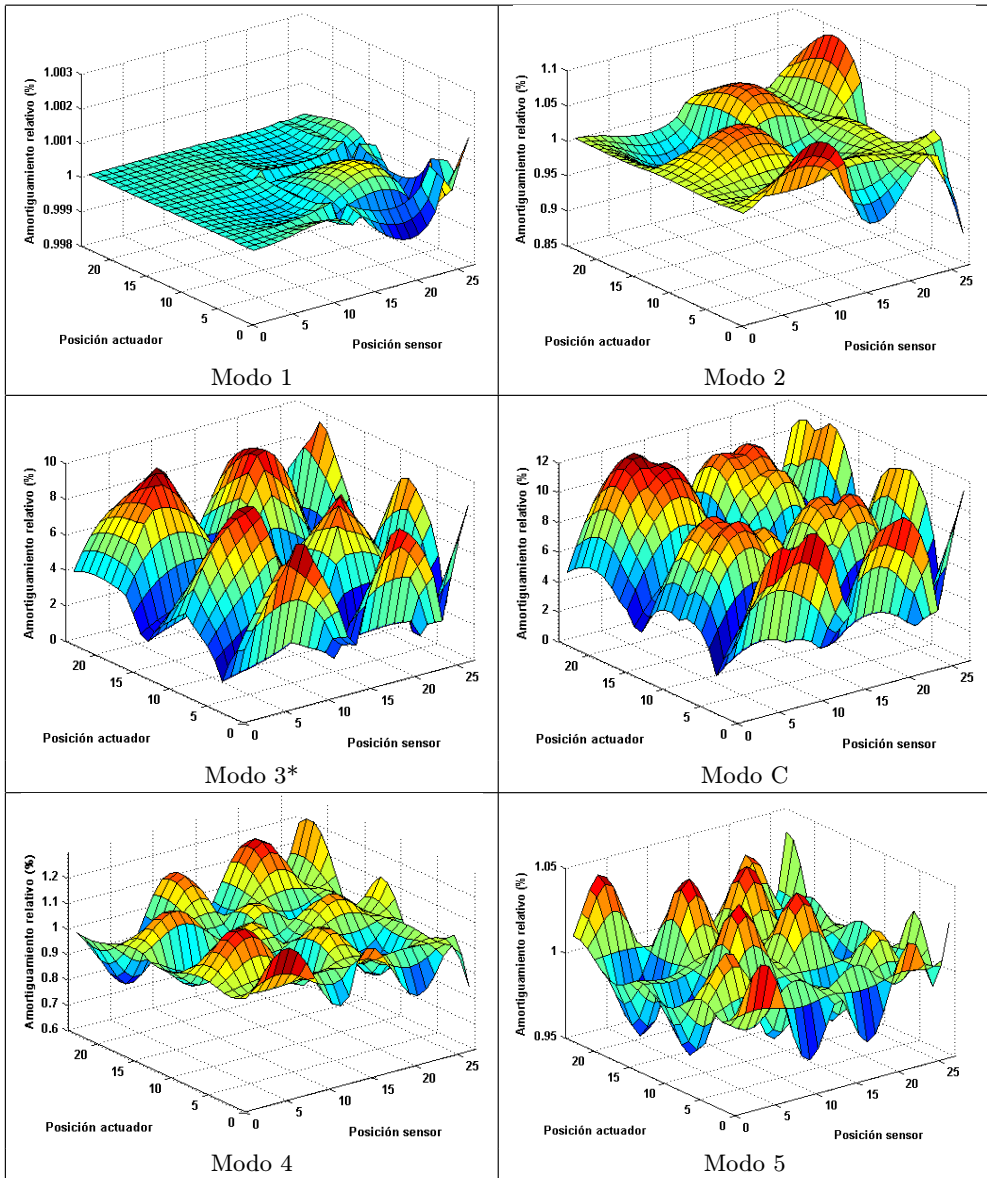
En este caso se ha empleado una ganancia de valor 0,1 para todas las combinaciones de posiciones de actuador y sensor que se pueden observar en la figura 3.25. Con el mismo procedimiento que en los apartados anteriores, el sistema de ecuaciones del sistema global de la viga y el controlador queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [M] & \{0\} \\ -\{P_{s,j}\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\}^T & \beta_{c3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} [K] & \{P_{a,i}\} G \Omega_c \\ \{0\}^T & \Omega_{c3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

donde,

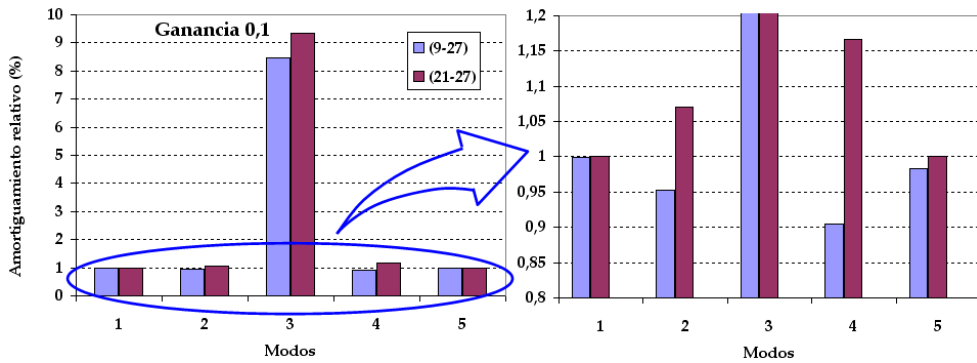
- $\Omega_{c3} = \omega_{c3}^2$  y  $\beta_{c3} = 2\xi_{c3}\omega_{c3}$ , siendo  $\omega_{c3}$  la frecuencia natural del controlador, la cual en este caso va a ser igual a la frecuencia del tercer modo del sistema sin control.
- $\xi_{c3}$  es el amortiguamiento relativo del controlador, el cual se ha calculado con la técnica del *punto de corte*.

En la figura 3.36 se representan las matrices de amortiguamientos  $[M]_{f(\xi,1)}$ ,  $[M]_{f(\xi,2)}$ ,



**Figura 3.36:** Matrices de amortiguamientos de los 5 primeros modos y del controlador (C) controlando el tercer modo con  $g = 0,1$ . (\* indica el modo controlado)

$[M]_{f(\xi,3)}$ ,  $[M]_{f(\xi,4)}$  y  $[M]_{f(\xi,C)}$  obtenidas con una ganancia de 0,1. El primer máximo se alcanza en el punto (21-27) y el segundo en el (9-27). En la figura 3.37 y en la tabla 3.13 se indican los amortiguamientos relativos de los cinco primeros modos de estos puntos.



**Figura 3.37:** Amortiguamiento relativo de los cinco primeros modos para las posiciones (9-27) y (21-27)

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
(9-27)	0,99897	0,95239	8,4502	0,90485	0,98318
(21-27)	1,0002	1,0703	9,338	1,1661	1,0011

**Tabla 3.13:** Amortiguamiento relativo (%) de los cinco primeros modos para las posiciones (9-27) y (21-27)

En este caso, en la posición (21-27) se obtiene el mayor amortiguamiento relativo del modo controlado, y además en dicha posición no hay ningún riesgo de inestabilizar los cuatro modos que tiene alrededor. En cambio en el punto (9-27), aparte de que se consigue un amortiguamiento relativo menor que en el caso óptimo, los cuatro modos que están alrededor tienen riesgo de inestabilizarse si se aumenta la ganancia del controlador.

### 3.4.3. Comparación de las dos técnicas de posicionamiento óptimo

Comparando las dos técnicas de posicionamiento, una la de Gawronski y la otra la desarrollada en esta tesis basado en los polos en lazo cerrado, por una parte se puede ver que los puntos máximos de posicionado en el modo pueden ser diferentes con los dos métodos. En la primera técnica únicamente se tiene en cuenta el modo que se va a controlar, es decir en los resultados no se observa ninguna influencia del resto de los modos ya que se supone que la respuesta únicamente depende del modo que se desea controlar. En cambio con la metodología desarrollada en esta tesis basado en los polos en lazo cerrado, sí se tiene en cuenta que la respuesta está influenciada con

un número de modos igual al de grados de libertad con los que se ha modelizado la viga empotrada libre. Por tanto en el resultado sí se refleja la repercusión que pueden tener estos modos.

Por otra parte, con la técnica de Gawronski no se tienen en cuenta las leyes de control que a posteriori se van a utilizar; por tanto no se refleja la influencia que pueden tener estas leyes en el posicionamiento óptimo. En cambio con la técnica de los polos en lazo cerrado se puede observar la influencia que tiene el sistema de control en el posicionamiento óptimo, puesto que para calcular las posiciones óptimas se tienen en cuenta las leyes de control. Los parámetros del controlador son calculados para cada posición de actuador y sensor.

Además, con la técnica basado en los polos en lazo cerrado aparte de calcular las posiciones óptimas del actuador y del sensor también se puede observar la influencia que puede tener el controlador en el resto de los modos no controlados en función del posicionamiento del actuador y del sensor, puesto que se calculan las matrices de amortiguamiento de los modos que se encuentran alrededor del modo que se quiere controlar. Por esta razón aparte de seleccionar el posicionamiento óptimo del actuador y sensor utilizando el criterio del mayor amortiguamiento relativo del modo controlado también se puede tener en cuenta la influencia que puede tener en inestabilizar los modos no controlados que se encuentran cerca del modo que se desea controlar, de tal forma que la posibilidad de inestabilizar los modos de alrededor sea mínima. En este caso se puede observar que con esta técnica, al obtener un posicionamiento óptimo *no-colocalizado*, puede suceder que se inestabilice algún modo no controlado, y por tanto se tenga que encontrar un equilibrio entre conseguir un control óptimo desde el punto de vista del posicionamiento y además conseguir un sistema estable que tenga el menor riesgo posible de inestabilizar los modos no controlados.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la optimización del sistema de control. Primeramente se ha realizado un estudio de la influencia del cálculo de los parámetros del filtro de control mediante la técnica del *punto de corte*. A continuación se ha desarrollado una nueva técnica de posicionamiento de actuadores y sensores.

En el estudio de la influencia que pueden presentar el resto de los modos cuando los parámetros se calculan de forma selectiva se ha observado que el *punto de corte* deja de existir con la influencia del resto de modos, pero que las frecuencias de los polos de funcionamiento son muy parecidas, por tanto en la FRF únicamente aparece un pico amortiguado, debido al cero que introduce el controlador en lazo cerrado.

A continuación se realizó un análisis de la influencia que puede haber en el sistema controlado debido a las variaciones con respecto al valor exacto a la hora del cálculo de los parámetros del filtro. Para este cálculo se necesitan conocer los siguientes tres parámetros del sistema: la frecuencia natural del modo que se desea controlar, el amortiguamiento del mismo modo y por último el residuo de la función de transferencia de dicho modo.

En este estudio se ha observado que por las variaciones con respecto al valor exacto, tanto de la frecuencia natural como del amortiguamiento relativo, entre los puntos de funcionamiento del modo controlado y del polo del control aparece una diferencia pequeña en la frecuencia, de tal forma que en la FRF únicamente aparece un pico; pero el amortiguamiento final que se obtiene es menor que en el caso de que no existiera ningún error.

En el caso de que se introduzcan errores en la medida del residuo se pueden observar dos tendencias; por una parte si el error es por sobreestimación no hay un desdoble de frecuencia, pero el amortiguamiento que se obtiene es menor que en el caso de que no hubiera ningún error. Sin embargo, en el caso de que el error sea por subestimación, en el sistema controlado aparecen dos picos de resonancia cerca del modo controlado.

Por otra parte también se ha desarrollado una nueva técnica para hallar el posicionamiento óptimo del actuador y del sensor teniendo en cuenta las leyes de control. La ventaja que presenta este posicionamiento, aparte de tener en cuenta la influencia de los modos que no se controlan, es que se puede saber de antemano la influencia que puede tener cada posicionamiento del actuador y del sensor con las leyes de control seleccionadas en los modos no controlados; por tanto de antemano se puede saber si dicha posición es sensible a la inestabilización de los modos no controlados.





## Capítulo 4

# Métodos de estabilidad del control modal *no-colocalizado*

### 4.1. Introducción

En este capítulo se ha realizado el estudio de la estabilidad del sistema de control, consiguiendo que el sistema *no-colocalizado* sea estable mediante dos técnicas: la primera con un sensor puntual *casi-colocalizado* con el actuador, y la segunda con un sensor puntual *colocalizado* con el actuador.

Primeramente se ha abordado el estudio de estabilidad del controlador mediante las técnicas de: función de transferencia en lazo abierto, margen de fase y de ganancia y lugar geométrico de las raíces. Para ello se ha estudiado la influencia del controlador en los modos no controlados, y como resultado se han propuesto dos técnicas para asegurar la estabilidad del control *no-colocalizado*, una mediante un sensor *casi-colocalizado* y la otra mediante un sensor *colocalizado*.

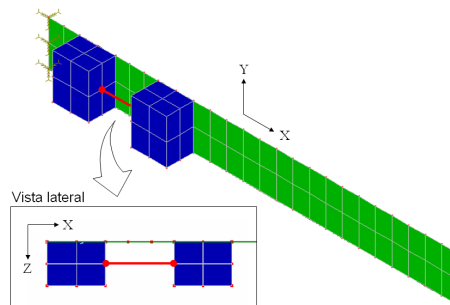
Como se indica en el capítulo 2 del estado del arte (apartado 2.6) las técnicas habitualmente empleadas para estabilizar un sistema de control *no-colocalizado* han sido las de retardo en el tiempo y las de pasivación. La técnica de pasivación puede presentar la dificultad de hallar una compensación adecuada para el control *no-colocalizado*, que no siempre es fácil. La otra técnica, la del retardo en el tiempo, presenta la desventaja de hallar el retardo idóneo a introducir; para ello se debe conocer la posición exacta de los polos y ceros del sistema. En este trabajo se va a introducir una manera diferente de estabilizar los sistemas de control *no-colocalizados* sin tener un buen modelo del sistema (Aizpuru y Abete, 2006). Para ello se ha empleado un sensor *casi-colocalizado* o *colocalizado* con el actuador para estabilizar el modo inestabilizado con el controlador *no-colocalizado*. El posicionamiento de dicho sensor *casi-colocalizado* se ha calculado de tal forma que las antiresonancias de la función de respuesta en fre-

cuencia entre el actuador y el sensor *casi-colocalizado* estén alrededor del modo que se inestabiliza con el control *no-colocalizado*.

Tanto en este capítulo como en el siguiente se emplean expresiones del tipo “modo estable” o “modo inestable”. En realidad un modo no es estable o inestable, sino el sistema, pero dichas expresiones se han empleado para indicar de forma abreviada que el polo de dicho modo en lazo cerrado está en el semiplano izquierdo o derecho de la variable compleja  $s$ , respectivamente.

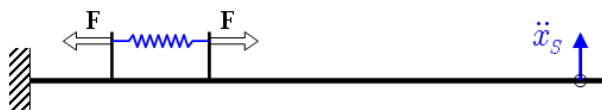
#### 4.1.1. Descripción del modelo de la viga empotrada libre con el actuador, el sensor y el sistema de control *no-colocalizado*

El modelo de viga empleado en este capítulo se ha descrito en el capítulo anterior (apartado 3.2). A dicha viga se le ha añadido el actuador cerca del empotramiento para estudiar la estabilidad de un control *no-colocalizado* cuando cerca del modo controlado existan modos con riesgo de inestabilizarse. El actuador se ha posicionado paralelamente al plano de la viga para producir momentos flectores; para ello se han empleado dos bloques de sujeción (figura 4.1). El actuador se ha simulado como un muelle de rigidez  $20 \cdot 10^6$  N/m, siendo el sensor un acelerómetro que se ha simulado idealmente y cerca del extremo libre.



**Figura 4.1:** Modelo de viga empotrada libre con un actuador

En la figura 4.2 se puede observar el esquema de la viga empotrada libre; en ella solo se ha representado la línea de simetría por estar el actuador y sensor posicionados simétricamente en el ancho de la viga. Por esto el actuador únicamente excita los modos de flexión de la viga.



**Figura 4.2:** Esquema del modelo de viga empotrada libre con un actuador

## 4.2. Estudio de la estabilidad del control *no-colocalizado*

Antes de comenzar con la técnica de estabilidad del sistema de control *no-colocalizado* desarrollada en esta tesis, primero se va a realizar un estudio del sistema de control *no-colocalizado*, viendo para ello el efecto que ejerce el control de realimentación de la aceleración de segundo orden con una configuración SISO (*Single Input Single Output*) sobre los modos no controlados.

Las ecuaciones que gobiernan el sistema son:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} - \{P_a\} [g] [\Omega_c] \{\nu\} \quad (4.1)$$

$$\{\ddot{\nu}\} + [\beta_c] \{\dot{\nu}\} + [\Omega_c] \{\nu\} = \{P_s\}^T \{\ddot{x}\} \quad (4.2)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden cambiar de coordenadas nodales a coordenadas modales realizando un cambio de base y premultiplicando por la matriz modal del sistema sin control:

$$[I_s] \{\ddot{y}\} + [\beta_s] \{\dot{y}\} + [\Omega_s] \{y\} = \{\overline{F}\} - \{\psi_a\} [g] [\Omega_c] \{\nu\} \quad (4.3)$$

$$\{\ddot{\nu}\} + [\beta_c] \{\dot{\nu}\} + [\Omega_c] \{\nu\} = \{\psi_s\}^T \{\ddot{y}\} \quad (4.4)$$

siendo  $\{\overline{F}\} = [\psi] \{F\}$  el vector columna de influencia modal de la fuerza externa.

Las ecuaciones anteriores, aplicando la transformada de Laplace, se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$([I_s] s^2 + [\beta_s] s + [\Omega_s]) \{y(s)\} = \{\overline{F}(s)\} - \{\psi_a\} [g] [\Omega_c] \{\nu(s)\} \quad (4.5)$$

$$([I_c] s^2 + [\beta_c] s + [\Omega_c]) \nu(s) = \{\psi_s\}^T \{\ddot{y}(s)\} s^2 \quad (4.6)$$

La componente correspondiente a la fuerza de realimentación con un único actuador, un único sensor y un único filtro tiene el siguiente aspecto:

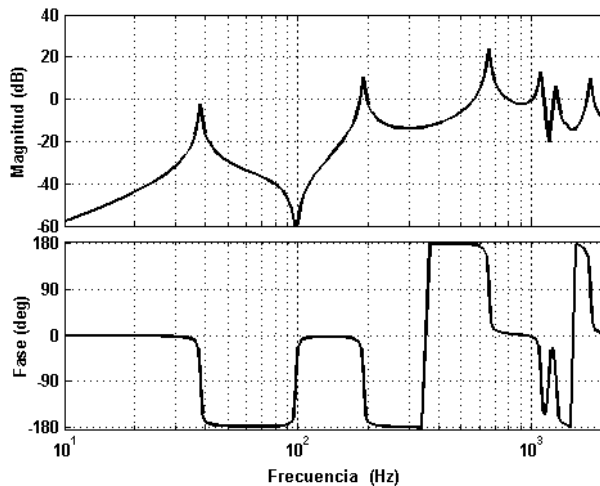
$$[G] [\Omega_c] ([I_c] s^2 + [\beta_c] s + [\Omega_c])^{-1} s^2 = \frac{g\omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \quad (4.7)$$

Sustituyéndola en la ecuación 4.5, queda:

$$\begin{aligned}
 & \left( [I_s] s^2 + [\beta_s] s + [\Omega_s] + \right. \\
 & \left. [\psi_a] [\psi_s]^T \frac{g\omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_s\omega_s s + \omega_c^2} \right) \{y(s)\} = \{\bar{F}(s)\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Es decir, un sistema de ecuaciones de orden  $n$ , siendo  $n$  el número de grados de libertad del sistema, el cual representa la respuesta del sistema en coordenadas modales.

En la figura 4.3 se ha representado la FRF entre el actuador y el sensor de la viga empotrada libre descrita en el apartado 4.1.1.



**Figura 4.3:** FRF entre el actuador y el sensor

Como el sistema es *no-colocalizado*, en el rango de frecuencia representado en la figura 4.3 no existen algunas de las antiresonancias. No obstante entre el primer y el segundo modo sí existe una antiresonancia; por tanto para ver la influencia del controlador *no-colocalizado* se decidió controlar el segundo modo viéndose así la influencia que puede tener el control en los modos de alrededor, en el que con el primer modo tiene una antiresonancia y con el tercero no. Así en el siguiente apartado se podrá observar cómo influye en el primer y tercer modos. Para ello en un primer momento el sistema se ha representado con tres modos.

#### 4.2.1. Sistema representado por tres modos

En una primera aproximación, para estudiar la estabilidad del sistema y ver la influencia que puede tener el controlador en los modos no controlados que están cerca del modo controlado, el sistema se ha representado por tres modos. En este caso las ecuaciones del sistema (4.8) de los tres primeros modos quedan de la siguiente manera:

Primer modo,

$$\left( s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2 + \frac{\psi_a^1\psi_s^1g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \right) y_1(s) + \frac{\psi_a^1\psi_s^2g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_2(s) + \frac{\psi_a^1\psi_s^3g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_3(s) = \overline{F}_1(s) \quad (4.9)$$

Segundo modo,

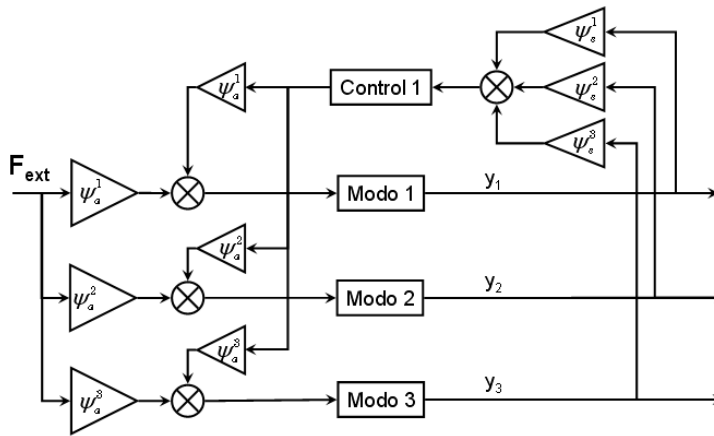
$$\left( s^2 + 2\xi_2\omega_2s + \omega_2^2 + \frac{\psi_a^2\psi_s^2g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \right) y_2(s) + \frac{\psi_a^2\psi_s^1g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_1(s) + \frac{\psi_a^2\psi_s^3g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_3(s) = \overline{F}_2(s) \quad (4.10)$$

Tercer modo,

$$\left( s^2 + 2\xi_3\omega_3s + \omega_3^2 + \frac{\psi_a^3\psi_s^3g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \right) y_3(s) + \frac{\psi_a^3\psi_s^1g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_1(s) + \frac{\psi_a^3\psi_s^2g\omega_c^2s^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} y_2(s) = \overline{F}_3(s) \quad (4.11)$$

La frecuencia del controlador en este caso se ha elegido igual a la del segundo modo, con objeto de controlarlo.

El sistema, representado en diagrama de bloques, sería el que se representa en la figura 4.4.



**Figura 4.4:** Diagrama de bloques del sistema representado mediante tres modos

Observando en las ecuaciones de equilibrio modales anteriores se pueden distinguir dos tipos de términos de fuerzas; el primero que estudiaremos serán las siguientes expresiones:

$$F_{acopl,1} = \frac{\psi_a^1 \psi_s^2 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_2 + \frac{\psi_a^1 \psi_s^3 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_3 \quad (4.12)$$

$$F_{acopl,2} = \frac{\psi_a^2 \psi_s^1 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_1 + \frac{\psi_a^2 \psi_s^3 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_3 \quad (4.13)$$

$$F_{acopl,3} = \frac{\psi_a^3 \psi_s^1 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_1 + \frac{\psi_a^3 \psi_s^2 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_2 \quad (4.14)$$

Estos tres términos de fuerzas son debido al acoplamiento modal y a la realimentación de la señal de aceleración, es decir, debido a que la señal del acelerómetro tiene información de los tres modos. Estos términos podrían considerarse como una fuerza externa que depende de la combinación de los modos, y como tal no producen ninguna inestabilidad. Pero el acoplamiento de los modos produce variaciones en el punto de funcionamiento del controlador en lazo cerrado. Este efecto hace que se pierda el punto de funcionamiento calculado de forma selectiva con la técnica del *punto de corte*.

Los otros términos que aparecen en cada modo son:

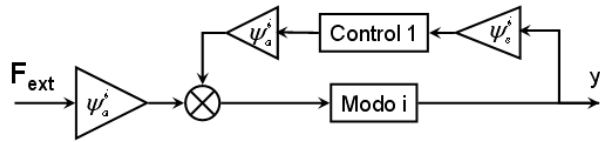
$$F_{Realim,1} = \frac{\psi_a^1 \psi_s^1 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_1 \quad (4.15)$$

$$F_{Realim,2} = \frac{\psi_a^2 \psi_s^2 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_2 \quad (4.16)$$

$$F_{Realim,3} = \frac{\psi_a^3 \psi_s^3 g \omega_c^2 s^2}{s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2} y_3 \quad (4.17)$$

Estos términos representan una realimentación de la señal de la coordenada modal. El segundo término (4.16) representa la fuerza de control, ya que en este caso es el segundo modo el que se va a controlar. En cambio el primer y el tercer término representan el efecto del controlador sobre los modos no controlados o no modelizados; estos términos son los más importantes desde el punto de vista de la inestabilidad. Si se representan el primer, segundo y tercer modos en lazo cerrado, solo teniendo en cuenta el efecto que produce el término  $F_{Realim}$ , tendríamos el diagrama de bloques de la figura 4.5 para cada modo.

Lo mismo ocurriría en el segundo modo, pero en este caso el segundo modo sería controlado con dicha fuerza, por tanto el amortiguamiento de dicho modo aumentaría y no habría problemas de inestabilización.

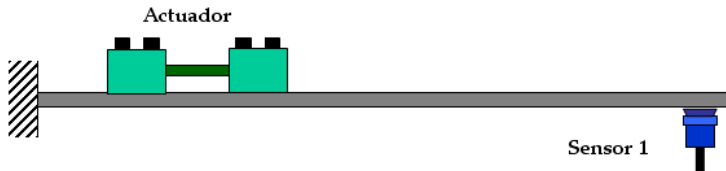


**Figura 4.5:** Diagrama de bloques de cada uno de los modos

Para analizar la estabilidad se ha controlado el sistema con dos ganancias diferentes: en una con  $g = 2$ , con lo que el sistema es estable, y en la otra con  $g = 3$ , con lo que el sistema es inestable.

#### 4.2.1.1. Control *no-colocalizado* estable

Se ha controlado el segundo modo con un control de realimentación de aceleración con un filtro de segundo orden donde se han calculado los parámetros del filtro con la técnica del *punto de corte* con una  $g = 2$ .

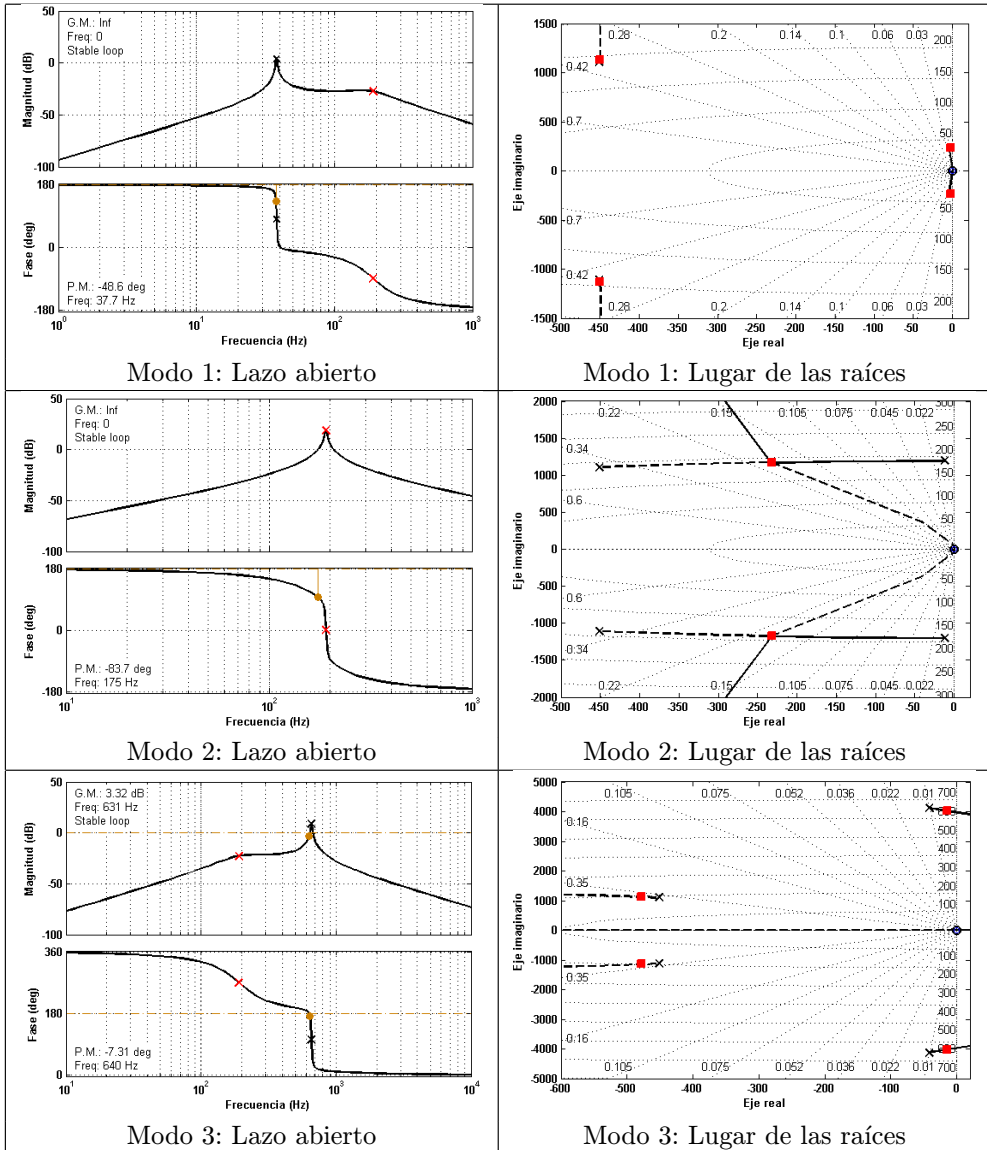


**Figura 4.6:** Viga empotrada libre con actuador y el sensor en el extremo libre

En las figuras 4.7 se pueden observar las FRF en lazo abierto y el lugar de las raíces de cada modo teniendo en cuenta únicamente la fuerza de realimentación de cada modo.

En estas gráficas se puede observar que al controlar el segundo modo el primer modo no tiene peligro de inestabilidad debido a que entre el primer y el segundo modo hay una antiresonancia: dicho de otra forma el residuo de las función es de transferencia del primer modo y del segundo modo tienen el mismo signo:  $\psi_a^1 \psi_s^1$  y  $\psi_a^2 \psi_s^2$  en este caso son ambos negativos. Por tanto, aunque se aumente la ganancia del controlador para controlar el segundo modo el primer modo no se inestabilizará, como se puede observar tanto en la gráfica de la FRF en lazo abierto como en el lugar geométrico de las raíces del primer modo.

Sin embargo en el tercer modo, a diferencia del primer modo, sí existe la posibilidad de que se inestabile si se aumenta la ganancia del controlador. Si se observa en la gráfica de la FRF en lazo abierto del tercer modo se puede observar cómo en este caso existe un margen de ganancia que no es infinito como en el caso del primer modo. En la gráfica del lugar de las raíces se puede observar que el polo del tercer modo está más cerca del eje imaginario, por lo que si se aumentase la ganancia del controlador se

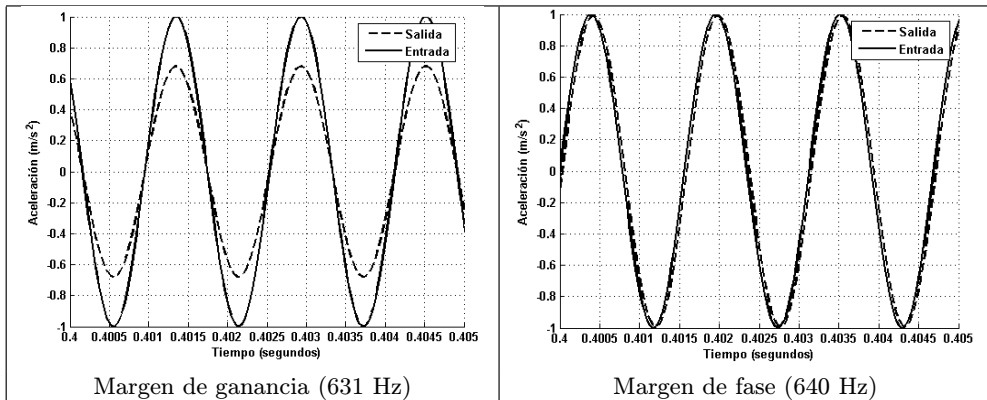


**Figura 4.7:** FRF-s en lazo abierto y lugar geométrico de las raíces de los tres primeros modos, controlando el segundo modo con  $g = 2$



podría inestabilizar. Esta posibilidad de inestabilización del sistema es debido a que el residuo del tercer modo tiene un signo contrario al del segundo modo, es decir que entre el segundo y el tercer modo no existe una antiresonancia.

En las figuras 4.8 se ha representado la respuesta en lazo abierto a una entrada sinusoidal de amplitud unidad y frecuencia igual a la de margen de fase y a la de margen de ganancia del tercer modo, respectivamente. En ellas se puede observar que, al ser el modo estable, no se amplifica la salida.



**Figura 4.8:** Respuestas en lazo abierto a una entrada sinusoidal

Con la ganancia del controlador que se ha elegido el tercer modo es estable, pero se observa que si aumentásemos la ganancia del control el tercer modo se inestabilizaría. Para mostrar esto, en el siguiente apartado se ha utilizado una ganancia en donde el tercer modo se inestabiliza.

En los polos de funcionamiento del sistema con control, en el cual el sistema se ha representado por los tres primeros modos de flexión (tabla 4.1<sup>1</sup> y figura 4.9), queda patente que al controlar el segundo modo el tercer modo está más cerca del eje imaginario, es decir su amortiguamiento relativo es menor. El amortiguamiento relativo del tercer modo ha pasado de ser 1 % sin control a 0,32 % con control, queda de manifiesto que el sistema está más cerca de inestabilizarse. En la FRF del sistema controlado (figura 4.9) también se pudo observar como el tercer modo tiene una amplitud mayor que en el caso de que el sistema no era controlado.

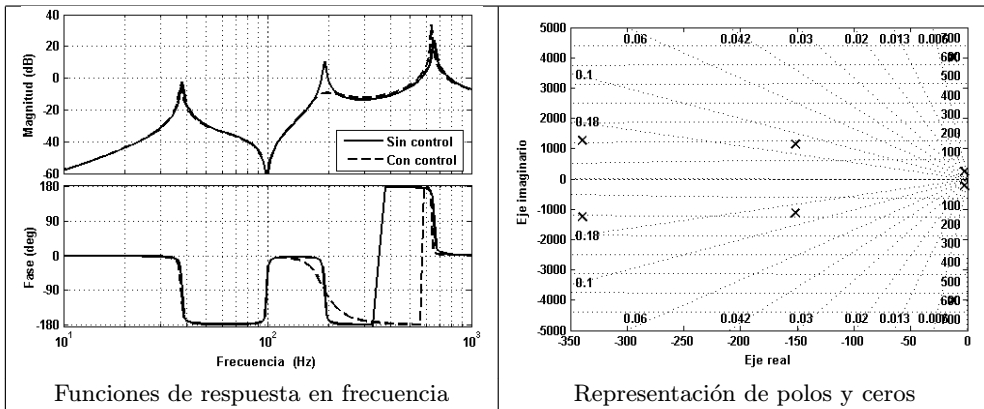
#### 4.2.1.2. Control *no-colocalizado* inestable

En este caso el segundo modo ha sido controlado con un control de realimentación de la aceleración de segundo orden con una ganancia  $g = 3$  y los parámetros del filtro en este caso también han sido calculadas con la técnica del *punto de corte*.

<sup>1</sup>Con la etiqueta "Control X" se denomina al modo adicional que aparece en el sistema por añadir el sistema de control

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Control 1	$-339 \pm 1260i$	208	26
Modo 1	$-2,88 \pm 236i$	37,5	1,22
Modo 2	$-15 \pm 1140i$	183	13,2
Modo 3	$-12,9 \pm 4020i$	639	0,32

**Tabla 4.1:** Polo de funcionamiento de los tres primeros modos de flexión y del filtro de control con control SISO



**Figura 4.9:** FRF-s y representación de los polos y ceros del sistema controlado representado por tres modos

En las gráficas de la figura 4.10 se pueden observar las FRF-s en lazo abierto y el lugar geométrico de las raíces de los tres primeros modos.

En dichas gráficas se puede observar que aunque el primer modo sea estable el tercer modo es inestable con esta ganancia. Asimismo se puede observar que en este caso el margen de ganancia es negativo y en el lugar de las raíces el polo del tercer modo está en el semiplano real, es decir el polo tiene parte real positiva.

En la figura 4.11 se han representado las respuestas a la entrada senoidal del tercer modo a la frecuencia igual a la de margen de fase y a la de margen de ganancia, respectivamente. En este caso se puede observar que, al ser el sistema inestable, la salida se amplifica.

En los polos de funcionamiento del sistema controlado (tabla 4.2 y figura 4.12), en este caso, se puede observar que el tercer polo está en el semiplano derecho, es decir el polo tiene la parte real positiva, por consecuencia el sistema es inestable.

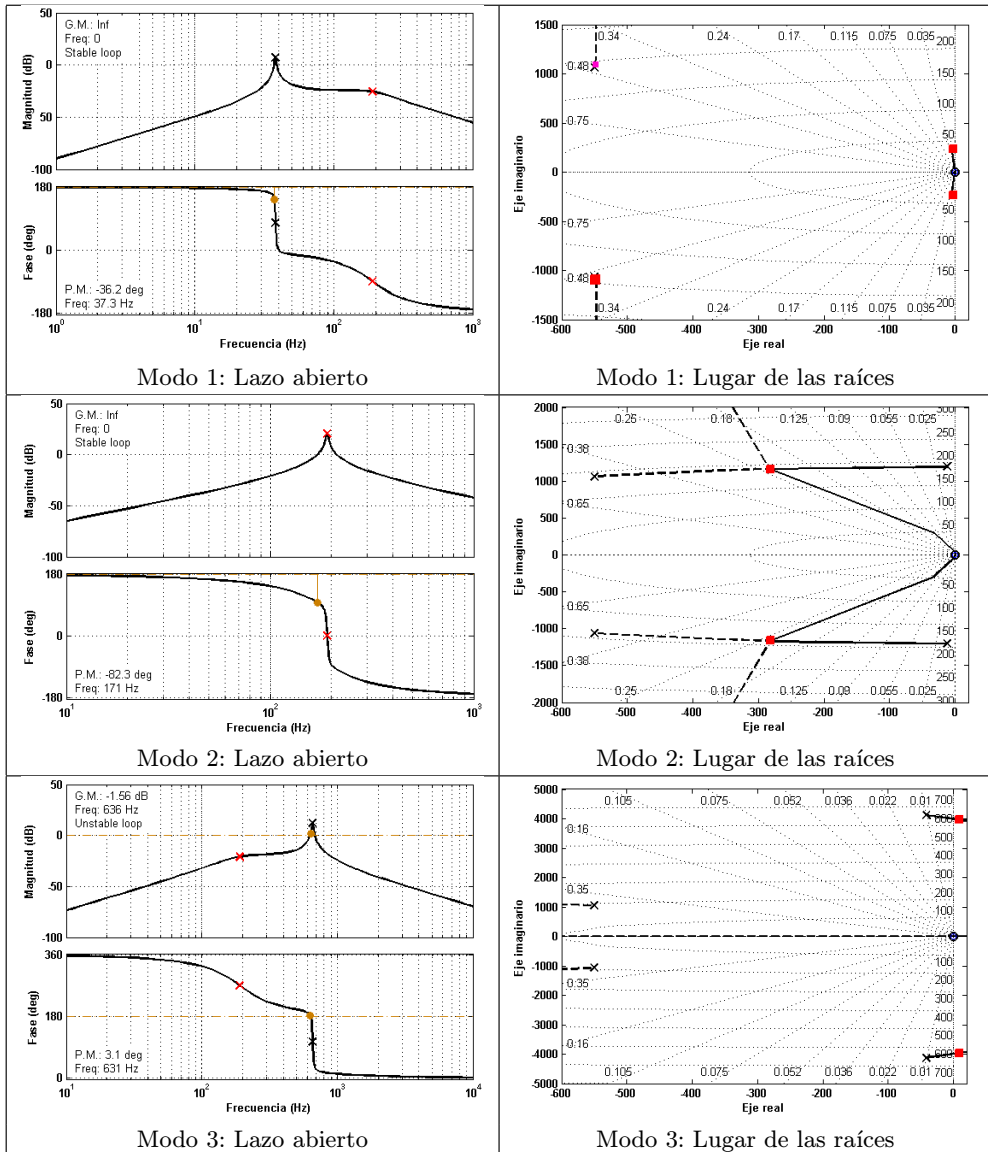


Figura 4.10: FRF-s en lazo abierto y lugar geométrico de las raíces de los tres primeros modos, controlando el segundo modo con  $g = 3$

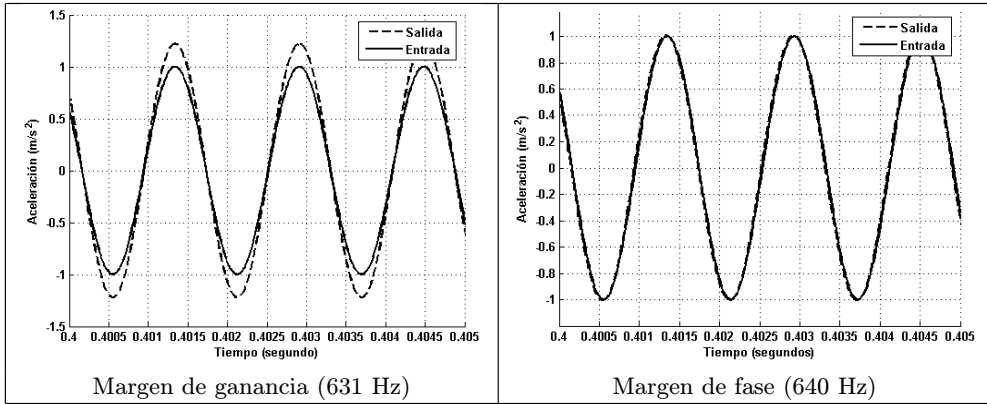


Figura 4.11: Respuestas en lazo abierto a una entrada sinusoidal

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Control 1	$-441 \pm 1270i$	215	32,7
Modo 1	$-3,26 \pm 234i$	37,3	1,39
Modo 2	$-173 \pm 1120i$	180	15,2
Modo 3	$11,6 \pm 3460i$	631	-0,29

Tabla 4.2: Polo de funcionamiento de los tres primeros modos de flexión y del filtro de control con control *SISO*

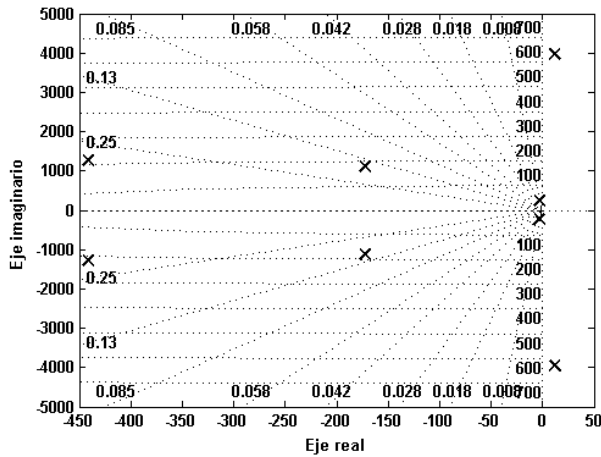


Figura 4.12: Representación de los polos y ceros del sistema controlado

### 4.2.2. Limitación del control modal *no-colocalizado* con un actuador y un sensor

Las limitación que se presenta en el sistema de control *no-colocalizado* de realimentación de la aceleración con un filtro de segundo orden es la posibilidad de inestabilizar los modos no controlados que estén cerca del modo controlado. Los modos que pueden ser inestabilizados por el control son los modos que tienen el signo del residuo contrario al del modo que se ha controlado. El primer modo que inestabiliza es el del signo contrario que más cerca esté de la frecuencia del filtro.

La influencia a inestabilizar los modos no controlados en sistemas *no-colocalizados* que ejercen los filtros de segundo orden, es en los modos cercanos al modo controlado que tengan el residuo de signo contrario. En el siguiente apartado se va a presentar una metodología para poder estabilizar los modos que puede inestabilizar el control *no-colocalizado*.

## 4.3. Estabilidad del sistema controlado

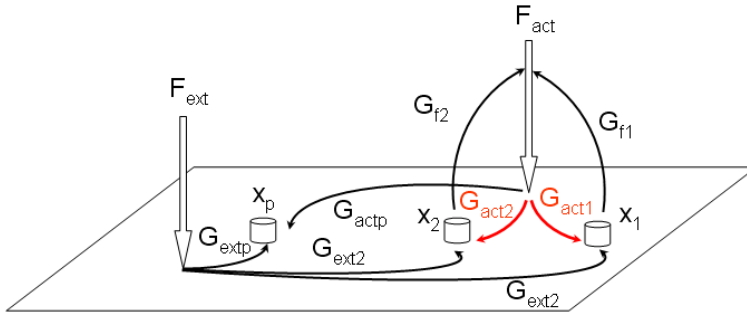
Para obtener un sistema de control *no-colocalizado* estable se han estudiado dos métodos, ambos consistentes en añadir sensores adicionales para controlar el modo inestabilizado por el control *no-colocalizado*:

- **Método de sensor *casi-colocalizado*.** Se emplea un sensor de tal forma que la función de respuesta en frecuencia cerca del modo inestabilizado mediante el control *no-colocalizado* tenga antiresonancias. El control empleado ha sido de realimentación de la aceleración de segundo orden.
- **Método de sensor *colocalizado*.** Para controlar el modo inestabilizado por el control *no-colocalizado* se ha empleado la resta de dos sensores puntuales situados en los bloques de unión del actuador. En un primer caso el control empleado ha sido de realimentación de la aceleración de segundo orden, y en el segundo caso de primer orden.

Para realizar el estudio de estabilidad del sistema controlado con dos sensores diferentes, uno para el control *no-colocalizado* y otro (*casi-colocalizado* o *colocalizado*) para estabilizar el modo que inestabiliza el control *no-colocalizado*, se considera la configuración genérica que se observa en la figura 4.13.

La respuesta en un punto cualquiera  $x_p$  del sistema se puede obtener por superposición en función de las dos fuerzas que actúan,  $F_{ext}$  la fuerza exterior y  $F_{act}$  la fuerza de control.  $x_1$  y  $x_2$  son los puntos donde se encuentran los dos sensores del sistema de control. Así pues:

$$x_p = G_{ext,p}F_{ext} + G_{act,p}F_{act} \quad (4.18)$$



**Figura 4.13:** Representación de un sistema de control con un actuador y dos sensores

La fuerza del actuador se puede expresar en función de los sensores mediante la siguiente combinación lineal:

$$F_{act} = G_{f1}x_1 + G_{f2}x_2 \quad (4.19)$$

siendo,  $G_{f1}$  y  $G_{f2}$  filtros de control, y  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= G_{act1}F_{act} + G_{ext1}F_{ext} \\ x_2 &= G_{act2}F_{act} + G_{ext2}F_{ext} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 4.23

$$F_{act} = G_{f1} (G_{act1}F_{act} + G_{ext1}F_{ext}) + G_{f2} (G_{act2}F_{act} + G_{ext2}F_{ext}) \quad (4.21)$$

Operando y despejando  $F_{act}$ ,

$$F_{act} = \frac{(G_{f1}G_{ext1} + G_{f2}G_{ext2})}{1 - (G_{f1}G_{act1} + G_{f2}G_{act2})} F_{ext} \quad (4.22)$$

Sustituyendo en la ecuación 4.18 y operando, la función de transferencia entre un punto cualquiera y la fuerza de excitación queda:

$$H_{x_p, f_{ext}} = \frac{x_p}{F_{ext}} = \frac{\left( G_{extp} + \sum_{i=1}^2 G_{f,i} (G_{act1}G_{exti} - G_{extp}G_{acti}) \right)}{1 - \sum_{i=1}^2 G_{f,i}G_{acti}} \quad (4.23)$$

Una condición suficiente para la estabilidad del sistema en lazo cerrado es que los polos de la función de transferencia entre  $x_p$  y  $f_{ext}$  tengan la parte real negativa

para cualquier punto del sistema y para cualquier punto de excitación. Los polos de la función de transferencia son las raíces del denominador de la expresión 4.27.

$$0 = \text{den}(H_{xp, fext})$$

$$\text{den} \left( G_{extp} + \sum_{i=1}^2 G_{fi} (G_{f1} G_{ext1} - G_{extp} G_{acti}) \right) \text{num} \left( 1 - \sum_{i=1}^2 G_{fi} G_{acti} \right) \quad (4.24)$$

Puesto que la expresión anterior es independiente de la posición de la fuerza de excitación y del punto de medición, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\text{den}(G_{extp}) \text{num} \left( 1 - \sum_{i=1}^2 G_{fi} F_{acti} \right) = 0 \quad (4.25)$$

El punto de medición  $p$  podría ser cualquiera de los dos puntos de los sensores de control. Finalmente la ecuación queda:

$$\text{den} \left\{ \prod_{i=1}^2 \text{den}(G_{fi} G_{acti}) - \sum_{i=1}^2 \left[ \text{num}(G_{fi} G_{acti}) \prod_{j \neq i} \text{den}(G_{fi} G_{actj}) \right] \right\} = 0 \quad (4.26)$$

La estabilidad del sistema en lazo cerrado queda determinada por las raíces de la ecuación anterior.

Para estudiar el efecto de los dos filtros de control sobre los modos, la respuesta modal, suponiendo dominada por  $n$  modos, se ha expresado separadamente para los modos controlados y para los no controlados:

Modos controlados,

$$\left( s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2 + \psi_a^k \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^k g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} \right) y_k(s) +$$

$$+ \psi_a^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^i g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_i(s) = \overline{F}_k(s) \quad ; \quad k = c, c+1 \quad (4.27)$$

Modos no controlados,

$$\left( s^2 + 2\xi_j\omega_j s + \omega_j^2 + \psi_a^j \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^j g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f}\omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} \right) y_j(s) + \psi_a^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^i g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f}\omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_i(s) = \bar{F}_j(s) \quad ; \quad (4.28)$$

$$j = 1, \dots, n \quad ; \quad j \neq c, c+1$$

El diagrama de bloques del sistema representado por  $n$  modos puede verse representado en la figura 4.14 y de cada modo 4.15.

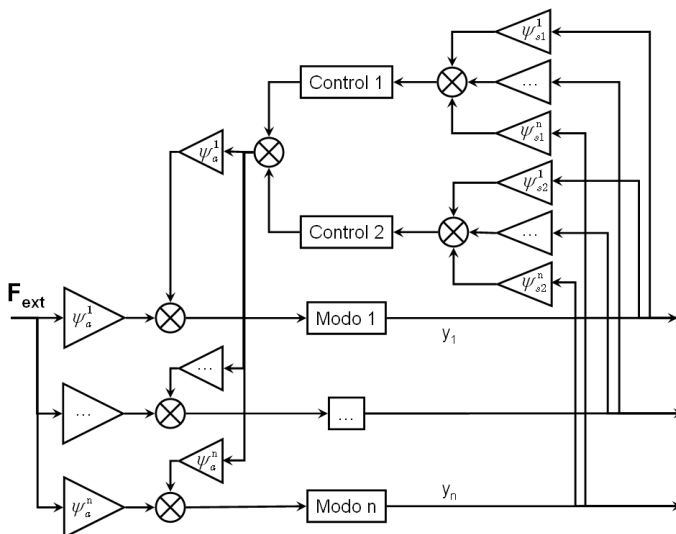


Figura 4.14: Diagrama de bloques del sistema representado mediante  $n$  modos

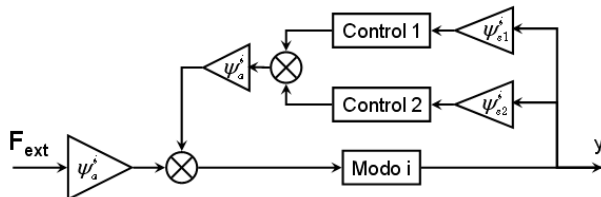


Figura 4.15: Diagrama de bloques de cada uno de los modos con dos controles

El sumando final en cada una de las expresiones anteriores corresponde a los términos por acoplamiento de los modos:



Para el modo controlado,  $k$ ,

$$F_{feedback,k} = \psi_a^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^i g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_i(s) \quad (4.29)$$

Para el modo no controlado,  $j$ ,

$$F_{feedback,j} = \psi_a^j \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^j g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_j(s) \quad (4.30)$$

Los términos de las expresiones 4.27 y 4.28 que pueden presentar inestabilidad en el sistema de control sobre cada uno de los modos son, respectivamente:

Modo controlado  $k$ ,

$$F_{ncont,k} = \psi_a^k \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^k g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_k(s) \quad (4.31)$$

Modo no controlado  $j$ ,

$$F_{ncont,j} = \psi_a^j \sum_{f=1}^2 \frac{\psi_{s,f}^j g_f \omega_{c,f}^2 s^2}{s^2 + 2\xi_{c,f} \omega_{c,f} s + \omega_{c,f}^2} y_j(s) \quad (4.32)$$

Si el modo  $c$  es controlado con el sensor *no-colocalizado* ( $s=1$ ), el término  $\psi_a^c \psi_{s,1}^c g_1$  es positivo y si el modo  $c+1$  es controlado con el segundo sensor *casi-colocalizado* o *colocalizado* ( $s=2$ ), el término  $\psi_a^{c+1} \psi_{s,2}^{c+1} g_2$  es también positivo. No obstante, el efecto del control *no-colocalizado* en el modo  $c+1$  es perjudicial desde el punto de vista de la estabilidad porque el signo del término  $\psi_a^{c+1} \psi_{s,1}^{c+1} g_1$  es negativo. Por otra parte, para no mermar el efecto del control *no-colocalizado* sobre el modo  $c$ , con el sensor *casi-colocalizado* y *colocalizado* el término  $\psi_a^c \psi_{s,2}^c g_2$  debe ser positivo.

Desde el punto de vista de la estabilidad es bueno que la mayoría de los términos en los modos *no controlados* ( $\psi_a^j \psi_{s,2}^j g_2$ ) por el control *casi-colocalizado* o *colocalizado* sean positivos. Esto se consigue siempre que el sensor adicional que se emplee para controlar el modo inestabilizado tenga muchas antiresonancias cerca del modo que tiene que controlar.

Con los términos 4.31 y 4.32 se ha estudiado la estabilidad de la viga empotrada libre, la cual ha sido controlada con un actuador y dos sensores: uno *no-colocalizado* y el otro en un caso *casi-colocalizado* y en el otro *colocalizado*.

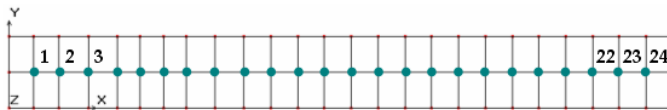
### 4.3.1. Método del sensor *casi-colocalizado*

En el caso de añadir un sensor *casi-colocalizado* para estabilizar los modos desestabilizados con el control *no-colocalizado*, el segundo sensor se ha elegido de tal forma que la función de respuesta en frecuencia tenga antiresonancias cerca del modo que se desea estabilizar; esto para evitar que el filtro de dicho sensor, con la ganancia elegida, inestabilice algún modo cercano al que se controla con dicho sensor. Así pues, en este caso se ha controlado el segundo modo con un sensor *no-colocalizado*, y el tercer modo, que ha sido inestabilizado por el control *no-colocalizado*, se ha estabilizado con un sensor en la configuración *de casi-colocalizado*, empleándose para ello dos filtros de control con un único sensor cada uno.

El posicionamiento del sensor *casi-colocalizado* se ha seleccionado de tal forma que la función de respuesta en frecuencia entre el actuador y el sensor tenga antiresonancias cerca del modo que se tiene que controlar, en este caso el tercero, tal y como se detalla en el siguiente subapartado.

#### 4.3.1.1. Posicionamiento óptimo del sensor *casi-colocalizado*

El posicionamiento del sensor *casi-colocalizado* se ha elegido en función de las antiresonancias que se encuentran alrededor del modo que se desea controlar. En la figura 4.16 se pueden observar las posiciones posibles que se han elegido para el sensor, donde el 1 está cerca del empotramiento y el 25 en el extremo libre de la viga. En este caso en el modelo también se han incluido el actuador y los dos bloques para unir dicho actuador con la viga.



**Figura 4.16:** Posiciones posibles del sensor *casi-colocalizado*

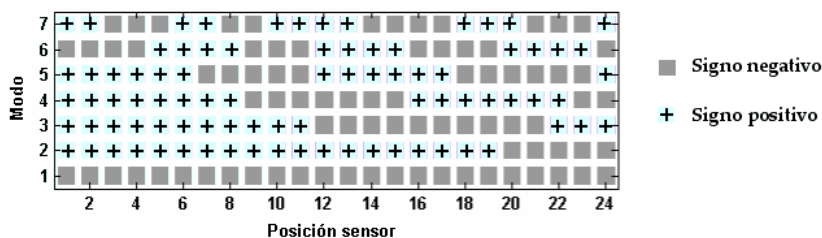
Con estas posibles posiciones se ha calculado para cada modo el residuo de la función de transferencia de cada posición del sensor con respecto al actuador. Para esto la respuesta del sistema se ha calculado con siete modos.

En la siguiente expresión se puede observar la función de transferencia entre el sensor y el actuador en función de la posición del sensor:

$$G_j(s) = \sum_{k=1}^7 \frac{\psi_a^k \psi_{s,j}^k}{s^2 + 2\xi_{n,k} \omega_{n,k} s + \omega_{n,k}^2} \quad (4.33)$$

En la figura 4.17 se ha representado el signo del residuo en función del modo y de la posición del sensor, según la expresión 4.34. En ella el gris representa el signo negativo del residuo y el morado el signo positivo.

$$R_{j,k} = \psi_a^k \psi_{s,j}^k \quad (4.34)$$



**Figura 4.17:** Signo del residuo en función de la posición del sensor y del modo

Para una misma posición del sensor, cuando el signo del residuo se mantiene constante quiere decir que después de cada pico de resonancia hay una antiresonancia en la función de respuesta en frecuencia entre el actuador y dicho sensor. Para la posición 1 del sensor se puede observar que el residuo del primer modo y del segundo tienen signo contrario, así que en la función de respuesta en frecuencia del actuador y dicho sensor no habrá una antiresonancia entre el primer modo y el segundo. Se puede observar también que hasta la posición 8 del sensor el tercer modo siempre tiene una antiresonancia antes y después. Por tanto cualquiera de éstas hasta la posición 8 se podría utilizar en principio para estabilizar el tercer modo. Aunque el problema que presentan los dos últimos (el 7 y el 8) es que si se aumentase mucho la ganancia del control *casi-colocalizado* del tercer modo llegaría a inestabilizar el quinto modo. En cambio, entre la posición 1 y 5 el cambio de signo está más lejos y en estos casos el riesgo de inestabilidad sería menor que en las posiciones 7 y 8. Sin embargo, como se puede observar la mejor posición para el sensor *casi-colocalizado* es la posición 6, que está en la mitad del actuador, pues en este caso no hay ningún cambio de signo del residuo desde el segundo modo hasta el séptimo.

En dicha figura se puede observar que en las posiciones que se han elegido no existe ninguna en la que el signo se mantenga constante para todos los modos que se han empleado.

Así pues, para estabilizar el tercer modo que ha sido inestabilizado con el sensor *no-colocalizado* (ver apdo. 4.2), el sensor *casi-colocalizado* se ha posicionado en la posición 6, puesto que en dicha posición la función de respuesta en frecuencia es la que más antiresonancias tiene y por tanto desde el punto de vista de la estabilidad es el más idóneo.

#### 4.3.1.2. Control *no-colocalizado* del segundo modo y control *casi-colocalizado* del tercer modo

El sensor *casi-colocalizado* (Sensor 2) ha sido posicionado en la viga empotrada libre en la mitad del actuador (figura 4.18).

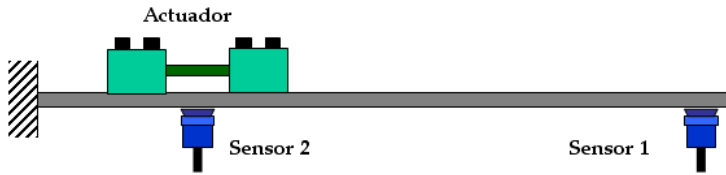


Figura 4.18: Viga empotrada libre con un actuador y dos sensores

La FRF entre el actuador y dicho sensor *casi-colocalizado* puede verse en la figura 4.19. En ésta se observa que, excepto entre el primero y el segundo, entre el resto de los modos siempre hay una antiresonancia.

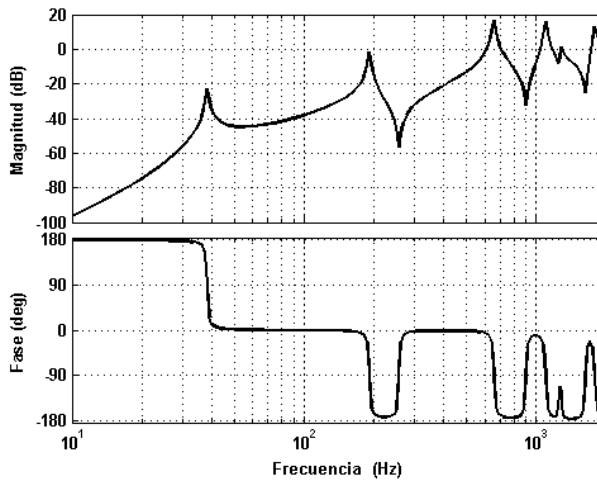
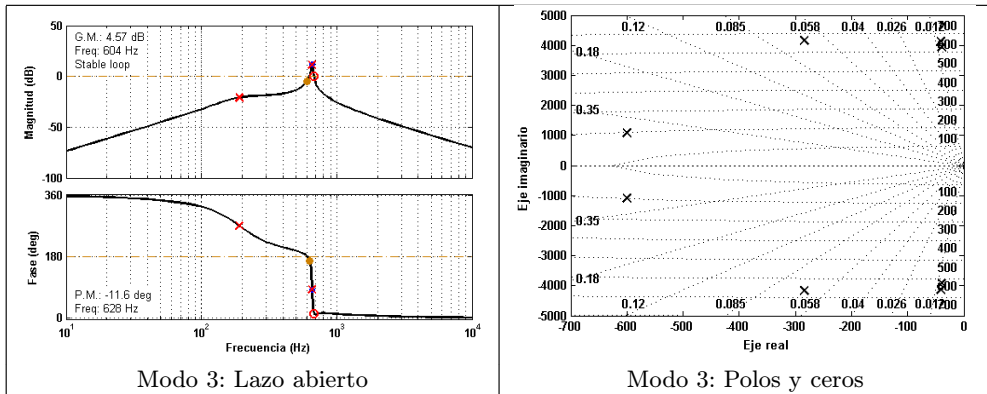


Figura 4.19: FRF entre el actuador y el sensor *casi-colocalizado*

La ganancia del controlador *casi-colocalizado* se ha elegido de tal forma que se obtenga el mismo amortiguamiento del tercer modo que en el sistema sin control; así pues, para conseguir el mismo amortiguamiento del modo antes de que se controlara el segundo modo se ha elegido para la ganancia del control del tercer modo un valor de  $g = 0,03$ , consiguiéndose así que el amortiguamiento del tercer modo sea de 1% (figura 4.20 y tabla 4.3).

A continuación se realiza un estudio de la estabilidad del control SIMO (un actuador y dos sensores) con el control del segundo modo con el sensor *no-colocalizado* ( $g_1 = 3$ ) y con el control del tercer modo con el sensor *casi-colocalizado* ( $g_2 = 0,03$ ) (figura 4.18). Para ello en la figura 4.20 se ha representado la respuesta en lazo abierto del tercer modo con los dos filtros (a la izquierda) y el lugar de los polos de funcionamiento en lazo cerrado (a la derecha). En ellas se puede observar que el tercer modo en este caso es estable a diferencia del caso en el que no había control del tercer modo con el sensor *no-colocalizado* con ganancia  $g_1 = 3$  (figura 4.10).



**Figura 4.20:** FRF en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer modo; controlando el segundo modo con  $g = 3$  y el tercero con  $g = 0,03$

En tabla 4.3 se ha indicado el polo del tercer modo, el cual puede verse que está en el semiplano izquierdo; es decir que controlando el tercer modo con el sensor *casi-colocalizado* el modo es estable, al contrario que en el caso de que no se utilizara este segundo sensor (figura 4.10 Modo 3: lugar de las raíces).

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Modo 3	$-39,6 \pm 3930i$	625	1,01

**Tabla 4.3:** Polo de funcionamiento del tercer modo con control SIMO

De las representaciones de la FRF en lazo abierto y el lugar de los polos de los primeros cuatro modos de flexión (figura 4.20 y figura 4.21) queda de manifiesto que todos los modos son estables (primer, segundo y cuarto modo tienen una margen de ganancia infinito, debido a que el producto del residuo del modo y la ganancia del filtro de control es positivo) con los filtros que se han elegido y que los modos no controlados tienen el amortiguamiento relativo cercano al 1%, tal y como sucedía en el caso de que la viga no estuviera controlada.

Por último, en la figura 4.22 se han representado la FRF de la viga empotrada libre entre el actuador y el sensor *no-colocalizado* ( $\ddot{x}_1/F$ ) tanto del sistema con control como sin control; además se han enumerado los polos de funcionamiento del sistema controlado en la tabla 4.4.

Nótese que en el sexto modo el amortiguamiento relativo se ha reducido. La razón de dicha reducción es el control del segundo modo, ya que el signo del residuo del sexto modo es contrario al del segundo modo. Si se aumentase la ganancia del controlador del segundo modo y controlásemos el tercer modo con el sensor *casi-colocalizado* podría llegarse, en algunos casos, a inestabilizarse el sexto modo. Aunque no en este caso en concreto, puesto que el control del tercer modo con el sensor *casi-colocalizado* arrastra al polo hacia el semiplano derecho, evitando su inestabilidad. Es decir, en este

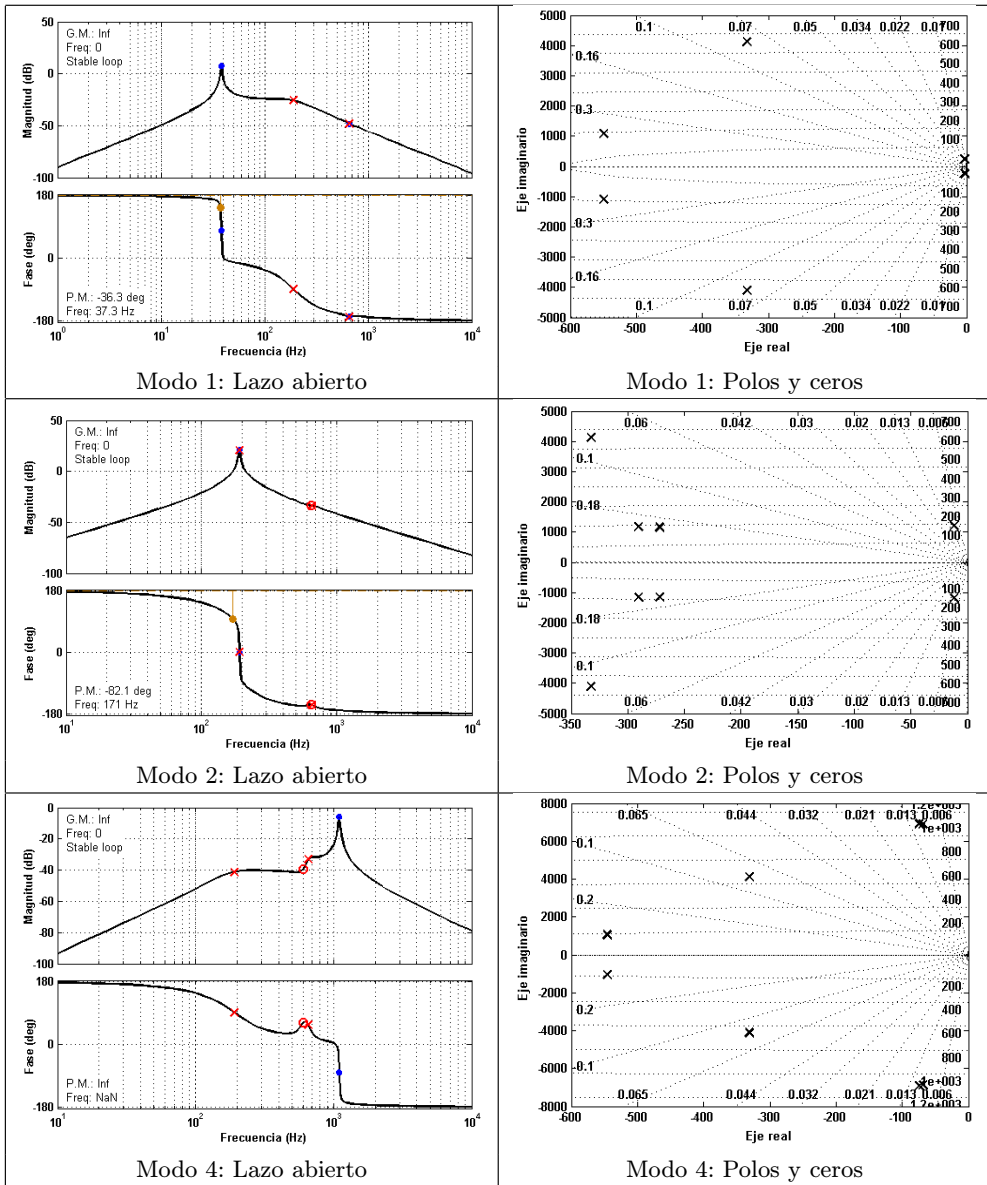
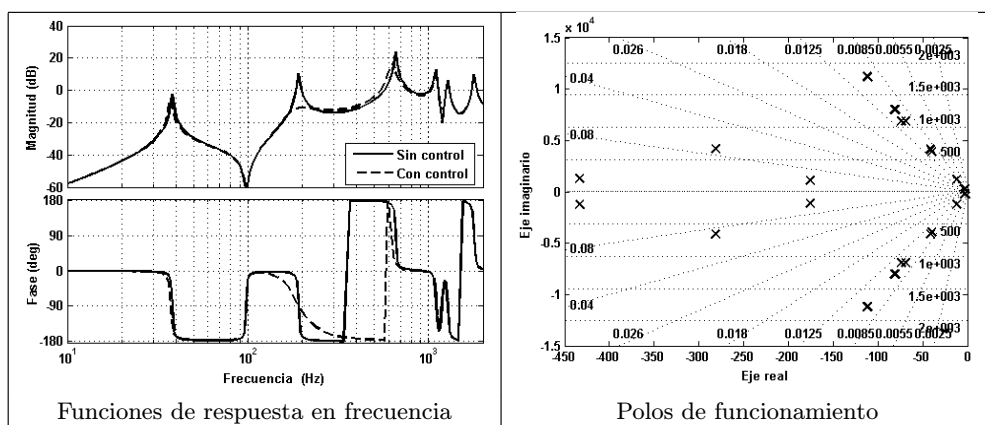


Figura 4.21: FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con  $g = 3$  y el tercero con  $g = 0,03$

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Control 1	$-433 \pm 1270i$	214	32,3
Control 2	$-282 \pm 4150i$	662	6,78
Modo 1	$-3,27 \pm 234i$	37,3	1,39
Modo 2	$-175 \pm 1120i$	181	15,5
Modo 3	$-40,1 \pm 3930i$	625	1,02
Modo 4	$-74 \pm 6920i$	1100	1,07
Modo 5	$-81,7 \pm 8010i$	1280	1,02
Modo 6	$-111 \pm 11200i$	1780	0,99

**Tabla 4.4:** Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO

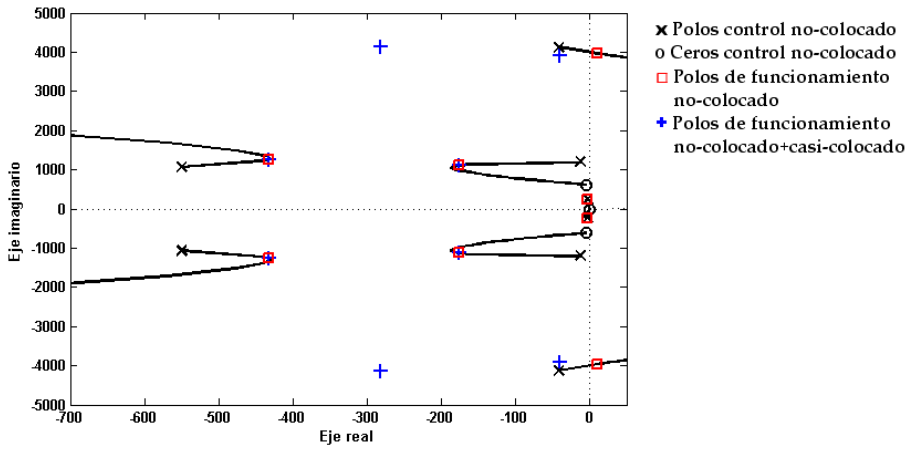


**Figura 4.22:** FRF-s y representación de los polos y ceros de la viga con control SIMO

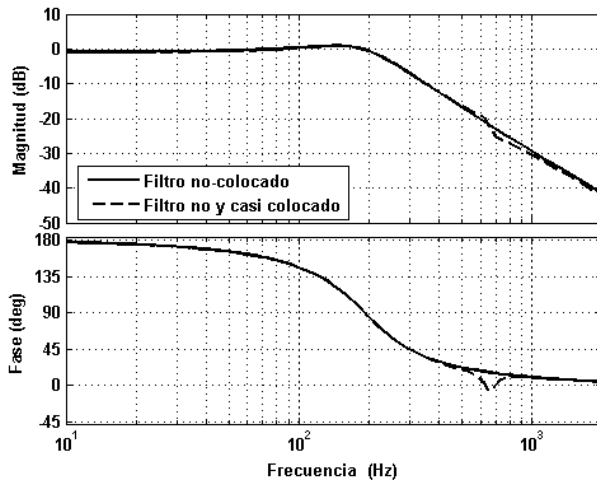
caso influiría más el filtro del tercer modo y no se inestabilizaría el modo. Por tanto se observa que es muy importante la posición del segundo sensor *casi-colocalizado* para que ayude a no inestabilizar los modos que puede inestabilizar el control *no-colocalizado*.

En la figura 4.23 se ha representado el lugar geométrico de las raíces del control *no-colocalizado*. En ella se puede observar que el tercer modo es inestable, al estar el polo en el semiplano derecho. También se han representado los polos de funcionamiento del control con dos sensores, con el *no-colocalizado* para control del segundo modo y el *casi-colocalizado* con el control del tercer modo. En estos polos de funcionamiento se puede observar que el tercer modo en este caso es estable, y tiene un amortiguamiento relativo cercano al modo no controlado, aunque ha variado un poco la frecuencia del modo controlado con los dos sensores; en cambio los demás polos están en el mismo sitio que con el sensor *no-colocalizado*.

La figura 4.24 muestra los filtros del control *no-colocalizado* y de los dos sensores sobre el tercer modo: uno es el *no-colocalizado* y el otro la suma de los filtros



**Figura 4.23:** Lugar geométrico de las raíces del control *no-colocalizado*, y polos de funcionamiento del control *no-colocalizado* y del *no-colocalizado* + el *casi-colocalizado*



**Figura 4.24:** FRF-s de los filtros de control sobre el tercer modo en el caso de *no-colocalizado* y en el caso de *no-colocalizado* + *casi-colocalizado*



*no-colocalizado* y *casi-colocalizado* ( $\psi_a^3 \psi_{s,1}^3 H_{f1}$  y  $\psi_a^3 \psi_{s,1}^3 \psi_{f1} + \psi_a^3 \psi_{s,2}^3 H_{f2}$ , respectivamente). El filtro del *no-colocalizado* tiene una pendiente de -40 dB a partir de la frecuencia del filtro,  $\omega_{c1}$ , y su amortiguamiento es bastante alto. La fase del filtro cambia despacio debido al amortiguamiento del filtro; y así, en la frecuencia del tercer modo la fase del filtro no es nula y además el signo del término  $\psi_a^3 \psi_{s,1}^3 g_1$  es negativo. Por todas estas circunstancias el tercer modo con el control *no-colocalizado* es inestable.

La suma de los dos filtros ( $\psi_a^3 \psi_{s,1}^3 H_{f1} + \psi_a^3 \psi_{s,2}^3 H_{f2}$ ) fuera de la tercera frecuencia coincide con el filtro del control *no-colocalizado*, pero en las cercanías del tercer modo la fase de la suma de los dos filtros se reduce debido al filtro del control *casi-colocalizado*. Este cambio es el motivo por el que se asegura la estabilidad del sistema al añadir un segundo sensor *casi-colocalizado* para controlar el tercer modo.

#### 4.3.1.3. Ventajas y desventajas del sensor *casi-colocalizado*

Para estabilizar los modos que inestabiliza el control *no-colocalizado* la mejor forma es la utilización de un sensor colocalizado con el actuador. No obstante, en muchos casos reales puede ser que no sea posible la obtención de una configuración colocada. En los casos que se utilice un sensor *casi-colocalizado* la posición de éste se seleccionará de tal forma que cerca de la frecuencia del modo que se desea controlar con este sensor exista la mayor cantidad posible de antiresonancias entre el actuador y el sensor *casi-colocalizado*. El objetivo de estas antiresonancias es que el segundo sensor no inestabilice ningún otro modo.

En este apartado se ha realizado un control del segundo modo de flexión con una configuración no colocada. Este estudio limita la ganancia del controlador ya que puede producir la inestabilidad de algún modo no controlado. Es por esto que se ha analizado una nueva estrategia para estabilizar el modo inestabilizado teniendo en cuenta otro sensor en configuración *casi-colocalizado* con el actuador. En la figura 4.25 se muestran las FRF-s tanto de la configuración de *no-colocalizado* como de *casi-colocalizado* entre el actuador y los dos sensores. En el caso del sensor *casi-colocalizado* se puede observar que cerca del tercer modo, el cual se desea controlar, existen antiresonancias.

En el caso del control *casi-colocalizado* del tercer modo con una ganancia de valor  $g = 0,03$  la figura 4.26 muestra la FRF entre el actuador y el sensor *casi-colocalizado* con control y sin control. En este caso el pico de la FRF se reduce en la frecuencia del tercer modo, pero a diferencia del *no-colocalizado* existe menos riesgo de inestabilizar los modos no controlados. La razón de utilizar un sensor *casi-colocalizado* para estabilizar los modos inestabilizados es que este tipo de controladores tiene un riesgo menor de desestabilizar los modos no controlados.

Estudiando la estabilidad de dicho controlador mediante el lugar geométrico de las raíces (figura 4.27) puede observarse que no hay posibilidad alguna de inestabilizar ningún modo que no se controle con dicho filtro, debido a que todos los modos tienden a moverse hacia el semiplano de la izquierda.

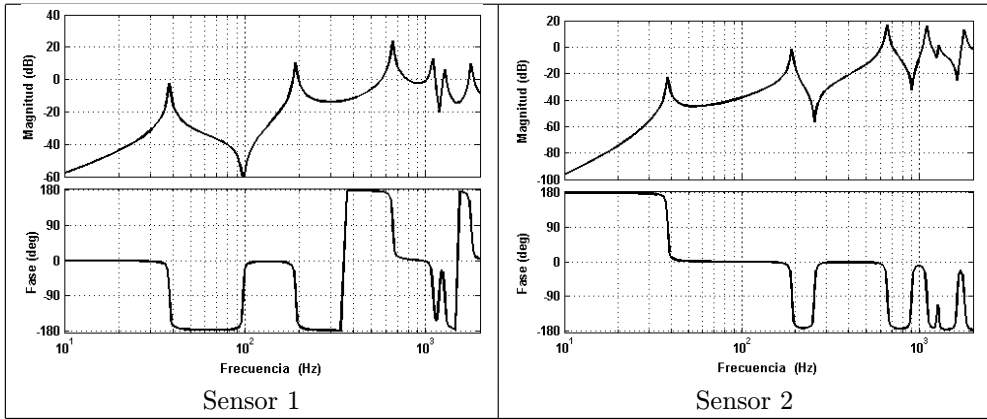


Figura 4.25: FRF-s del actuador y de los dos sensores

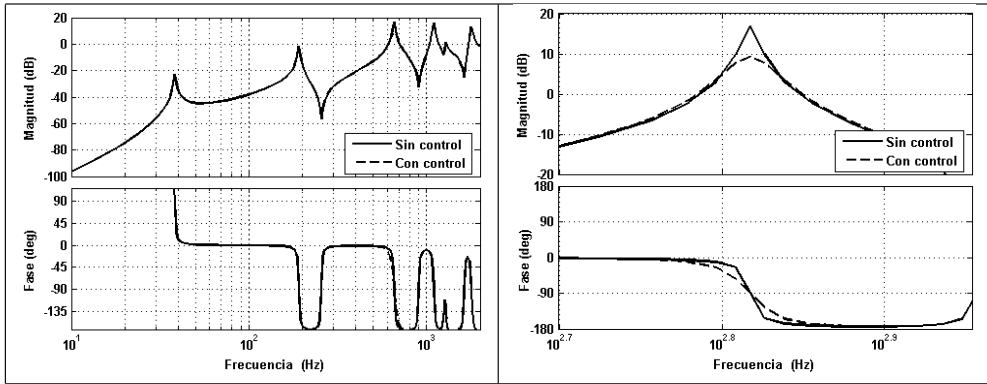


Figura 4.26: FRF del sistema *casi-colocalizado*

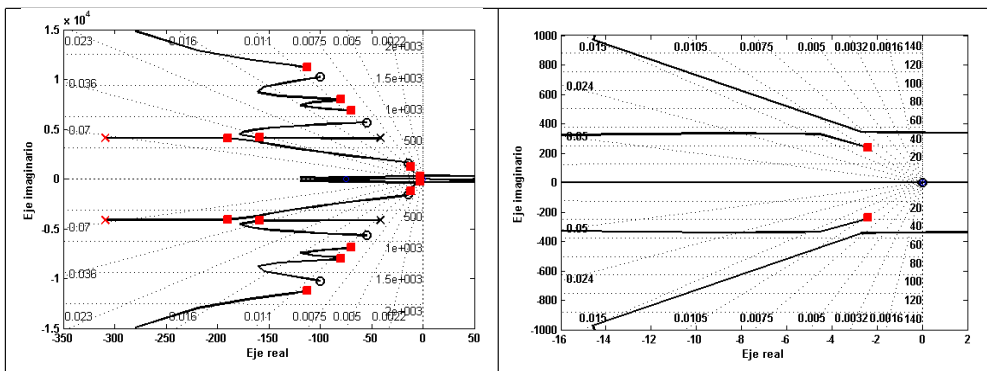


Figura 4.27: Lugar geométrico de las raíces del sistema *casi-colocalizado*

### 4.3.2. Método del sensor *colocalizado*

La segunda técnica de estabilización de modos inestabilizados por el control *no-colocalizado* consiste en emplear una señal del sensor *colocalizado* con el actuador, de tal forma que la función de respuesta en frecuencia entre dicha señal del sensor y el actuador tenga alternancias de picos de resonancia y antiresonancias. Para ello se han empleado dos acelerómetros posicionados en los bloques de tal forma que midan la aceleración en la dirección longitudinal del actuador, tal y como se puede observar en la figura 4.28.

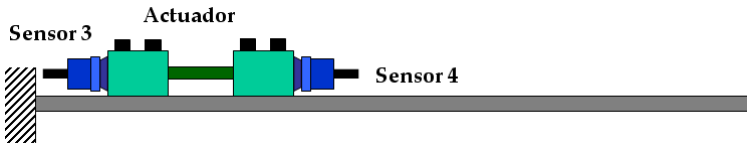


Figura 4.28: Actuador piezoeléctrico y sensor *colocalizado*

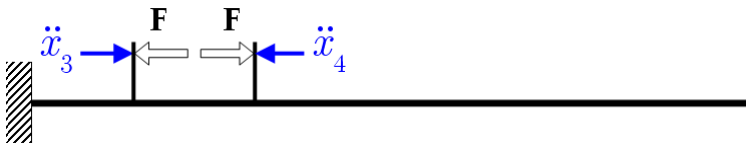


Figura 4.29: Esquema de actuador piezoeléctrico y sensor *colocalizado*

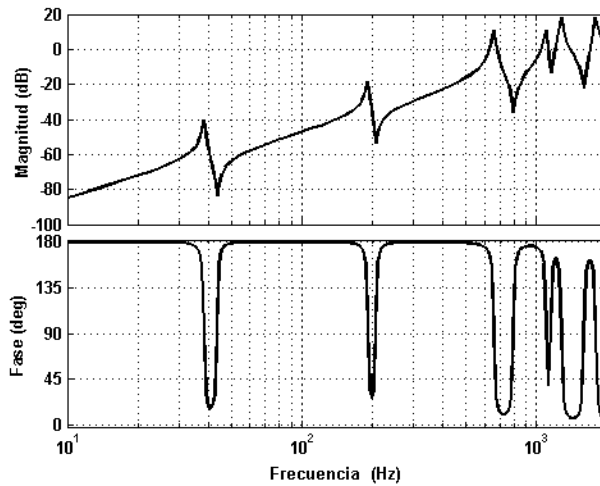
En la figura 4.29 se ha representado un esquema del modelo del sensor *colocalizado* con el actuador. Para el control *colocalizado* la señal del sensor utilizada ha sido la resta de las dos señales de los acelerómetros.

$$H_{col}(s) = \frac{\ddot{x}_3 + \ddot{x}_4}{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_a^i (\psi_{s,3}^i + \psi_{s,4}^i) s^2}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_a^i \psi_{s,c}^i s^2}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (4.35)$$

donde,  $\psi_{s,c}^i = \psi_{s,3}^i + \psi_{s,4}^i$ .

En la figura 4.30 se ha representado la FRF de la resta de los dos acelerómetros con respecto al actuador (expresión 4.35); en ella se puede observar que tras un pico de resonancia la FRF siempre tiene una antiresonancia.

Al ser siempre estable el control *colocalizado* de realimentación de la aceleración, no hay ningún riesgo de que este control inestabilice ningún modo no controlado. Por tanto, en un primer caso el filtro de control que se va a emplear va a ser de segundo orden, y en un segundo caso de primer orden. De esta segunda forma el ajuste de los parámetros del filtro no es tan susceptible como en el caso de segundo orden. Por otra parte en los casos en los que los picos de resonancia estén muy cerca unos de otros el ajuste de parámetros de segundo orden es más difícil y en ellos es más fácil utilizar el

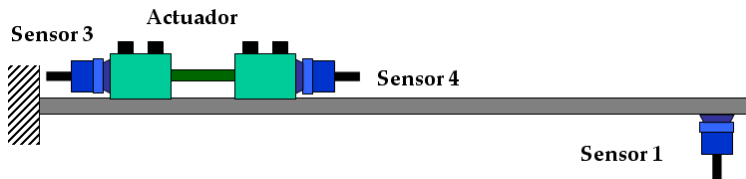


**Figura 4.30:** FRF de la resta de los dos acelerómetros con respecto al actuador

filtro de primer orden. Aunque en este caso los picos de resonancia no se encuentran muy cerca, se va realizar el control con los dos filtros, en un primer momento con el de segundo orden y posteriormente con el de primer orden.

#### 4.3.2.1. Control *no-colocalizado* del segundo modo y control *colocalizado* del tercer modo con un filtro de segundo orden

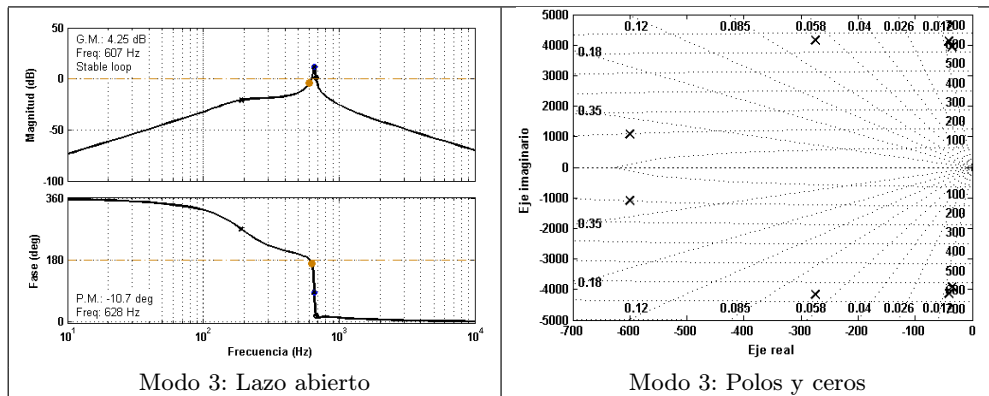
Con la configuración del sensor *colocalizado* se ha controlado el tercer modo que ha sido inestabilizado por el control *no-colocalizado*. En la figura 4.31 se pueden observar los acelerómetros que se han empleado tanto para el control *no-colocalizado* del segundo modo (“Sensor 1”) como para el control *colocalizado* del tercer modo (la resta de los dos sensores “Sensor 3 - Sensor 2”).



**Figura 4.31:** Actuador piezoeléctrico y sensores *no-colocalizado* y *colocalizado*

En este caso el segundo modo también se ha controlado con el sensor *no-colocalizado* con una ganancia de valor  $g = 3$ . En el tercer modo, con el sensor *colocalizado*, la ganancia que se ha seleccionado ha sido con el objetivo de conseguir un amortiguamiento relativo del tercer modo igual al que tenía sin control, es decir de 1%, lo cual se logra con una ganancia del filtro de segundo orden de valor  $g = 0,065$ .

A continuación se realiza un estudio de la estabilidad del control SIMO; para ello en la figura 4.32 se ha representado a la izquierda la respuesta en lazo abierto del tercer modo con los dos filtros y a la derecha el lugar de los polos de funcionamiento en lazo cerrado. En ellas se puede observar que en este caso el tercer modo, con el sensor *casi-colocalizado*, es estable, a diferencia del caso en el que no había control de dicho modo (figura 4.10). En la tabla 4.5 se ha indicado el polo del tercer modo; en ella se puede observar que el amortiguamiento de dicho modo es cercano a 1%, que era el valor que tenía antes de realizar el control del segundo modo con el sensor *no-colocalizado*.



**Figura 4.32:** FRF en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer modo, controlando el segundo modo con  $g = 3$  y el tercero con  $g = 0,065$

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Modo 3	$-40,1 \pm 3920i$	625	1,02

**Tabla 4.5:** Polo de funcionamiento del tercer modo con control SIMO (*colocalizado*)

En las representaciones de las funciones de respuesta en frecuencia en lazo abierto y el lugar de los polos de los primeros cuatro modos de flexión (figura 4.32 y figura 4.33) queda de manifiesto que todos los modos son estables con los filtros que se han elegido.

En la figura 4.34 se han representado las FRF-s de la viga empotrada libre entre el actuador y el sensor *no-colocalizado* ( $\ddot{x}_1/F$ ) tanto del sistema con control como sin control; además se han enumerado los polos de funcionamiento del sistema controlado en la tabla 4.6.

Nótese que en el caso del sensor *colocalizado* con el doble de ganancia al del caso *casi-colocalizado* se ha obtenido el mismo amortiguamiento relativo del tercer modo. Sin embargo en el caso del sensor *colocalizado*, aunque se emplee una mayor ganancia, no hay ningún riesgo de que se inestabilice ningún modo no controlado.

En la figura 4.35 se ha representado el lugar geométrico de las raíces del control

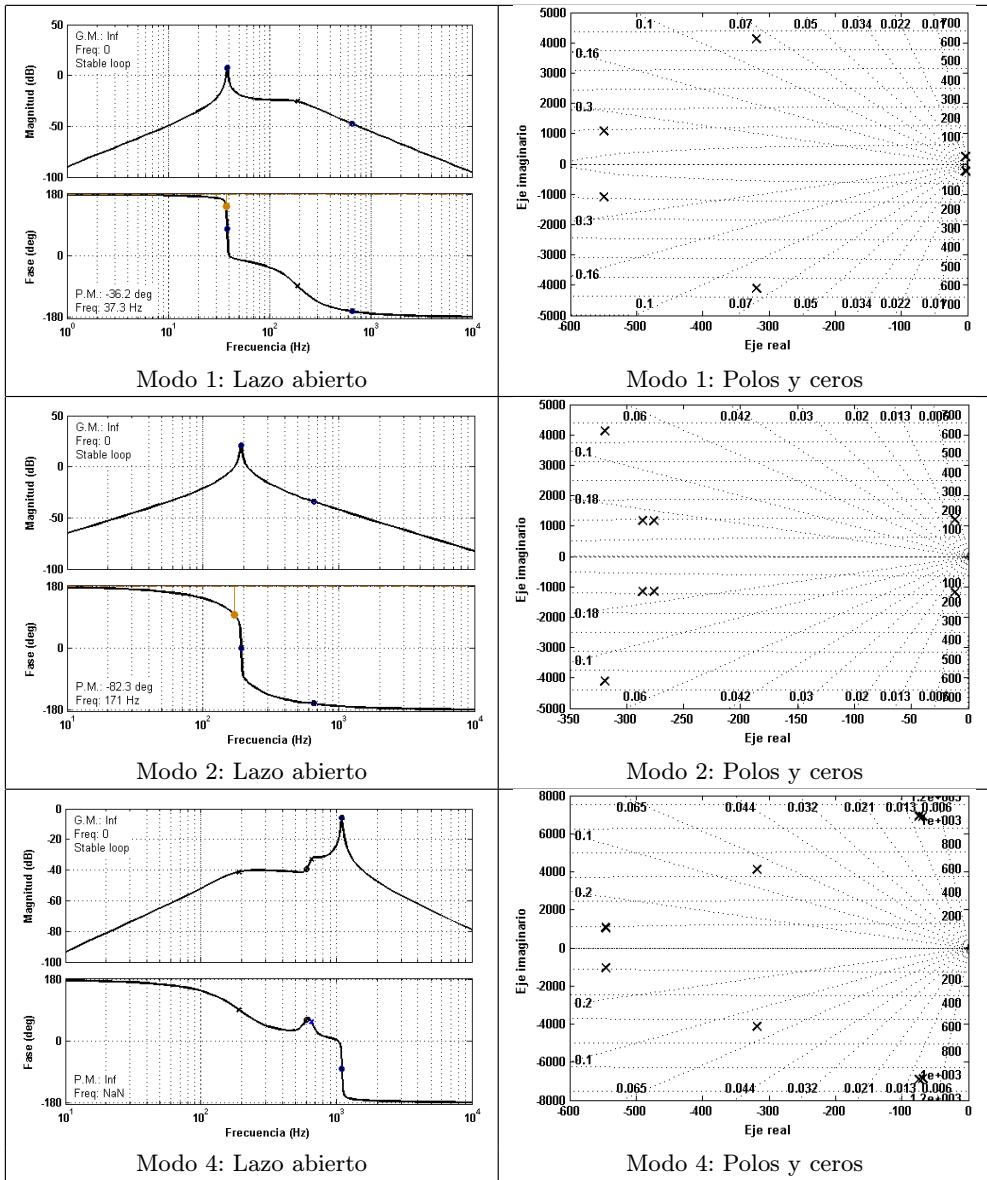
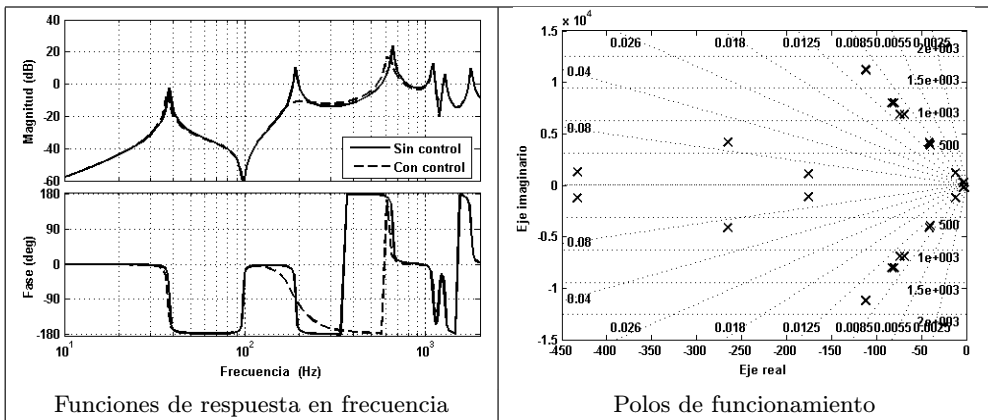


Figura 4.33: FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con  $g = 3$  y el tercero con  $g = 0,065$

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Control 1	$-433 \pm 1270i$	214	32,3
Control 2	$-266 \pm 4150i$	661	6,39
Modo 1	$-3,26 \pm 234i$	37,3	1,39
Modo 2	$-176 \pm 1120i$	181	15,5
Modo 3	$-40,1 \pm 3920i$	625	1,02
Modo 4	$-73,8 \pm 6920i$	1100	1,07
Modo 5	$-83,1 \pm 8030i$	1280	1,03
Modo 6	$-112 \pm 11200i$	1780	0,995

**Tabla 4.6:** Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO (*colocalizado*)



**Figura 4.34:** FRF-s y representación de los polos y ceros de la viga con control SIMO

*no-colocalizado*; en ella se puede observar que el tercer modo es inestable, al estar el polo en el semiplano derecho. También se han representado (figura 4.35) los polos de funcionamiento del control con dos sensores, con el *no-colocalizado* para control del segundo modo y el *colocalizado* con el control del tercer modo. En estos polos de funcionamiento se ve que en este caso el tercer modo es estable y tiene un amortiguamiento relativo cercano al modo no controlado aunque ha variado un poco la frecuencia del modo controlado con los dos sensores; en cambio los demás polos están en el mismo sitio que con el sensor *no-colocalizado*, lo mismo que ocurría con el sensor *casi-colocalizado*.

En la figura 4.36 se ha representado el filtro de control sobre el tercer modo, empleando solo un sensor *no-colocalizado* y también con la combinación de los dos filtros (*no-colocalizado* y *colocalizado*). El filtro de control del caso de dos sensores solo ha variado en las cercanías de la frecuencia del tercer modo, en el que se ha producido una reducción en la fase, lo mismo que ocurría en el caso del sensor *casi-colocalizado* (figura 4.24).

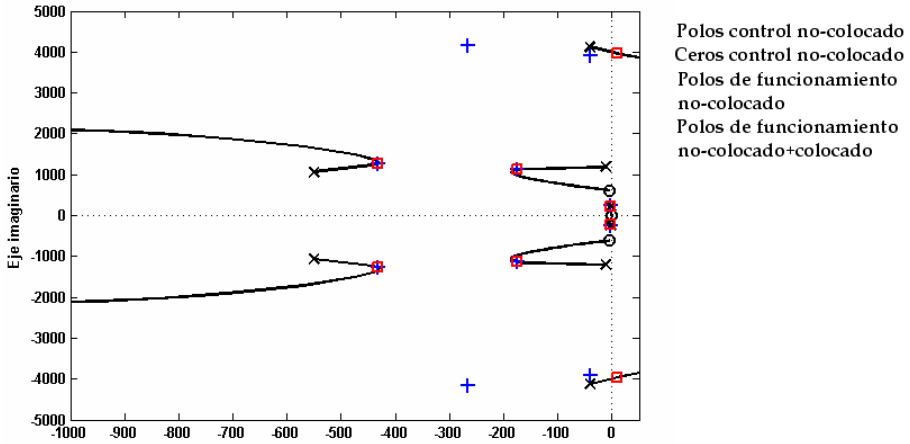


Figura 4.35: Lugar geométrico de las raíces del control *colocalizado*

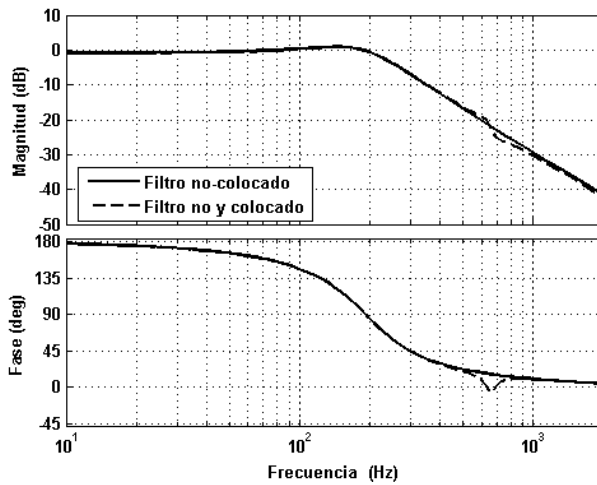


Figura 4.36: FRF-s de los filtros de control sobre el tercer modo en el caso de *no-colocalizado* y en el caso de *no-colocalizado + colocalizado*



#### 4.3.2.2. Control *no-colocalizado* del segundo modo y control *colocalizado* del tercer modo con un filtro de primer orden

En este apartado se describe la técnica de la utilización de un sensor *colocalizado* con el actuador para estabilizar los modos que puede inestabilizar el control *no-colocalizado*. No obstante a diferencia del caso anterior el filtro de control que se va a emplear es de primer orden, por la ventaja que presenta de cara a los ajustes de los parámetros.

El control que se ha utilizado en este caso para estabilizar los modos no controlados ha sido un filtro de primer orden con la frecuencia de corte igual a la del segundo modo, el cual se controla con el sensor *no-colocalizado*. La representación de dicho filtro se puede ver en la expresión 4.36 y en la figura 4.37. En este caso, como en los anteriores, la ganancia del filtro del tercer modo se ha elegido de tal forma que en el lazo cerrado del control SIMO el amortiguamiento del tercer modo sea igual a 1 %.

$$G_c(s) = \frac{g\omega_c}{s + \omega_c} \quad (4.36)$$

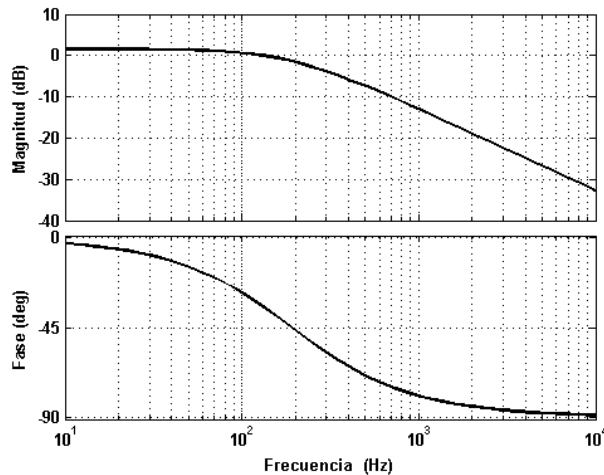


Figura 4.37: FRF del filtro de control de primer orden

En un primer momento solo se ha controlado el tercer modo con el control *colocalizado* y con una ganancia de valor  $g = 1,2$ . En la parte izquierda de la figura 4.38 se representan las FRF con control y sin control, pudiéndose observar una reducción de amortiguamiento a partir del segundo modo. En la figura de la derecha se ha representado el lugar geométrico de las raíces, en el cual se ve que todos los ceros están en el lado izquierdo y por tanto el sistema no tiene riesgo de inestabilizarse aunque se aumente la ganancia del controlador.

Con control SIMO del segundo ( $g = 3$ ) y tercer ( $g = 1,2$ ) modos, en las figuras 4.39 y 4.41 se han representado las FRF-s en lazo abierto y el lugar de los polos y ceros de los cuatro primeros modos de flexión en coordenadas modales (según la figura

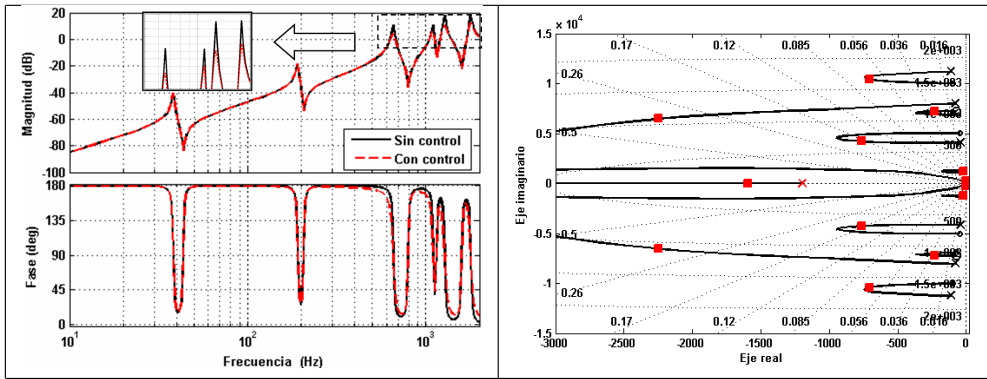


Figura 4.38: FRF-s y lugar de las raíces del control *colocalizado*

4.15 para cada modo).

En la figura 4.39 se representa, en lazo abierto, la FRF y el lugar de los polos de funcionamiento del tercer modo. En ella puede verse que el tercer modo es estable y el amortiguamiento del modo es cercano al que tenía inicialmente sin control. También se observa cómo el control con el sensor *colocalizado* con el filtro de primer orden introduce un polo en el eje real.

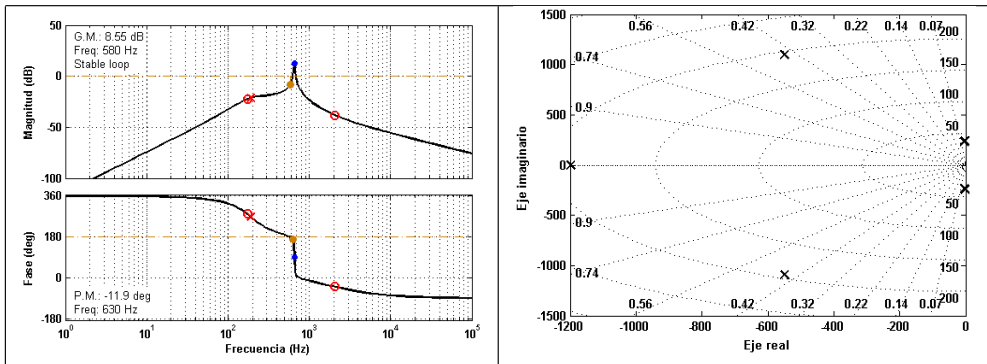
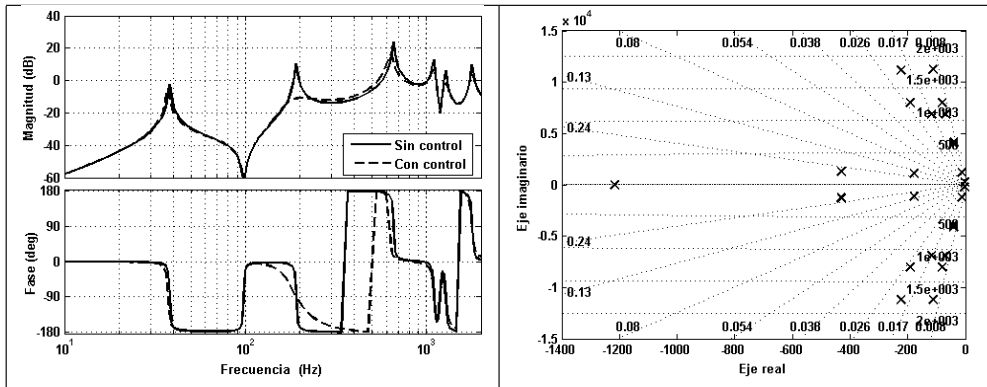


Figura 4.39: FRF en lazo abierto y representación de polos y ceros del tercer modo

En las figuras 4.41 se han representado las FRF-s y el lugar de los polos de funcionamiento del primer, segundo y cuarto modos. En ellas se puede ver que todos los modos son estables y que con el filtro de primer orden los modos a partir del segundo modo se amortiguan debido al control *colocalizado*.

Por último, en la FRF de la viga con control y sin control (la figura 4.40 de la derecha ) se aprecia cómo ha habido una reducción en el pico de resonancia del segundo modo, pero también en el del tercer, cuarto, quinto y sexto modos ha habido una reducción de amortiguamiento.



**Figura 4.40:** FRF-s del sistema controlado y representación de polos y ceros del sistema controlado

En la figura 4.40 se ha representado la FRF y los polos de funcionamiento del sistema controlado (tabla 4.7) representado por seis modos de flexión. En este caso todos los modos tienen un amortiguamiento relativo mayor que 1 %, que era el valor inicial sin control que tenían todos los modos.

El polo de funcionamiento del controlador *colocalizado* es de 1220 sobre el eje real negativo. Además, el amortiguamiento relativo del segundo modo sin el segundo sensor, sólo con el control *no-colocalizado*, era de 15,2 %, mientras que con los dos sensores es de 15,7 %. Por tanto se puede observar que el hecho de que se haya añadido otro sensor no ha hecho que el modo tenga menos amortiguamiento sino que aumente ligeramente.

	Polo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
Control 1	$-431 \pm 1280i$	214	32
Control 2	-1220	194	100
Modo 1	$-3,27 \pm 234i$	37.3	1,4
Modo 2	$-178 \pm 1120i$	180	15,7
Modo 3	$-42,1 \pm 3950i$	628	1,07
Modo 4	$-117 \pm 6910i$	1100	1,69
Modo 5	$-192 \pm 7990i$	1270	2,41
Modo 6	$-224 \pm 11200i$	1780	2

**Tabla 4.7:** Polo de funcionamiento de los seis primeros modos de flexión con control SIMO

En la figura 4.42 se ha representado el lugar geométrico de las raíces del control *no-colocalizado*; en ella se puede observar que el tercer modo es inestable, al estar el polo en el semiplano derecho. También se han representado los polos de funcionamiento del control con dos sensores, con el *no-colocalizado* para control del segundo modo y el *colocalizado* con el control del tercer modo con el filtro de primer orden. En estos

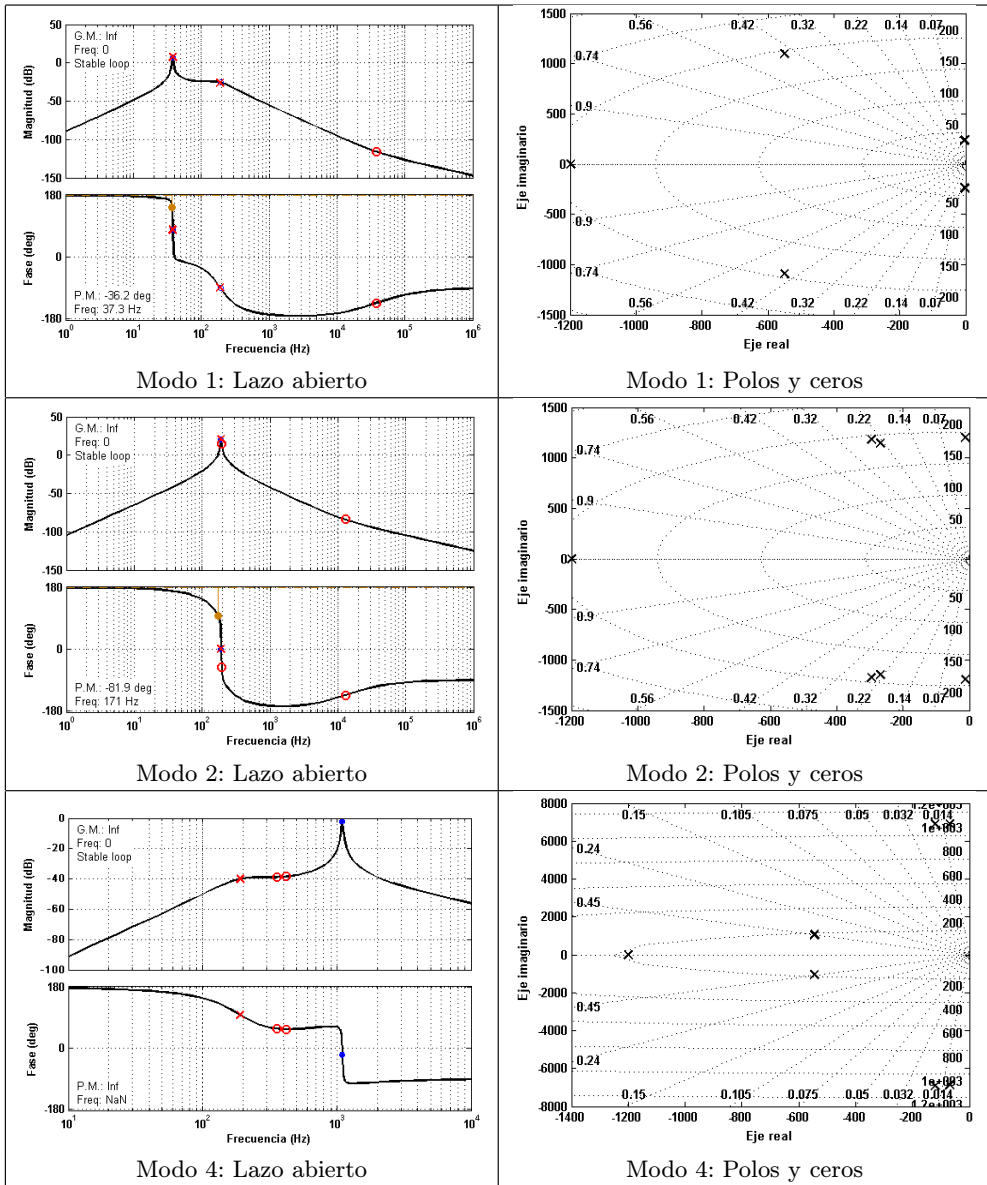


Figura 4.41: FRF-s en lazo abierto y representación de los polos y ceros del primer, tercer y cuarto modos, controlando el segundo modo con  $g = 3$  y el tercero con  $g = 1,2$

polos de funcionamiento se puede observar que el tercer modo es estable, y que tiene un amortiguamiento relativo cercano al modo no controlado aunque ha variado un poco la frecuencia del modo controlado con los dos sensores, en cambio los demás polos están en el mismo sitio que con el sensor *no-colocalizado*, lo mismo que ocurría en los casos anteriores.

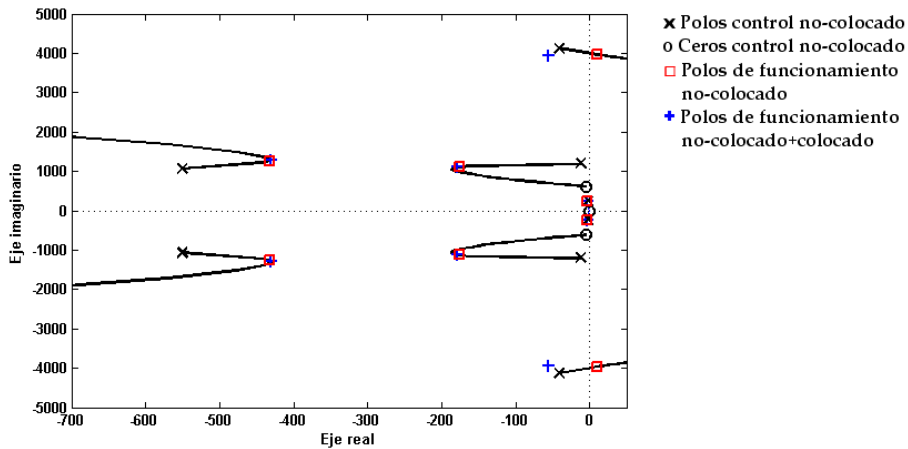


Figura 4.42: Lugar geométrico de las raíces del control *no-colocalizado*

#### 4.3.2.3. Ventajas y desventajas del sensor *colocalizado*

La ventaja que presenta el sensor *colocalizado* frente al *casi-colocalizado* es que no tiene riesgo alguno de inestabilizar ningún modo que no se haya controlado, aunque en el caso del sensor *colocalizado* se necesite una mayor ganancia para obtener el mismo amortiguamiento del modo controlado. Sin embargo en el caso de que el filtro de control que se emplee sea de segundo orden, con el control *casi-colocalizado*, el riesgo de inestabilizar los modos no controlados es muy pequeño debido a que el sensor se ha seleccionado de tal forma que tenga el mayor número de antiresonancias posibles cerca del modo controlado. En el caso que se ha controlado con los filtros de segundo orden se puede observar que tanto el sensor *casi-colocalizado* como con el *colocalizado* se pueden emplear para el control del tercer modo sin que exista mucha diferencia en los polos del lazo cerrado. Por tanto en los casos que sea difícil obtener un sensor *colocalizado* se puede emplear un sensor *casi-colocalizado* para estabilizar los modos inestabilizados por un control *no-colocalizado*.

Por otra parte la ventaja que presentan los filtros de primer orden en el caso de que el control sea *colocalizado* es que el ajuste de parámetros es más sencillo, muy beneficioso en los casos en que los modos del sistema estén muy cercanos unos de otros (cosa que no se presenta en el ejemplo que se ha estudiado). Otra de las características del filtro de primer orden es que también incrementa el amortiguamiento relativo en los modos de alto orden, pudiéndose escoger en este tipo de controles la frecuencia

de corte a partir del modo que se desee estabilizar. La desventaja que presenta este control es que en muchos casos reales pueden existir serias dificultades para tener un sensor *colocalizado* con el actuador.

## 4.4. Conclusiones

El control *colocalizado* presenta la ventaja de la estabilidad del sistema sin el riesgo de que los polos de los modos no controlados pasen al semiplano derecho de la variable compleja  $s$ , pero puede ocurrir que en algunos casos no sea fácil hallar un sensor *colocalizado* con el actuador. En estos casos se puede utilizar el control *casi-colocalizado*, es decir hallar la posición de un sensor de tal forma que, cerca del modo que se desea controlar con dicho sensor *casi-colocalizado*, tenga el mayor número posible de anti-resonancias. Éstas retrasan la inestabilidad del sistema, de manera que cuanto más lejos esté el primer modo no controlado que no tenga una antiresonancia con dicho sensor *casi-colocalizado*, mejor desde el punto de vista de la estabilidad.

El sensor *casi-colocalizado* con un filtro de segundo orden presenta la desventaja de que hay que tener cuidado en que no inestabilice algún modo no controlado; por ello es muy importante seleccionar bien la posición de dicho sensor. En cambio con el sensor *colocalizado* no hay riesgo de inestabilizar ningún otro modo no controlado por dicho control, aunque se emplee un filtro de primer o segundo orden.

A diferencia del filtro de segundo orden, el de primer orden, que se ha utilizado con el sensor *colocalizado*, con un único filtro aumenta el amortiguamiento de más de un modo. Para poder utilizar el control de primer orden se debe tener un sensor *colocalizado*, puesto que desde el punto de vista de la estabilidad los filtros de primer orden no son aconsejables para sensores *no-colocalizados* o *casi-colocalizados*, ya que en estos casos el riesgo de inestabilidad es mayor. Por esta razón con el sensor *casi-colocalizado* no se ha utilizado el control de primer orden.

# Capítulo 5

## Resultados experimentales

### 5.1. Introducción

Con los resultados expuestos en este capítulo se contrastan los resultados teóricos presentados en los capítulos 3 y 4: influencia de los parámetros del filtro de control en el modo controlado y método de estabilización de los modos inestabilizados mediante el control *no-colocalizado*. Para validar estos resultados teóricos se han empleado dos plataformas de ensayo: una viga empotrada libre y una maqueta del bastidor de una punzonadora. Con la viga empotrada libre se han realizado seis experimentos con diferentes propósitos: el primero para comprobar los resultados teóricos de la influencia de los parámetros del filtro de control, el segundo para el análisis experimental del control *no-colocalizado*, el tercero para comprobar la técnica de estabilidad del sistema controlado con un sensor *casi-colocalizado*, el cuarto con un sensor *colocalizado* mediante un filtro de segundo orden, el quinto con un sensor *colocalizado* mediante un filtro de primer orden y por último el sexto para llevar a cabo un control activo acústico estructural con el objetivo de reducir el ruido emitido. Una vez completadas las validaciones con los experimentos anteriores, con la maqueta del bastidor de la punzonadora se ha realizado directamente un experimento con el objetivo de reducir el ruido radiado por la excitación del punzón. En este caso se han utilizado tres actuadores y tres sensores; las posiciones óptimas de estos transductores se han obtenido con las técnicas descritas en el tercer capítulo de esta tesis.

El control experimental aplicado en la viga es un problema de flexión en un plano, en cambio el caso de la maqueta del bastidor es un problema de flexión en dos planos. Desde el punto de vista del control esto no representa ningún cambio respecto a la viga empotrada libre, pero sí en cambio para hallar el posicionamiento óptimo de actuadores y sensores, puesto que en el caso bidimensional del bastidor los actuadores puede tener diferentes orientaciones.

En los citados experimentos realizados en ambas plataformas de ensayo los actuadores empleados han sido piezoeléctricos de tipo pila (CEDRAT Technologies),

los sensores han sido unos acelerómetros (Brüel&Kjær) y el sistema de control se ha realizado empleando una tarjeta de dSPACE. Los resultados, tanto vibratorios como acústicos, se han medido con el sistema de adquisición de IDEAS.

Este capítulo se ha dividido en tres apartados, en el primero se explica la plataforma de ensayo de la viga empotrada libre y se muestran los resultados que se han obtenido. En un segundo apartado se describe la plataforma de ensayo del modelo reducido del bastidor de la punzonadora y también se presentan los resultados, tanto experimentales como acústicos. Por último, el capítulo termina con un apartado de conclusiones.

## 5.2. Viga empotrada libre

En este apartado se va a describir la plataforma de ensayo de la viga empotrada libre que se ha empleado para realizar los seis experimentos y así contrastar los resultados teóricos, tanto del capítulo 3 de la influencia de los parámetros del filtro de control, como del capítulo 4 del análisis del sistema de control y de la técnica de estabilidad del sistema controlado mediante sensores adicionales. Por último se ha realizado un experimento de control activo acústico estructural para reducir el ruido radiado por la viga mediante las técnicas desarrolladas a lo largo de esta tesis.

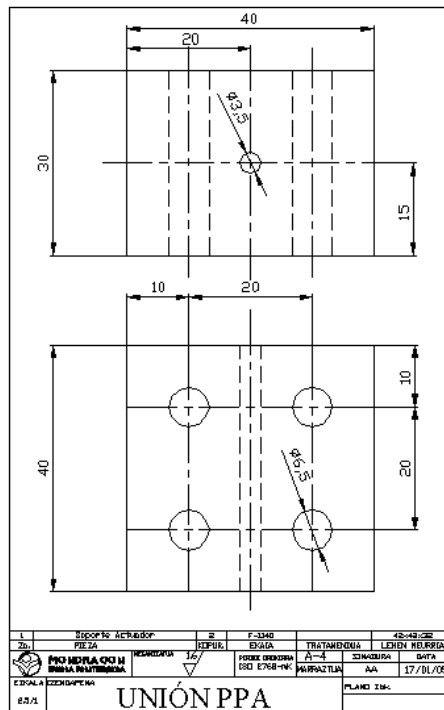
Los resultados de dichos experimentos se han valorado mediante el *rendimiento* y la estabilidad del sistema de control. El *rendimiento* se ha expresado con: la función de respuesta en frecuencia, la simulación temporal y el amortiguamiento relativo de los modos controlados. Por otra parte la estabilidad del sistema se ha representado mediante la función de respuesta en frecuencia y el amortiguamiento relativo de los modos no controlados.

### 5.2.1. Descripción de la plataforma de ensayo

El material utilizado para la viga en voladizo ha sido el acero F-1110, trefilado, de sección 50x10 mm y longitud 460 mm. El actuador se ha unido a esta viga mediante dos bloques de acero de dimensiones 40x40x30 mm, detallados en la figura 5.1. Cada uno de estos bloques se ha unido a la viga mediante cuatro tornillos de métrica M6; estos bloques están separados entre sí 48 mm, es decir una distancia igual a la longitud del actuador. A su vez el actuador se ha unido a los bloques, por medio de dos varillas roscadas en sus extremos con métrica M2.5, a una altura de 15 mm desde la superficie de la viga. Este tipo de actuador presenta la ventaja de que ya está mecánicamente precargado, por tanto únicamente necesita de una precarga eléctrica para que tenga un comportamiento simétrico tanto a compresión como a tracción.

En la figura 5.2 se muestra una foto de la configuración de la viga empotrada libre con el actuador unido mediante los dos bloques y dos de los cuatro acelerómetros empleados en los experimentos. En la foto de la figura 5.3 se pueden ver los otros dos sensores que se han empleado fijados en los bloques.

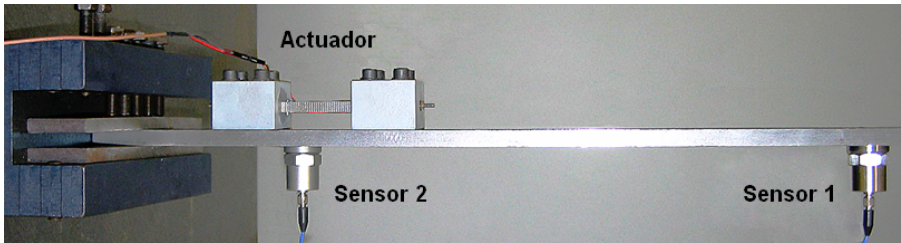




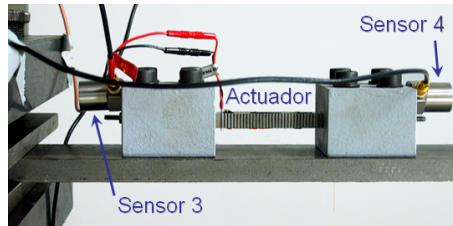
**Figura 5.1:** Plano de los bloques de unión del actuador con la viga

El equipo que se ha utilizado para realizar los experimentos incluye:

- Dos acelerómetros Brüel & Kjær 4370 con sus amplificadores de carga Brüel & Kjær 2644.
- Un actuador piezoeléctrico PPA40M de CEDRAT Technologies (800N, -20...150V).
- Un amplificador de potencia LA75B-2 de dos canales de CEDRAT Technologies (ganancia de 20).
- Una tarjeta de control dSPACE DS1104 R&D.
- Software de adquisición de datos IDEAS-TEST.
- Un PC Pentium para el diseño del controlador.
- Un portátil para el post-procesado de señales.
- Como generador de señal de ruido blanco se ha utilizado el que ofrece IDEAS-TEST.

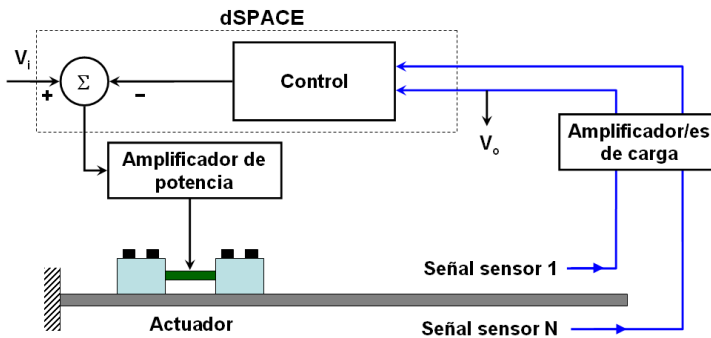


**Figura 5.2:** Viga empotrada libre con el actuador y los dos sensores *no-colocalizado* y *casi-colocalizado*



**Figura 5.3:** Posición de los dos sensores en los dos bloques del actuador

Los experimentos (figura 5.4) han sido llevados a cabo con uno o varios acelerómetros que se han conectado a diversos amplificadores de carga, siendo conectada la salida de estos acondicionadores a sendos canales de la tarjeta de control dSPACE.



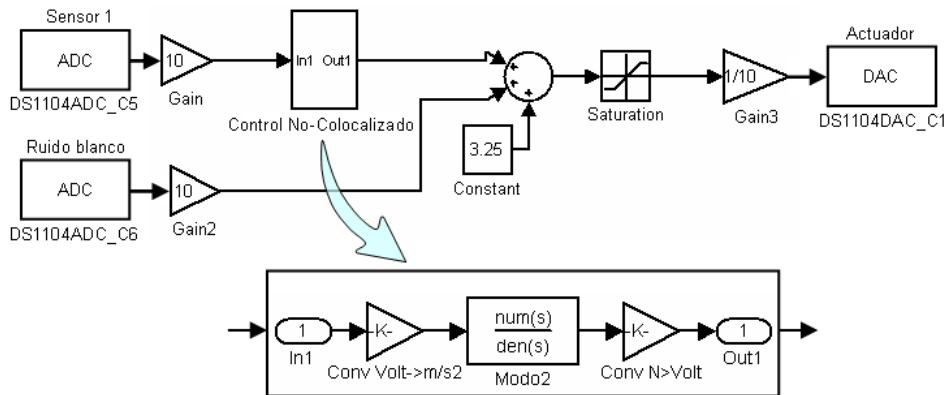
**Figura 5.4:** Esquema general de los experimentos en la viga empotrada libre

Para obtener la señal del actuador se ha utilizado un canal digital analógico (D/A). Dicha señal ha sido introducida en un amplificador de potencia y finalmente la salida de éste conectada al actuador de pila piezoeléctrico.

El controlador se ha implementado en el sistema dSPACE; la programación del control se ha realizado en SIMULINK/MATLAB, siendo el algoritmo de integración temporal un Runge-Kutta de quinto orden. El controlador se ha configurado con a una

frecuencia de muestreo de 10 kHz. Finalmente el fichero de SIMULINK/MATLAB se convierte a lenguaje máquina y se descarga al sistema de dSPACE.

En la figura 5.5 se puede observar el esquema del programa de SIMULINK que ha sido utilizado en uno de los experimentos. La precarga eléctrica ha sido introducida en el actuador mediante una tensión de 3,25 V, introduciéndose el ruido blanco (generado con IDEAS-TEST) en el sistema de dSPACE mediante un canal analógico digital (A/D).



**Figura 5.5:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado*

Las condiciones de ensayo que se han empleado han sido:

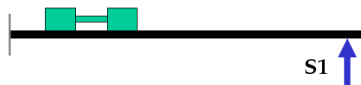
- Rango de frecuencia del bucle de control de 10 a 3200 Hz para ver la influencia que pueden tener los filtros de control en los modos no controlados.
- Filtros de los acondicionadores pasa-alto de 10 Hz para evitar los modos de sólido rígido que aparecen por debajo de dicha frecuencia y un filtro pasa-bajo a 3200 Hz.
- La frecuencia controlada más alta ha sido de 1195 Hz. Al ser la frecuencia de muestreo del controlador de 10 kHz el número medio de puntos por periodo es de 8,37 y el desfase máximo admisible de 43°.

## 5.2.2. Experimentos en la plataforma de ensayo de la viga empotrada libre

Primeramente se pasa a describir el control *no-colocalizado* de un modo llevado a cabo para estudiar experimentalmente la influencia de los parámetros de los filtros en el pico del modo. Después se describe la técnica experimental desarrollada en esta tesis para la obtención de los parámetros de los filtros, empleada para reducir la sensibilidad que presentan dichos parámetros en el modo controlado. A continuación se ha estudiado la influencia que ejerce dicho control *no-colocalizado* en los modos no controlados. Finalmente se han aplicado las técnicas de estabilidad estudiadas en el capítulo cuatro, mediante los sensores *casi-colocalizado* y *colocalizado*.

### 5.2.2.1. Influencia de los parámetros del filtro de control

En este apartado se ha realizado un estudio de la influencia de los parámetros del controlador en el sistema controlado, tal y como se realizó en el capítulo 3. En dicho estudio se observó que, si para el cálculo del amortiguamiento relativo del filtro se subestimaba el residuo del modo que se deseaba controlar, en la función de respuesta en frecuencia aparecen dos picos de resonancia cerca de dicho modo. Por esta razón, únicamente se ha estudiado la influencia en el modo controlado cuando se comete un error de subestimación en dicho residuo. Dicho estudio se ha realizado en un sistema *no-colocalizado*, siendo el actuador y el sensor que se han empleado para el control el sensor 1, situado en el extremo libre de la viga, y el actuador cercano al empotramiento, tal como se puede observar en la figura 5.2. En la figura 5.6 se puede observar el esquema de la viga empotrada libre con el actuador y el sensor que se han empleado para realizar el control.

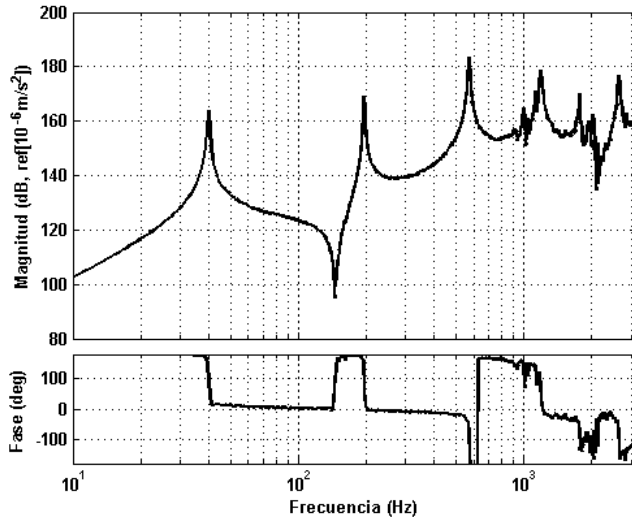


**Figura 5.6:** Esquema de la viga con actuador y sensor *no-colocalizado*

La viga empotrada libre ha sido excitada con el actuador mediante un ruido blanco generado por IDEAS-TEST. En la figura 5.7 se puede observar la FRF, la cual se han representado en el rango de frecuencias de 10 a 3200 Hz, con una resolución de 0,5 Hz.

La función de transferencia que se ha obtenido representa la relación entre la aceleración medida en el sensor y la tensión introducida en el amplificador del actuador ( $\dot{x}/V$ ). La relación que existe entre la tensión introducida en el amplificador del actuador y la fuerza que se obtiene es una constante de conversión.

En la representación de la FRF entre el sensor 1 y la tensión aplicada en el amplificador del actuador de la figura 5.7 se observa que entre el primer y segundo modos existe una antiresonancia, pero no entre el segundo y el tercero. Para realizar este estudio se ha controlado el segundo modo; podía haber sido cualquiera, pero la razón



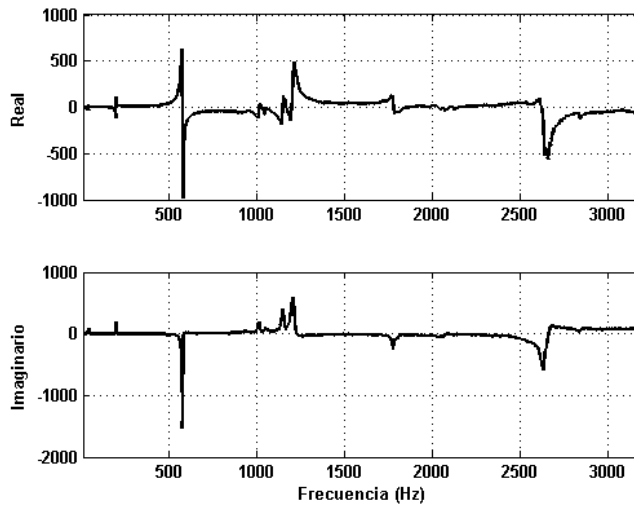
**Figura 5.7:** FRF entre la aceleración del sensor 1 y la tensión empleada en el actuador

de esta elección reside en que dicho modo presenta una antiresonancia con el primer modo y con el tercero no.

El control empleado ha sido de realimentación de la aceleración de segundo orden, donde los parámetros del filtro se han obtenido con la técnica del *punto de corte*. En la figura 5.5 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento. Los datos necesarios en el cálculo de los parámetros del filtro para controlar el segundo modo con el sensor *no-colocalizado* son: la frecuencia, el amortiguamiento relativo y el residuo de la función de transferencia del modo que se desea controlar. Estos datos se han obtenido experimentalmente. La frecuencia de resonancia se ha obtenido de la función de respuesta en frecuencia del sensor que se va a emplear para el control del segundo modo. El amortiguamiento relativo del modo que se desea controlar también se ha obtenido de la función de respuesta en frecuencia mediante el “método basado en el factor de amplificación dinámica” (Giménez y García de Jalón, 1984). Por último con el valor del pico de la parte imaginaria de la función de respuesta en frecuencia entre la aceleración del sensor y la tensión del actuador (figura 5.8) se ha obtenido el valor del residuo que se necesita para el cálculo de los parámetros del filtro, mediante la siguiente expresión:

$$A_n = 2\xi_n \text{Imag} \left( \frac{\ddot{X}}{V} \right) C_{conv} \quad (5.1)$$

donde  $A_n$  es el residuo,  $\text{Imag}(\frac{\ddot{X}}{V})$  la parte imaginaria de la función de respuesta en frecuencia entre la tensión del actuador y la aceleración del sensor, y por último,  $C_{conv}$  una constante de conversión entre la tensión y la fuerza del actuador (de tipo pila piezoeléctrica).



**Figura 5.8:** Parte real y parte imaginaria de las FRF-s entre el actuador y el sensor *no-colocalizado*

Frecuencia natural, $\omega_2$	195,5Hz
Amortiguamiento relativo, $\xi_2$	0,00383 %
Residuo, $\psi_a^2 \psi_s^2$	0,02401

**Tabla 5.1:** Parámetros modales del segundo modo estimados experimentalmente

En la tabla 5.1 se detallan los valores que se han obtenido experimentalmente para el cálculo de los parámetros del filtro del segundo modo.

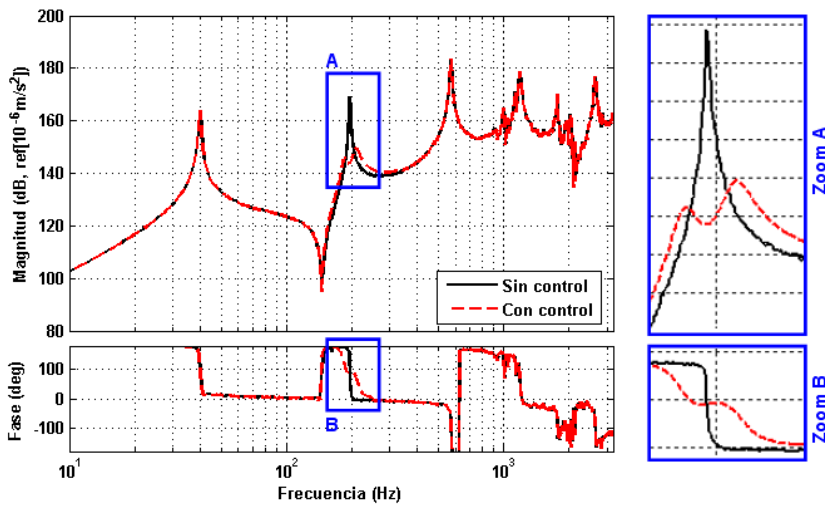
Para la contrastación experimental de la influencia que puede presentar la subestimación del residuo en el cálculo de los parámetros del filtro, se ha empleado una subestimación del 80 % del valor del residuo. Con este error y fijando un valor para la ganancia de 1,5, los parámetros obtenidos con la técnica del *punto de corte* del filtro del control de la realimentación de la aceleración de segundo orden se han indicado en la tabla 5.2:

Ganancia, $g$	1,5
Frecuencia del filtro, $\omega_{2c}$	195,5 Hz
Amortiguamiento relativo, $\xi_{c2}$	0,08779

**Tabla 5.2:** Parámetros del filtro de control del segundo modo con un error de subestimación del residuo de 80 %

Empleando los parámetros del filtro de la tabla 5.2, en la figura 5.9 se ha representado la FRF del sistema controlado con el control *no-colocalizado*.

En la función de transferencia del sistema controlado de la figura 5.9 se puede



**Figura 5.9:** FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control *no-colocalizado* con una subestimación del residuo de 80 %

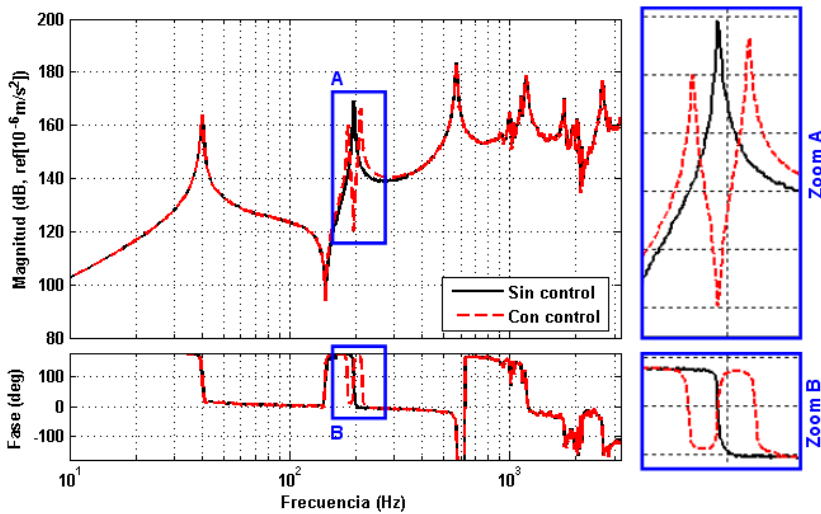
ver que cerca del segundo modo aparecen dos picos, en vez de un único pico más amortiguado. En este caso, a diferencia del caso estudiado en el capítulo 3, la respuesta del sistema está representada por más de un modo, por tanto el amortiguamiento relativo de los dos picos que aparecen en este caso no es igual, cosa que ocurre cuando el sistema está representado únicamente por un modo. El amortiguamiento relativo y la frecuencia de los referidos dos picos se listan en la tabla 5.3. Nótese que aunque aparezcan dos picos se aprecia una mejora en el amortiguamiento del sistema en la zona del modo controlado.

	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento relativo (%)
Primer pico	186,5	0,0280
Segundo pico	209,5	0,0399

**Tabla 5.3:** Frecuencia y amortiguamiento relativo de los dos picos que aparecen cerca del modo controlado

También se ha realizado un caso de subestimación del residuo del 100 %. En este caso los parámetros del filtro que se han empleado han sido iguales que en el caso anterior (tabla 5.2), a excepción del amortiguamiento relativo que se ha escogido igual al del modo que se deseaba controlar ( $\xi_{c2} = 0,00383$ ). En la figura 5.10 se ha representado la FRF sin control y con control *no-colocalizado*, con los parámetros del filtro obtenidos en este caso.

En este caso en la FRF del sistema controlado también aparecen dos picos, pero con mayor amplitud que en el caso de la subestimación del 80 %. También el amortiguamiento es diferente en los dos picos (tabla 5.4), aunque en los dos es muy parecido



**Figura 5.10:** FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control *no-colocalizado* con una subestimación del residuo de 100 %

	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento relativo (%)
Primer pico	184,5	0,004067
Segundo pico	210	0,0003899

**Tabla 5.4:** Frecuencia y amortiguamiento relativo de los dos picos que aparecen cerca del modo controlado

al amortiguamiento del sistema sin control ( $\xi_2 = 0,00383$ ). Debido al desdoble en dos resonancias, entre los nuevos picos aparece una antiresonancia que se aprecia en la gráfica de la fase con un adelanto de  $180^\circ$ .

Como conclusión se puede decir que, así como ocurría con los resultados teóricos (capítulo 4), en el experimental también ocurre un desdoblamiento del modo controlado cuando en el cálculo de los parámetros del filtro ha habido una subestimación del residuo. Para evitar este desdoblamiento los parámetros de los filtros en los experimentos que se van a mostrar a continuación se han calculado con datos experimentales de la frecuencia del modo, del amortiguamiento relativo y del residuo del modo que se desea controlar.

### 5.2.2.2. Análisis experimental del control *no-colocalizado*

El objetivo de este experimento es estudiar la influencia del control *no-colocalizado* en los modos no controlados. Para ello el sensor que se ha empleado ha sido el sensor 1 (figura 5.2); con este sensor y el actuador se ha controlado el segundo modo para ver la mejora en el amortiguamiento del modo controlado y la influencia que presenta el



control *no-colocalizado* con un filtro de segundo orden en los modos no controlados. La razón de la selección del segundo modo ha sido que este modo presenta con el primero una antiresonancia que no presenta con el tercero.

En la figura 5.6 se representaba el esquema de la viga empotrada libre con el actuador y el sensor empleados para realizar el control.

El control empleado ha sido de realimentación de la aceleración de segundo orden, donde los parámetros del filtro se han obtenido con la técnica del *punto de corte*, con los datos modales obtenidos experimentalmente para el cálculo de los parámetros del filtro, y así obtener un amortiguamiento óptimo del modo controlado sin que aparezcan dos picos cerca del modo controlado como se ha descrito en capítulo anterior. En la figura 5.5 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.

En el experimento se fueron cambiando los parámetros del filtro en función de la ganancia, hasta llegar cerca de inestabilizar algún modo no controlado. Dicha ganancia y los parámetros del filtro que se han empleado se pueden ver en la tabla 5.5.

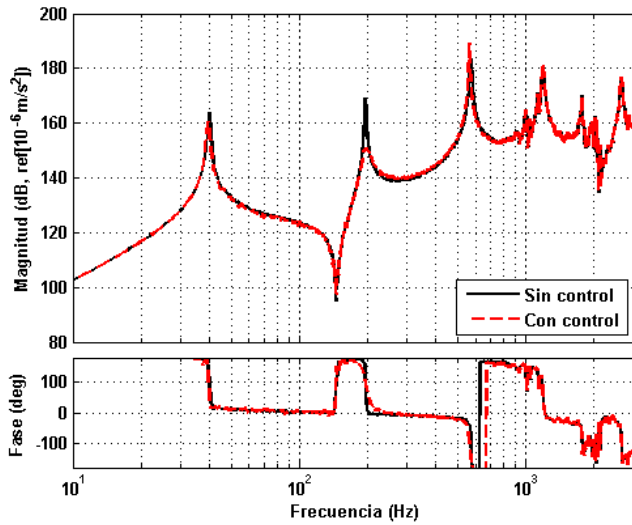
Ganancia, $g$	1,5
Frecuencia del filtro, $\omega_{2c}$	195,5 Hz
Amortiguamiento relativo, $\xi_{c2}$	0,1936

**Tabla 5.5:** Parámetros del filtro de control del segundo modo con datos experimentales

En la FRF (figura 5.11) se observa que en el segundo modo, en la frecuencia controlada, solo aparece un pico amortiguado, debido al método del *punto de corte* y a que los datos necesarios para el cálculo de los parámetros han sido todos ellos experimentales. La utilización de estos datos experimentales eliminan la sensibilidad que puede presentar el sistema de control frente a las variaciones de los parámetros del filtro.

En la FRF con control (figura 5.11) el segundo modo tiene un pico de resonancia que es menor en comparación con el sistema sin control; en cambio el pico de resonancia del tercer modo es mayor, o sea menor amortiguamiento relativo. La razón de este aumento es que dicho modo está más próximo a la inestabilización. Por otra parte también puede verse que el resto de las frecuencias en las dos FRF-s, con y sin control, coinciden. Asimismo se puede observar que, al ser el control empleado *no-colocalizado* y como en dicha función de respuesta en frecuencia no hay ninguna antiresonancia entre el segundo y el tercer modo, los signos del residuo del segundo y tercer picos son contrarios, lo cual hace que el efecto del control sobre el segundo modo sea perjudicial para el tercero. También, al emplear un filtro de segundo orden los otros modos que tengan el residuo de signo contrario al segundo modo se verán afectados, siendo los que están más cerca los más perjudicados. En cambio se puede observar que, al primer modo, el control *no-colocalizado* del segundo modo con el sensor 1 no tiene ningún riesgo de inestabilizarlo, debido a que los residuos del primer y segundo modos son de igual signo.

En la tabla 5.6 se han representado las variaciones tanto de la amplitud como del



**Figura 5.11:** FRF entre el actuador y el sensor 1, sin control y con control *no-colocalizado* con una ganancia de 1,5

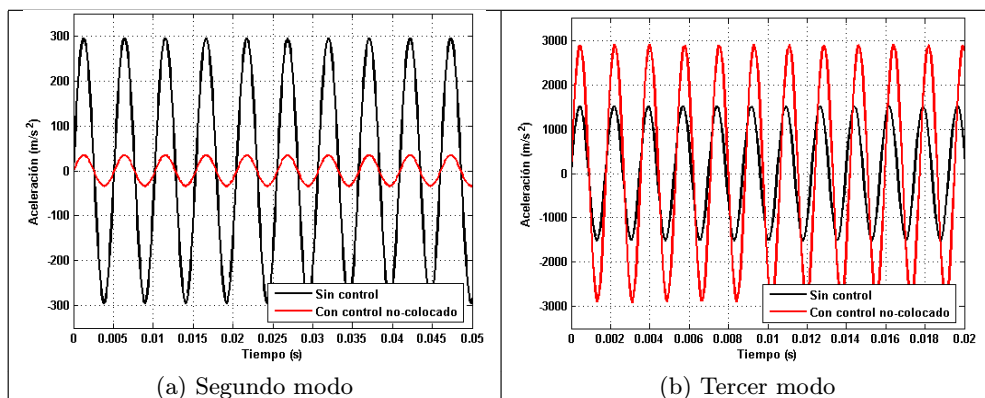
amortiguamiento relativo estimado experimentalmente mediante el “método basado en el factor de ampliación dinámica” (Giménez y García de Jalón, 1984) del segundo y tercer modo sin control y con control *no-colocalizado* del segundo modo. En ella se puede observar cómo el segundo modo ha tenido una reducción de 19 dB en amplitud y un aumento más de un orden de magnitud en el amortiguamiento. No obstante el tercer modo ha aumentado 6 dB en amplitud y el amortiguamiento se ha reducido a la mitad.

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	195,5	150,67	0,04630
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	564,0	189,29	0,00245

**Tabla 5.6:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado*

En la figura 5.12a se han representado las respuestas temporales del sensor 1, tanto sin control como con él, excitando el sistema mediante el actuador con una señal sinusoidal de 1 V de amplitud y en ambos casos a la frecuencia del segundo modo (195,5 Hz), debido a que la frecuencia del pico en los dos casos es la misma. En ella se ve cómo la amplitud del sistema controlado se reduce en un orden de magnitud, de  $295 \text{ m/s}^2$  sin control a  $34,19 \text{ m/s}^2$  con control. También se puede observar que la frecuencia del tercer modo ha variado muy ligeramente, de 572,5 Hz a 564 Hz.

En la figura 5.12b se han representado las respuestas temporales, excitando el actuador con la frecuencia del segundo modo, sin control con 572,5 Hz y con control con 564 Hz. En ella el tercer modo se amplifica en magnitud, pasando de un valor sin control de  $1514 \text{ m/s}^2$  a  $2908 \text{ m/s}^2$ . Queda patente pues que si aumentase la ganancia del control *no-colocalizado* del segundo modo, el tercer modo llegaría a inestabilizarse.



**Figura 5.12:** Respuestas temporales del sensor 1, excitando a las frecuencias naturales del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del segundo modo

Los resultados obtenidos se pueden resumir en que el control *no-colocalizado* inestabiliza los modos que tengan el residuo de signo contrario al controlado y en que dicho control tiene mayor efecto en los modos cercanos al modo controlado debido a que el filtro de control empleado ha sido de segundo orden.

### 5.2.2.3. Resultados experimentales de la técnica de estabilidad del sistema controlado con un segundo sensor

En este apartado se presentan dos casos para comprobar el comportamiento experimental de los dos métodos de estabilización, con sensor *casi-colocalizado* y sensor *colocalizado*, propuestos en el capítulo 4. Primeramente se ha utilizado un sensor *casi-colocalizado* con el actuador en la posición que se obtuvo como óptima (sensor 2 de la figura 5.2), y posteriormente se ha empleado un sensor *colocalizado* con el actuador (sensores 3 y 4 de la figura 5.3).

#### 5.2.2.3.1. Estabilidad del sistema controlado con un sensor *casi-colocalizado*

Se trata de asegurar la estabilidad del sistema de control sin empeorar el rendimiento del modo controlado con el control *no-colocalizado*; para lo cual se emplea un sensor *casi-colocalizado* con el actuador. La posición de este sensor *casi-colocalizado* ha sido la misma que en la simulación debido a que experimentalmente también se cumplía que era la posición en la que un mayor número de modos daban el mismo signo del residuo.

Para validar experimentalmente la técnica de utilización del sensor *casi-colocalizado* para estabilizar los modos no controlados que se puedan inestabilizar con el control *no-colocalizado* se ha controlado el segundo modo con un control *no-colocalizado*. Posteriormente, una vez comprobado que así se inestabiliza el tercer modo, se ha controlado el tercer modo con el sensor *casi-colocalizado*.

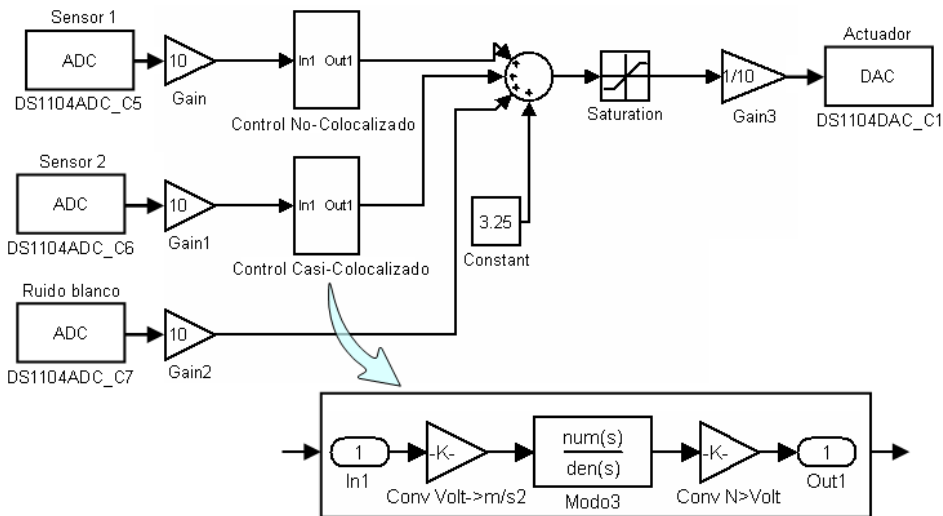
En la figura 5.13 se representa el esquema de la viga empotrada libre con el actuador y los sensores que se han empleado para realizar el control.



**Figura 5.13:** Esquema de la viga con el actuador y los sensores *no-colocalizado* y *casi-colocalizado*

Para controlar el segundo y el tercer modos se han utilizado dos filtros de segundo orden de realimentación de la aceleración, cuyos parámetros han sido calculados con el método del *punto de corte*. Para evitar que aparezcan dos picos de resonancia en las frecuencias controladas los parámetros de los dos filtros se han calculado con datos experimentales, tal y como se ha explicado anteriormente (apartado 5.2.2.1).

En la figura 5.14 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.



**Figura 5.14:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado* y estabilización *casi-colocalizada*

En la FRF entre la tensión aplicada al amplificador del actuador y la señal del sensor 2 (figura 5.15) se puede ver que, como en el caso numérico estudiado en el capítulo 4, todos los residuos de la FRF tienen el mismo signo excepto el primero;

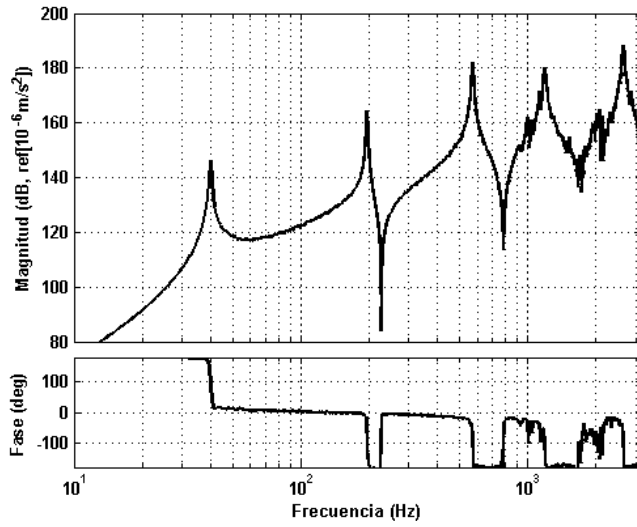


Figura 5.15: FRF entre el actuador y el sensor 2

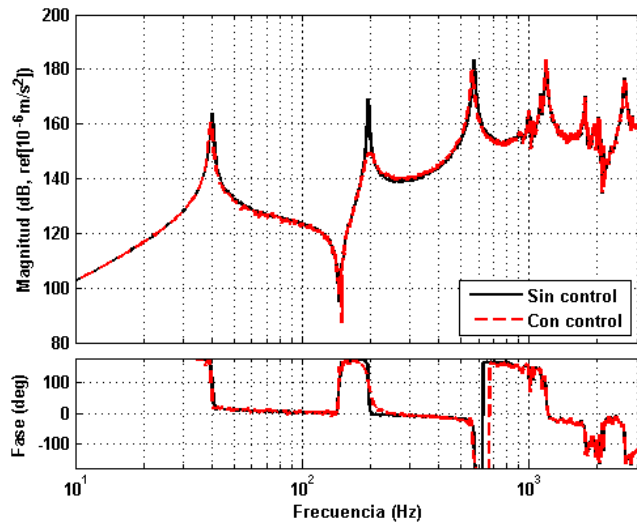


Figura 5.16: FRF con y sin control entre el sensor 1 y el actuador con control *no-colocalizado* y *casi-colocalizado*

es decir, hay una antiresonancia entre todos los modos en el rango de frecuencias representado excepto entre el primer y el segundo modos.

Para estabilizar el tercer modo se ha utilizado el sensor 2, cuya posición se obtuvo en el capítulo 4. Se ha comprobado experimentalmente que dicha posición es la óptima considerando el número de antiresonancias que presenta la función de respuesta en frecuencia de dicho sensor con el actuador. La razón por la que se ha elegido el sensor *casi-colocalizado* es que en la FRF se puede observar que dicho modo tiene antiresonancias justo antes y después; por tanto el control del tercer modo realizado con dicho sensor no va a inestabilizar ni el segundo ni el tercer modo.

En este caso el segundo modo se ha controlado con el control *no-colocalizado* con un valor de la ganancia de 2, control que era inestable cuando no se empleaba un sensor adicional para el control del tercer modo. La ganancia que se ha empleado para controlar el tercer modo se ha seleccionado de tal forma que su amortiguamiento sea parecido o menor al que tenía en el caso del sistema original sin control.

La respuesta del sistema controlado, el segundo modo con el sensor *no-colocalizado* y el tercer modo con el sensor *casi-colocalizado*, puede verse representada en la figura 5.16, respectivamente. En ella se puede observar cómo el segundo modo tiene un pico de resonancia menor que en el caso sin control. En este caso, el tercer modo tiene menos riesgo de inestabilizarse que en el caso anterior (figura 5.11) en el que no se controlaba el tercer modo con el sensor *casi-colocalizado*. También puede verse que no ha habido ninguna otra variación de los modos no controlados y que en los dos modos controlados únicamente ha habido una reducción del pico de resonancia sin que aparezcan nuevos picos cerca de la frecuencia controlada, debido a que los parámetros se han obtenido con la técnica del *punto de corte* con datos modales experimentales.

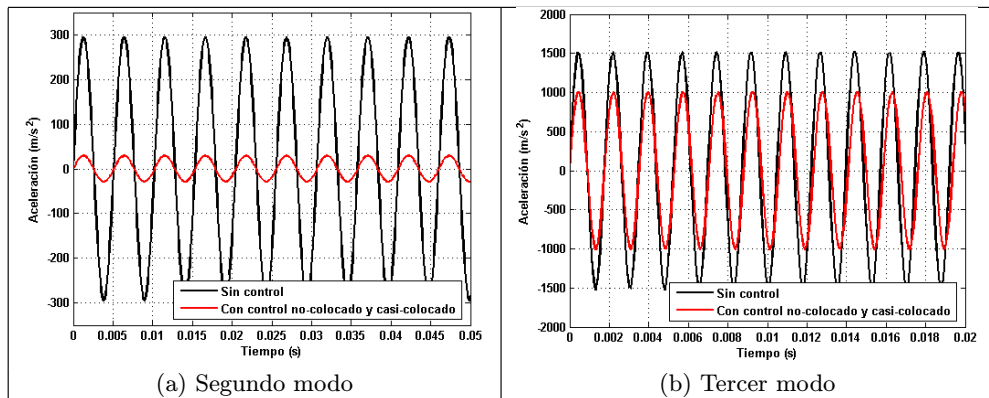
En la tabla 5.7 se han indicado las variaciones de las frecuencia, de las amplitud y de los amortiguamientos relativos estimados experimentalmente con el “método basado en el factor de amplificación dinámica” (Giménez y García de Jalón, 1984). En ella se puede observar como el segundo modo ha tenido una reducción en amplitud de 20 dB y un aumento de más de un orden en amortiguamiento. El tercer modo, en amplitud ha tenido una reducción de 3 dB y en amortiguamiento se ha duplicado. En este caso se puede observar que el tercer modo tiene menos riesgo de inestabilizarse que en el caso de que solo se controlara el segundo modo con un control *no-colocalizado*.

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	195,5	149,26	0,05140
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	567,0	180,11	0,00800

**Tabla 5.7:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* y *casi-colocalizado*

En la figura 5.17 se han representado las respuestas temporales de la señal de

sensor 1, sin y con control excitando a las frecuencias del segundo y tercer modos. En ella, tanto el segundo como el tercer modos se han excitado a la frecuencia de sus respectivos picos. El segundo modo tiene una reducción en amplitud de  $294,7 \text{ m/s}^2$  sin control y de  $28,92 \text{ m/s}^2$  con control, y el tercer modo de  $1514 \text{ m/s}^2$  sin control y de  $1013 \text{ m/s}^2$  con control.



**Figura 5.17:** Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias naturales del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del segundo modo y *casi-colocalizado* del tercer modo

También se puede observar que en el tercer modo ha habido una variación de frecuencia (de  $572,5 \text{ Hz}$  sin control a  $567 \text{ Hz}$ ) pero la variación ha sido menor que en el caso que solo había un control *no-colocalizado* del segundo modo.

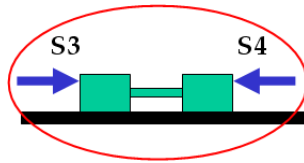
En este caso experimental se puede observar que el sistema es estable con el uso de un segundo sensor con un control *casi-colocalizado* para el control de los modos inestabilizados por el control *no-colocalizado*. Con la ganancia de 2 del control *no-colocalizado* el sistema era inestable, pero en cambio con la introducción de un control *casi-colocalizado*, se ha obtenido un sistema estable en donde el segundo modo (el que se deseaba controlar) a pasado de tener un amortiguamiento relativo sin control de  $0.00383$  a  $0.0514$ .

Para concluir se puede observar que, añadiendo el control *casi-colocalizado* al control *no-colocalizado*, se ha obtenido un sistema de control estable sin empeorar el rendimiento del control del modo controlado con el sensor *no-colocalizado*. No obstante, si aumentásemos la ganancia del control *no-colocalizado* para aumentar el amortiguamiento del modo controlado, se llegaría a un valor de la ganancia donde se inestabilizaría otro modo, uno que tuviera el signo del residuo contrario al modo controlado. En este caso se podría añadir otro control *casi-colocalizado* de los modos que se hubieran inestabilizado, y así sucesivamente.

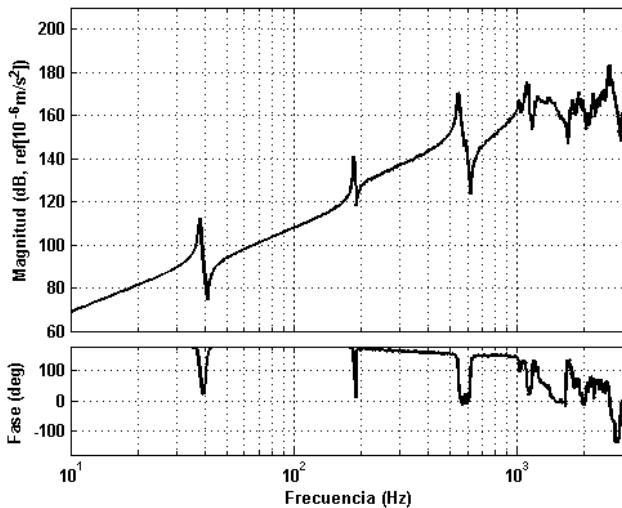
### 5.2.2.3.2. Estabilidad del sistema controlado con un sensor colocalizado

Con este estudio se trata de obtener el sistema de control *no-colocalizado* sin empeorar el rendimiento del modo controlado con el control *no-colocalizado*, empleando para ello un sensor *colocalizado* con el actuador.

Con este experimento se comprueba el caso desarrollado en el capítulo 4 (apartado 4.3.2) del sensor *colocalizado* mediante dos sensores posicionados paralelamente en la dirección del actuador. Al no poder situar los sensores justamente en la dirección del actuador por motivos constructivos (la varilla roscada que sujeta el actuador a los dos bloques), los dos sensores se han posicionado justo por encima de los extremos de las dos varillas, tal y como se puede observar en la foto de la figura 5.3. En la figura 5.18 se representan esquemáticamente el actuador y los sensores *colocalizados*.



**Figura 5.18:** Posición de los dos sensores en los dos bloques del actuador



**Figura 5.19:** Función de transferencia de la suma de los dos sensores con respecto al actuador

En la figura 5.19 se ha representado la FRF de la suma de los dos sensores con respecto al actuador. En dicha función, a partir de 1000 Hz, la señal tiene alta densidad modal y la fase no es tan limpia de adelanto y retraso; no obstante se ve que hasta 2590 Hz tiene una alternancia de picos de resonancia y de antiresonancia, y que en la



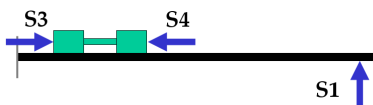
fase hay un retraso de  $180^\circ$  en cada pico de resonancia y un adelanto también de  $180^\circ$  en cada antiresonancia. Así pues, hasta la frecuencia de 2590 Hz la fase oscila entre  $180^\circ$  y  $0^\circ$ , pero a la frecuencia de 2590 Hz la fase tiene un retraso hasta  $-180^\circ$ . Por tanto se puede concluir que hasta dicha frecuencia la FRF es *colocada*, pero a partir de dicha frecuencia ya no lo es.

Empleando los dos sensores, como ya se hizo en el capítulo 4, se van a estudiar dos casos de control: uno llevado a cabo con un filtro de segundo orden y otro con uno de primer orden.

a) *Con el filtro de segundo orden*

El objetivo de este estudio es asegurar la estabilidad del sistema de control sin empeorar el rendimiento del modo controlado con el control *no-colocalizado*. Para ello se ha empleado un sensor *colocalizado* con el actuador y utilizado un filtro de segundo orden para la estabilización de los modos.

En este apartado se muestran los resultados de estabilidad del control *no-colocalizado* obtenidos con la señal de sensor que es la suma de las señales de los acelerómetros 3 y 4. En la figura 5.20 se puede observar el esquema de la viga empotrada libre con el actuador y los sensores que se han empleado para realizar el control.



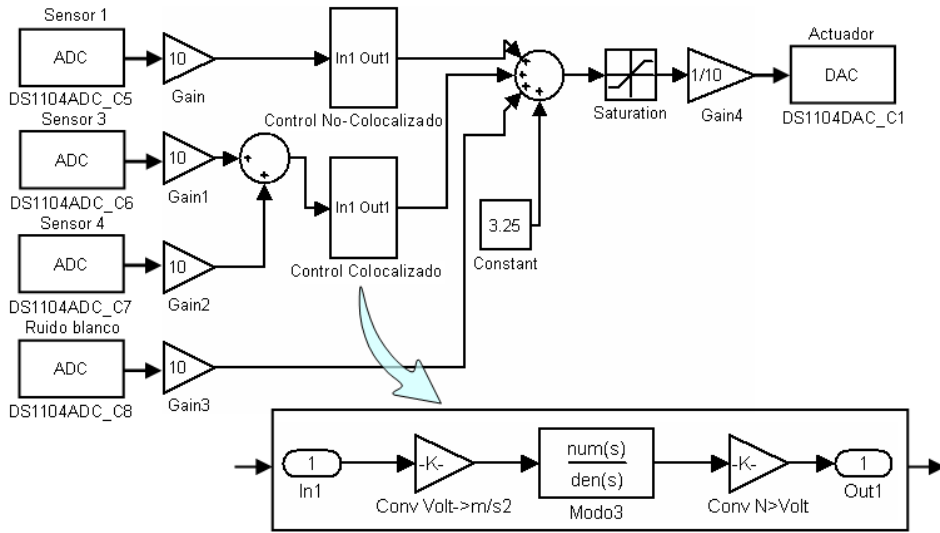
**Figura 5.20:** Esquema de la viga con el actuador y los sensores *no-colocalizado* y *colocalizado*

El filtro de control que se ha empleado ha sido de segundo orden, y, como en los casos experimentales anteriores que se han mostrado en este capítulo, los parámetros del filtro se han obtenido con datos experimentales. En este caso también se ha realizado el mismo caso de control *no-colocalizado* del segundo modo con una ganancia de 2.

En la figura 5.21 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.

En la FRF de la figura 5.22 se puede observar que ha habido una reducción del segundo modo con el control *no-colocalizado* y que el tercer modo se ha estabilizado con el sensor de la suma de los dos acelerómetros; obteniendo de este modo un amortiguamiento relativo del tercer modo similar, aunque menor, al que tenía en el sistema original sin control.

En la tabla 5.8 se han indicado las variaciones que ha habido del segundo y tercer modos en frecuencia, amplitud y amortiguamiento relativo, sin control y con control de los dos modos. En ella se puede observar que la reducción que ha habido en amplitud en el segundo modo ha sido de 20 dB y que el amortiguamiento de dicho modo se ha



**Figura 5.21:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado* y estabilización *colocalizado*

incrementado en un orden de magnitud. En el tercer modo, tanto la amplitud como el amortiguamiento relativo son bastante parecidos a los del sistema sin control.

La respuesta temporal del segundo y tercer modos se ha representado en la figura 5.23; la reducción que ha habido en el segundo modo ha sido de  $295 \text{ m/s}^2$  a  $29 \text{ m/s}^2$  y en el tercer modo de  $1523 \text{ m/s}^2$  a  $1456 \text{ m/s}^2$ .

Para concluir se puede observar que de forma experimental no se ha podido obtener una señal de sensor *colocalizado* (debido al montaje de la unión del actuador) para el control del modo inestabilizado con el sensor *no-colocalizado*. Por tanto el control que se ha realizado en este caso también es un control *casi-colocalizado* como en el caso anterior.

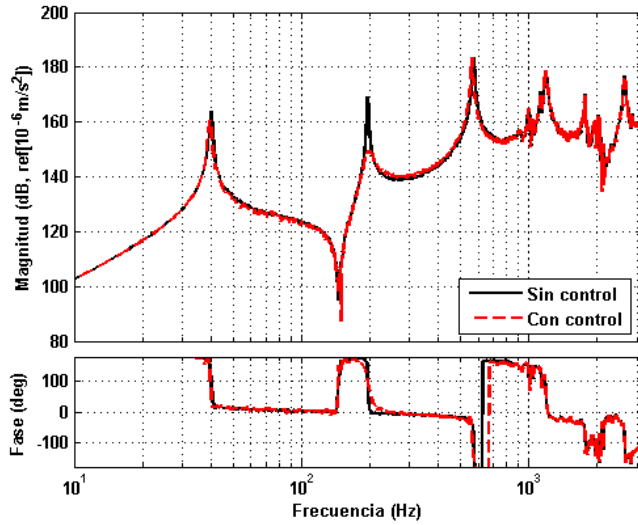


Figura 5.22: Función de trasferencia entre el actuador y sensor 1 sin y con control *no-colocalizado* y con la suma de los dos acelerómetros

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	195,5	149,56	0,05140
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	563,0	183,11	0,00484

Tabla 5.8: Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* y con la suma de los dos acelerómetros

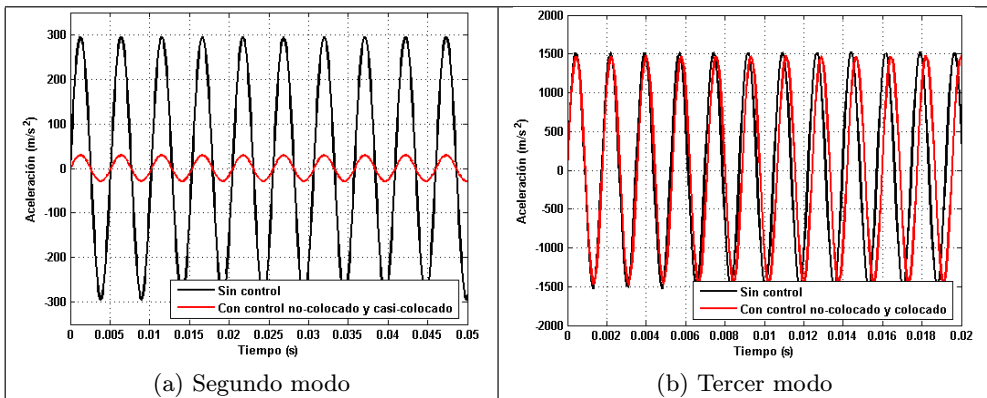


Figura 5.23: Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* y con la suma de los dos acelerómetros

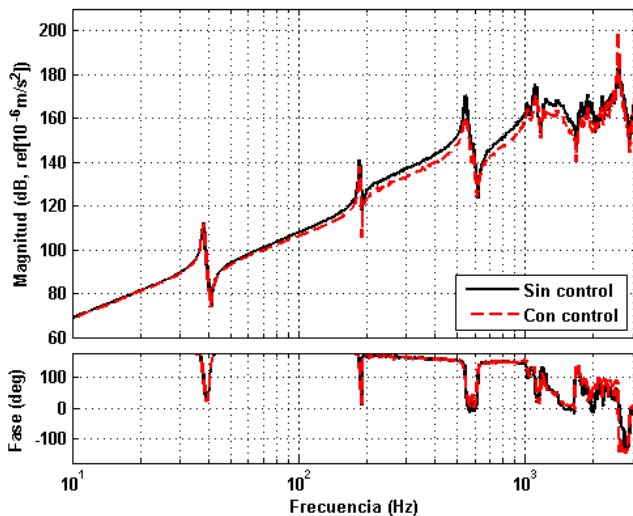
b) Con el filtro de primer orden

El objetivo de este estudio es asegurar la estabilidad del sistema de control sin empeorar el rendimiento del modo controlado con el control *no-colocalizado*. Para ello se ha empleado un sensor *colocalizado* con el actuador y un filtro de primer orden para la estabilización de los modos.

Para ello el método que se ha empleado ha sido, realizar un control de velocidad con un filtro de primer orden con la señal de la suma de los dos citados acelerómetros (figura 5.19), tal y como se refleja en la expresión 5.2.

$$G_c(s) = \frac{g}{s} \quad (5.2)$$

Desde el punto de vista de la estabilidad la señal de dicho sensor no es adecuada para realizar un control con un filtro de primer orden, ya que en el rango en el que se va a emplear no siempre existe una antiresonancia después de un pico de resonancia. La operativa fue ir aumentando la ganancia del controlador hasta que el modo que no tenía una antiresonancia con el modo anterior se acercara a la inestabilidad; dicha ganancia del filtro fue de valor 1500. En la figura 5.24 se puede observar la FRF con control que se ha realizado con esta ganancia. En ella se ve cómo a 2592 Hz ha habido un aumento del pico de resonancia debido a que en dicho pico ha habido disminución de amortiguamiento relativo. En este caso el sistema aún es estable con la ganancia que se ha usado, pero si aumentásemos un poco más se volvería inestable. La razón es que por debajo de dicha frecuencia no hay una antiresonancia y por tanto el signo del residuo del pico de resonancia de 2592 Hz es de signo contrario al del anterior pico, lo cual hace que se inestabilice el sistema en dicha frecuencia.



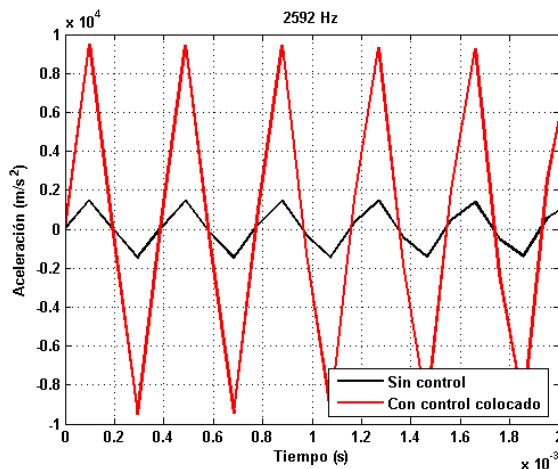
**Figura 5.24:** Función de transferencia de la suma de los dos sensores con respecto al actuador con y sin control

En la tabla 5.9 se han indicado las variaciones en frecuencia, amplitud y amortiguamiento relativo del modo a 2592 Hz. En ella se puede observar que con control de filtro de primer orden la amplitud del pico ha aumentado en 16 dB y que el amortiguamiento relativo se ha reducido, debido a que se ha empleado un filtro de primer orden con un control que no es *colocalizado*, ya que el modo a 2592 Hz no presenta una antiresonancia con el modo anterior.

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
2592 Hz	Sin control	2592	183,42	0,007716
	Con control	2582	199,55	0,001157

**Tabla 5.9:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del modo a 2592 Hz sin y con control de primer orden

En la figura 5.25 se ha representado la respuesta temporal a la frecuencia de 2592 Hz de la suma de los dos acelerómetros. En ella se puede observar cómo la respuesta con control ha aumentado en amplitud, pasando de  $1476 \text{ m/s}^2$  a  $9494 \text{ m/s}^2$ . En dicha figura se aprecia también que con la frecuencia de muestreo que se ha empleado la respuesta no queda bien definida.



**Figura 5.25:** Respuesta temporal de la suma de los dos acelerómetros 3 y 4, excitando a la frecuencia de 2592 Hz sin y con control

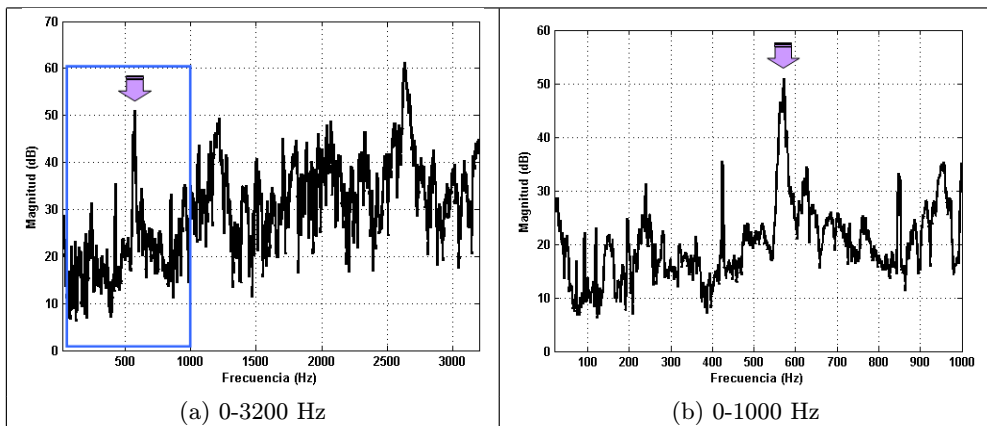
Se observa que la utilización del sensor, que no es *colocalizado* en todo el rango de frecuencias, puede ser peligroso desde el punto de vista de la estabilidad con un control de realimentación de la aceleración de primer orden. Se concluye pues que para utilizar un control de realimentación de la aceleración se debe estar seguro de que la función de respuesta en frecuencia entre el actuador y sensor que se vaya a utilizar sea *colocalizado*. Si no, si el actuador y el sistema tienen suficiente ancho de banda, existe un gran riesgo de que se inestabilice el sistema debido al control.

### 5.2.3. Resultados del control activo acústico estructural

El objetivo del siguiente experimento ha sido reducir el ruido radiado por la viga empotrada libre mediante la técnica desarrollada en esta tesis para el control de vibraciones, que es el control de realimentación de la aceleración *no-colocalizado*. Además se ha utilizado la metodología, también desarrollada en esta tesis, de estabilizar los modos que pudiera inestabilizar el control *no-colocalizado* mediante un sensor *casi-colocalizado*.

Para ello en un primer momento se ha excitado la viga con un ruido blanco mediante el actuador, realizándose la medición de ruido a una distancia de dos metros perpendicularmente desde el centro de gravedad de la viga. El modo que se ha elegido controlar con el sensor *no-colocalizado* (sensor 1, figura 5.2) ha sido para reducir uno de los picos del autoespectro del ruido, y posteriormente a medida que ha ido aumentando la ganancia de dicho control se han ido estabilizando los modos que inestabilizaba dicho control *no-colocalizado* con el sensor *casi-colocalizado*. A diferencia del experimento anterior, en el que únicamente se ha estabilizado un modo, en éste se han estabilizado todos los que se han inestabilizado con el control *no-colocalizado* gracias a la ganancia que se ha elegido para dicho control *no-colocalizado*.

En las figura 5.26 se ha representado el espectro de ruido en un rango de frecuencia de 0-3200 Hz. En dicho espectro se puede observar cómo a 572 Hz hay un pico de ruido, el cual se produce cerca del tercer modo, que está a 572 Hz.



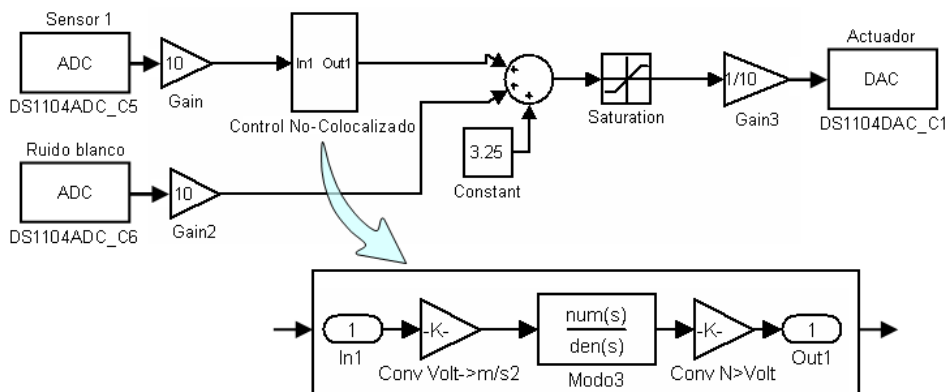
**Figura 5.26:** Espectro de ruido radiado por la viga empotrada libre en un rango de 0 a 3200 Hz

El procedimiento seguido para reducir dicho pico de ruido consta de varias fases. En la primera se ha controlado el tercer modo con el sensor *no-colocalizado* (sensor 1 de la figura 5.2). Al ir aumentando la ganancia, esto provoca el desplazamiento de los modos a la región de inestabilidad, siendo el primero en inestabilizarse el de mayor riesgo, en este caso el segundo. En una segunda fase se controla este segundo modo, y posteriormente el cuarto, quinto, sexto y séptimo.

### 5.2.3.1. Control del tercer modo

Para reducir el pico de ruido de 572 Hz se ha controlado el tercer modo con el sensor 1 (figura 5.2) con una ganancia de 0,45; los parámetros del filtro de control, también como en el caso anterior, se han calculado con el método del *punto de corte* y con datos experimentales, tanto de la frecuencia, como del amortiguamiento relativo y del residuo de la función de transferencia del tercer modo.

En la figura 5.27 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.



**Figura 5.27:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado* del tercer modo

En la figura 5.28 se han representado las FRF-s del sistema controlado y no controlado para el sensor 1; en ella puede verse cómo en el tercer modo ha habido una reducción del pico de resonancia, pero en cambio en el segundo ha habido un aumento. En el resto de las frecuencias las dos FRF-s, tanto sin control como con control, no habido tanta variación como en estos dos modos.

En la tabla 5.10 se han enumerado las variaciones en frecuencia y en amplitud que ha habido en el segundo y tercer modos debido al control del tercer modo mediante un control *no-colocalizado* de la amplitud de la función de respuesta en frecuencia, así como en el amortiguamiento relativo de dichos modos, que se ha obtenido experimentalmente mediante el “método basado en el factor de amplificación dinámica” (Giménez y García de Jalón, 1984).

En dicha tabla se puede observar que la amplitud del tercer modo se ha reducido en 16 dB y que el amortiguamiento relativo ha aumentado en un orden de magnitud. No obstante en el segundo modo ha habido un aumento de la amplitud de 7,68 dB y el amortiguamiento relativo ha disminuido de 0,00383 a 0,00138. El segundo modo está más cerca de inestabilizarse debido a que en la función de transferencia del sensor 1 con la señal del actuador el signo del residuo del segundo y tercer modos es opuesto. También se puede observar que la frecuencia natural de los dos modos se ha modificado debido a que la respuesta del sistema está dominada por más de un modo.

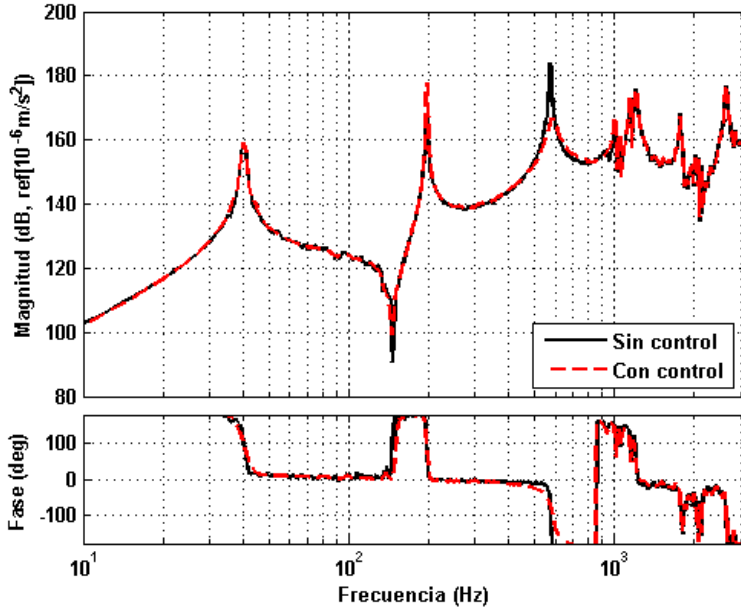


Figura 5.28: FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador controlando el tercer modo

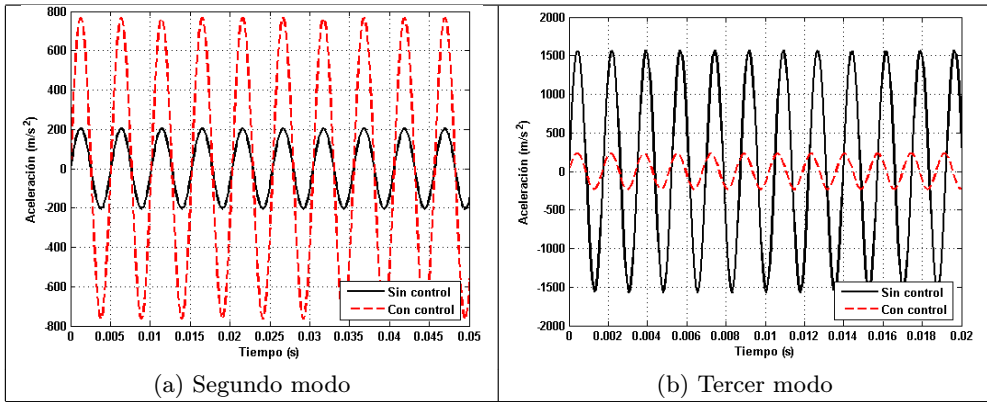


Figura 5.29: Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del tercer modo



		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	197,0	177,07	0,00138
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	588,0	167,34	0,07230

**Tabla 5.10:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del tercer modo

En las figuras 5.29 se ha representado la respuesta temporal del sensor 1, excitando la viga a la frecuencia natural del segundo modo (a) y a la del tercer modo (b) con y sin control. La amplitud en el segundo modo ha aumentado de  $295 \text{ m/s}^2$  a  $767 \text{ m/s}^2$ ; en cambio en la frecuencia del tercer modo la respuesta de la señal del sensor 1 se ha reducido de  $1531 \text{ m/s}^2$  a  $767 \text{ m/s}^2$ .

### 5.2.3.2. Control del tercer modo y estabilización del segundo

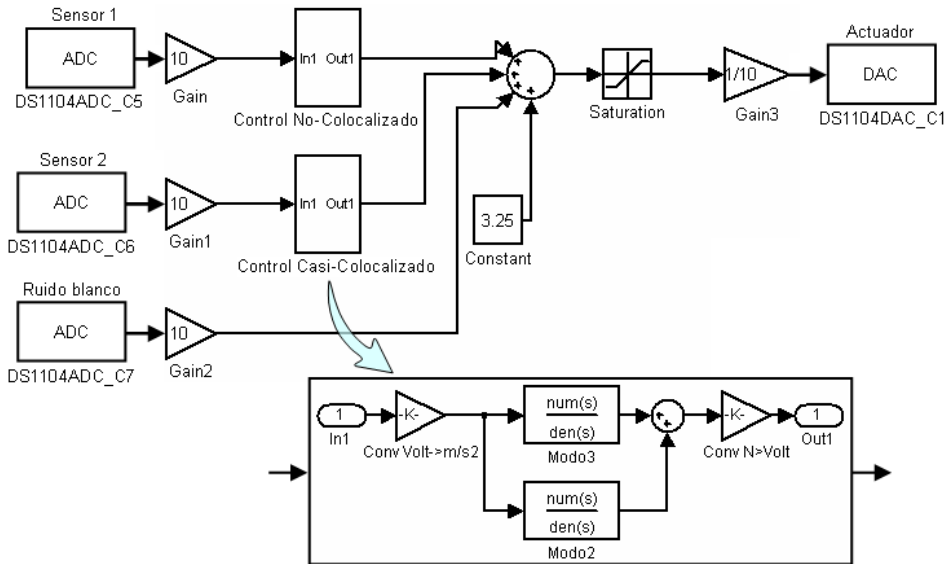
En una segunda fase, dicho segundo modo inestabilizado se ha controlado con el mismo sensor *no-colocalizado*, gracias a que entre el primer y segundo modos existe una antiresonancia, por lo cual con dicho sistema de control, controlando el segundo modo no existe ningún riesgo de inestabilizar el primer modo. En este caso el segundo modo ha sido controlado con una ganancia de 1,5 y el tercero con una de 2.

En la figura 5.30 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.

En las FRF-s representadas en la figura 5.31 se ve cómo el tercer modo ha sido amortiguado sin riesgo de inestabilizar el segundo, pero al haber aumentado la ganancia del control del tercer modo la respuesta de los modos de mayor orden sí ha aumentado de amplitud. Estos modos han sido los de las siguientes frecuencias: 1011 Hz, 1049 Hz, 1147 Hz y 1208 Hz. La característica que presentan todos ellos es que tienen el residuo de la función de transferencia del sensor 1 de signo contrario al del tercer modo. Por tanto la influencia del control *no-colocalizado* del tercer modo en estos cuatro modos es nefasta.

En la tabla 5.11 se han señalado las variaciones que ha habido en la frecuencia natural, en la amplitud de la FRF y en el amortiguamiento relativo de seis modos. En ella se observa que la amplitud del segundo modo se ha reducido en 10 dB y que su amortiguamiento relativo es mayor que la que tenía originalmente sin control. Dicho modo, con control *no-colocalizado* del segundo modo, tiene mucho menos riesgo de inestabilizarse que en el caso de que solo se controlase el tercer modo con el control *no-colocalizado*. En este caso el tercer modo tiene un amortiguamiento relativo de 0,153 y la amplitud se ha reducido en comparación con el sistema original en 23 dB.

Los modos cuarto, quinto, sexto y séptimo, con este control *no-colocalizado* del segundo y tercer modos, tienen mayor riesgo de inestabilizarse, pues como puede verse

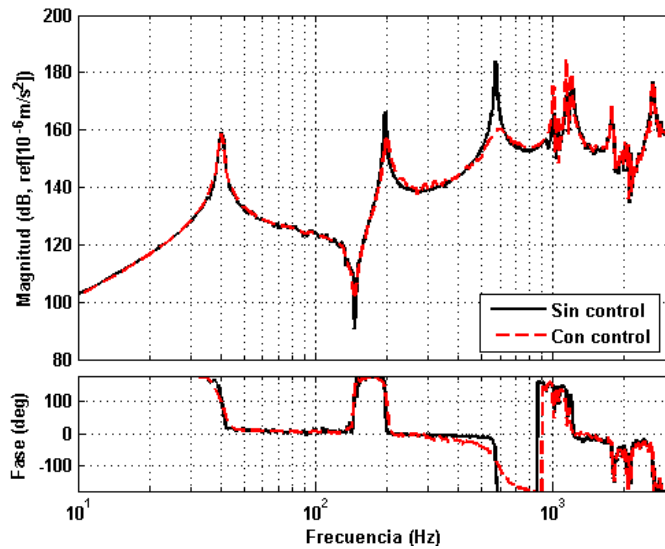


**Figura 5.30:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado* del tercer modo y estabilización del segundo modo

la amplitud de dichos modos en la función de respuesta en frecuencia ha aumentado de 5 a 16 dB. El aumento que han tenido depende del valor del residuo de dicho modo, de cuánto de lejos esté del modo controlado. El que menor valor del residuo tiene es el quinto modo y los que mayor son el sexto y el séptimo; razón por la cual la influencia en el quinto modo no es tan perjudicial como en el sexto.

En las figuras 5.32 se han representado las respuestas temporales con y sin control del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos. En ellas se puede ver que la amplitud del segundo y tercer modos es menor que en el sistema original sin control; en cambio en los modos cuarto, quinto, sexto y séptimo la respuesta temporal ha aumentado, debido a que el signo del residuo de dichos modos es contrario al tercer modo, el cual ha sido controlado con una ganancia que ha modificado la respuesta en los cuatro siguientes modos. En cambio a partir de estos modos, los siguientes modos no han aumentado en amplitud debido a que el signo de sus residuos es igual al del tercer modo, y además están mucho más lejos de las frecuencias controladas.

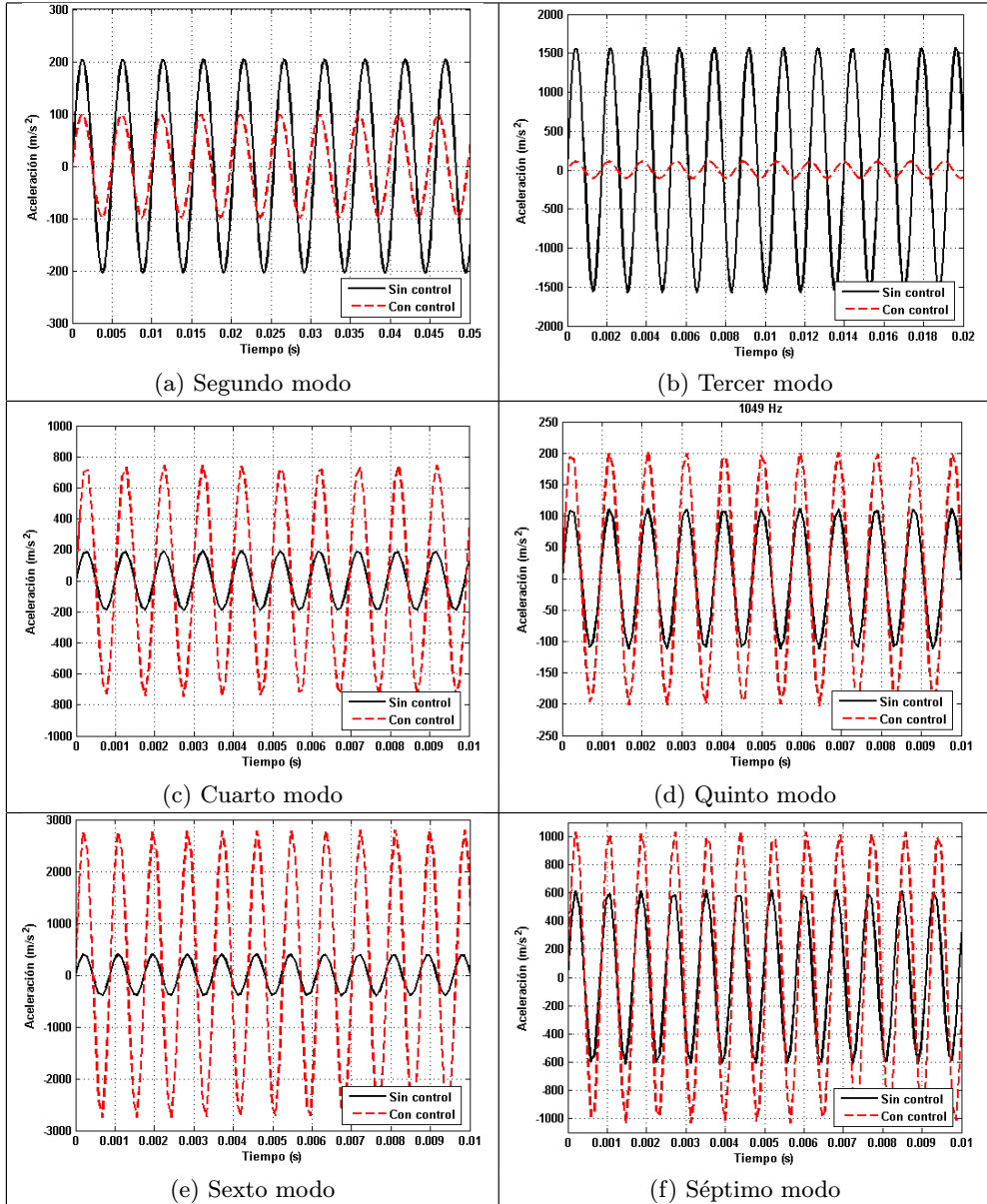
Aunque el segundo modo se haya estabilizado con el mismo sensor *no-colocalizado*, por las características descritas anteriormente, para poder estabilizar el cuarto, quinto, sexto y séptimo modos se ha utilizado el sensor *casi-colocalizado*. La utilización de este sensor está respaldada por la existencia de las antiresonancias entre el segundo y el último modos del rango de frecuencias que se ha representado.



**Figura 5.31:** FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador con control *no-colocalizado* del tercer y segundo modos

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	201	159,85	0,0219
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	591	160,65	0,153
Cuarto modo	Sin control	1011	165,62	0,006
	Con control	1007	177,45	0,00242
Quinto modo	Sin control	1049	160,98	0,0041
	Con control	1047	166,09	0,00312
Sexto modo	Sin control	1140	172,06	0,0049
	Con control	591	188,94	0,0011
Séptimo modo	Sin control	1208	175,82	0,008726
	Con control	1195	180,33	0,00414

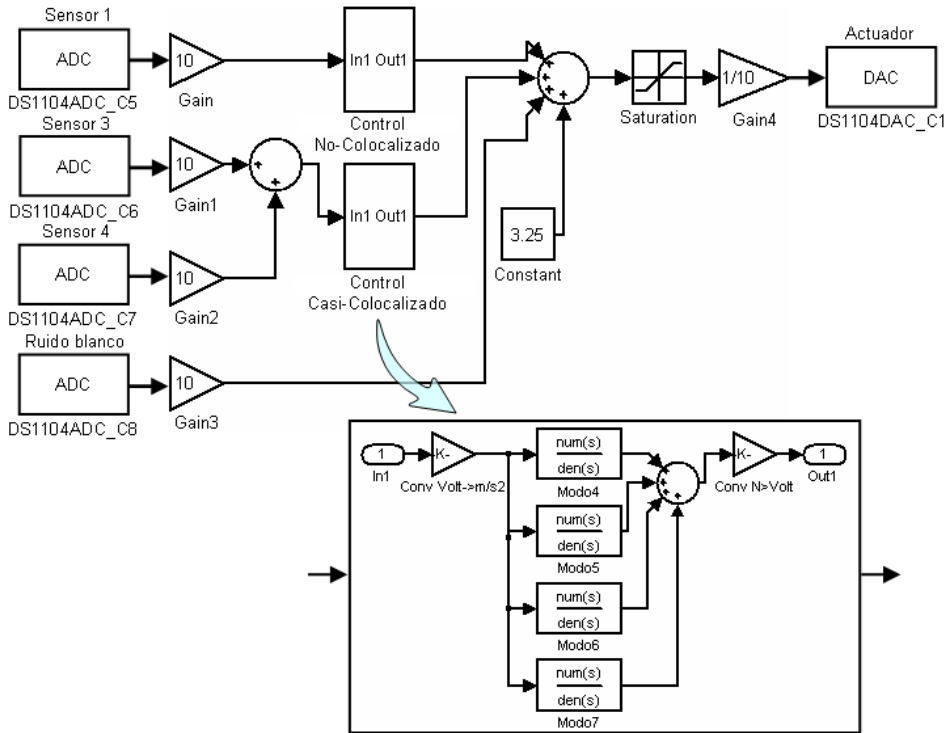
**Tabla 5.11:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del tercer y segundo modos



**Figura 5.32:** Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos sin control y con control *no-colocalizado* del tercer y segundo modos

### 5.2.3.3. Control del tercer modo y estabilización del segundo, cuarto, quinto, sexto y séptimo

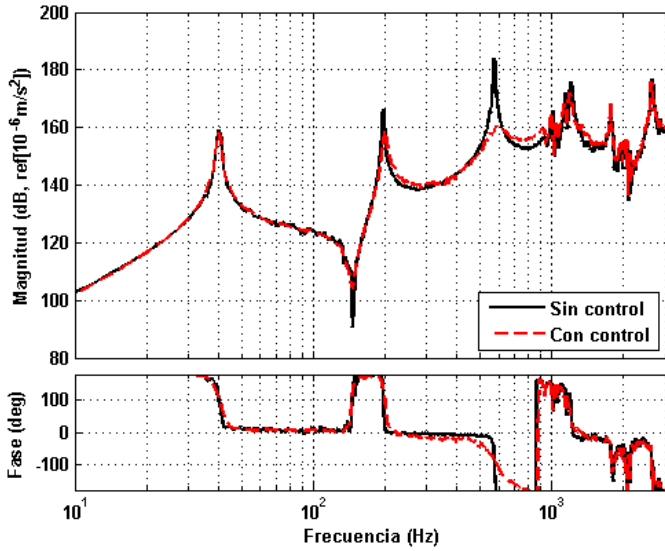
Por último se ha controlado, el segundo modo con una ganancia de 1,5 y el tercero con una de 2 con el sensor *no-colocalizado*, y el cuarto, quinto, sexto y séptimo con 0,01 con el sensor 2 (figura 5.2). En la figura 5.33 se puede observar el esquema de SIMULINK empleado en este experimento.



**Figura 5.33:** Diagrama de bloques de SIMULINK del control *no-colocalizado* del tercer modo y estabilización del segundo, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos

Como en los casos anteriormente descritos los parámetros del filtro de control han sido calculados empleándose el método del *punto de corte* con datos experimentales. Con estos filtros el sistema de control es estable; las FRF-s del sistema con dicho control entre el sensor 1 y actuador, con y sin control, pueden verse en la figura 5.34. En ella se puede ver que la FRF con control no ha aumentado en amplitud en los modos del rango de frecuencias estudiado. En la respuesta vibratoria se puede observar que ha habido una reducción del pico en el tercer modo, al tiempo que el segundo y el cuarto modos no presentan riesgo de inestabilización. Además, en el resto de las frecuencias las dos FRF-s, con y sin control, coinciden, sin la aparición de ningún pico adicional en los tres modos controlados.

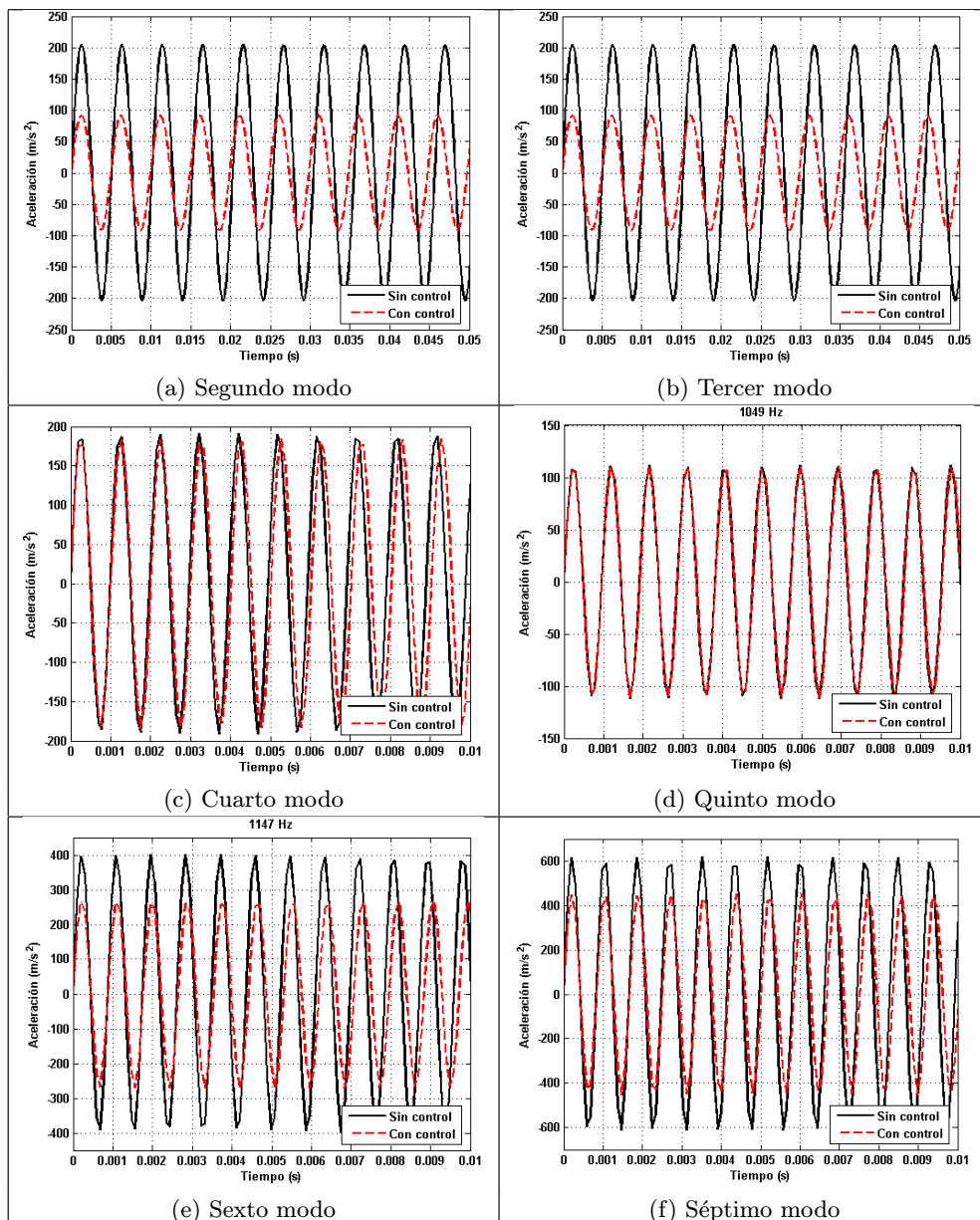
En la tabla 5.12 se han indicado las variaciones de los modos que han sido contro-



**Figura 5.34:** FRF-s del sistema, con y sin control, del sensor 1 con respecto a la tensión del actuador con control *no-colocalizado* del segundo y tercer modos y con control *casi-colocalizado* del cuarto, quinto, sexto y séptimo modos

		Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	Amortiguamiento relativo (%)
Segundo modo	Sin control	195,5	169,39	0,00383
	Con control	201	159,22	0,0219
Tercer modo	Sin control	572,5	183,70	0,00465
	Con control	591	160,59	0,153
Cuarto modo	Sin control	1011	165,62	0,006
	Con control	1007	165,31	0,007
Quinto modo	Sin control	1049	160,98	0,0041
	Con control	1047	160,89	0,0042
Sexto modo	Sin control	1140	172,06	0,0049
	Con control	591	168,66	0,00382
Séptimo modo	Sin control	1208	175,82	0,008726
	Con control	1195	173,08	0,0122

**Tabla 5.12:** Variación de la amplitud y del amortiguamiento relativo del segundo y tercer modos sin control y con control *no-colocalizado* del tercer y segundo modos



**Figura 5.35:** Respuesta temporal del sensor 1, excitando a las frecuencias del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos sin control y con control *no-colocalizado* del segundo y tercer modo y *casi-colocalizado* del cuarto, quinto, sexto y séptimo modos

lados. En ella se puede ver que la amplitud del tercer modo, que era la que se deseaba controlar para reducir el ruido, se ha reducido en 13 dB y que el amortiguamiento que se ha obtenido ha sido de 0,153. El resto de los modos tienen una amplitud parecida o menor a la que tenían en el sistema original sin control.

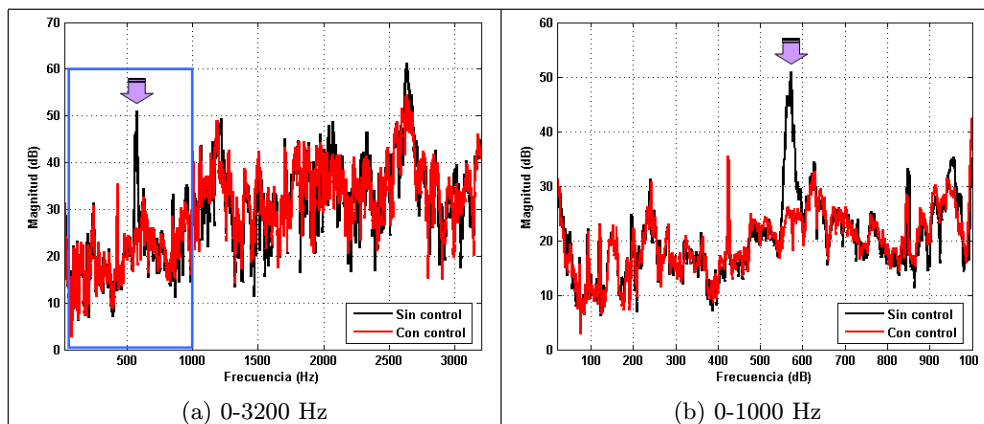
En las figuras 5.35 se han representado las respuestas temporales del sensor 1, excitando a la frecuencia del segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo modos. En ellas se puede ver que los cuatro últimos modos tienen una respuesta menor o muy parecida al sistema sin control.

Empleando un control SIMO (*Single Input Multiple Output*) en la viga empotrada libre con un único actuador y dos sensores, uno para controlar y estabilizar y el otro únicamente para estabilizar, la reducción de ruido queda claramente de manifiesto en las figuras 5.36 (rango de 0-3200 Hz y rango de 0-1000 Hz). La reducción que ha habido en la frecuencia de 572 Hz ha sido de aproximadamente 25 dB; reducción perceptible por el oído humano. En el resto de las frecuencias los dos espectros de ruido, tanto con control como sin ella, coinciden.

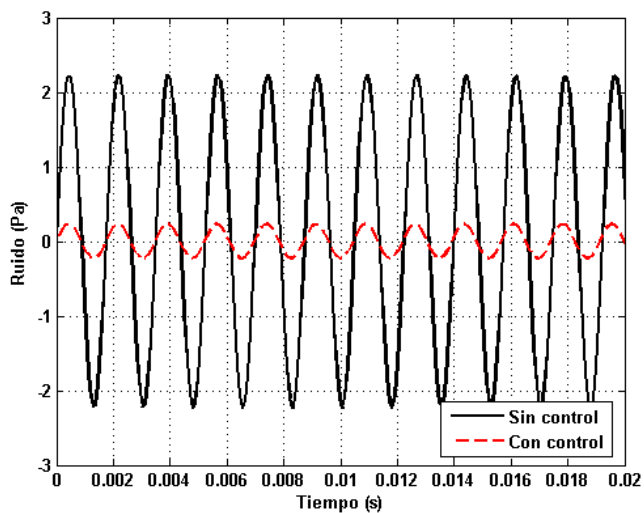
En la figura 5.37 se ha representado la respuesta temporal del ruido cuando se ha excitado la viga a la frecuencia natural del tercer modo con y sin control. En ella se puede ver que la reducción en ruido que ha habido a dicha frecuencia es de 2 Pa.

Se puede observar cómo con la técnica de estabilización desarrollada en esta tesis se ha conseguido reducir el ruido radiado por una viga empotrada libre mediante el control *no-colocalizado* de uno de los modos más destacados en el espectro del ruido.





**Figura 5.36:** Espectro de ruido radiado por la viga empotrada libre, con y sin control, en un rango de 0 a 3200 Hz



**Figura 5.37:** Respuesta temporal del ruido emitido por la viga, excitándola a la frecuencia natural del tercer modo, con y sin control

## 5.3. Aplicación en una maqueta del bastidor de una punzonadora

### 5.3.1. Introducción

Esta tesis está enmarcada dentro de un proyecto europeo llamado “Noiseless”, cuyo objetivo era reducir el ruido radiado por una punzonadora industrial Goiti PGA-4.

Antes de pasar a describir la maqueta del bastidor de la punzonadora se va a referir muy brevemente el proceso de punzonado, que habitualmente suele asociarse con procesos mecánicos relativamente simples, de reducida aportación tecnológica y de escaso valor añadido. Sin embargo la realidad es muy diferente, debido a que estos procesos, al igual que otros procesos de tipo mecánico, están fuertemente influenciados por factores muy diversos relacionados con la máquina, las herramientas, el material, las características geométricas de la pieza o el propio entorno del proceso.

El punzonado es una operación de corte de chapa o lámina, generalmente en frío, mediante un dispositivo mecánico formado por dos herramientas: el punzón y la matriz. La aplicación de una fuerza de compresión sobre el punzón obliga a éste a penetrar en la chapa, creando una deformación inicial en régimen elastoplástico seguida de un cizallamiento y la rotura del material por propagación rápida de fisuras entre las aristas de corte del punzón y de la matriz, tal y como se ve muestra en la figura 5.38. El proceso termina con la expulsión de la pieza cortada, pudiendo ser el producto final tanto la pieza cortada como la chapa restante.

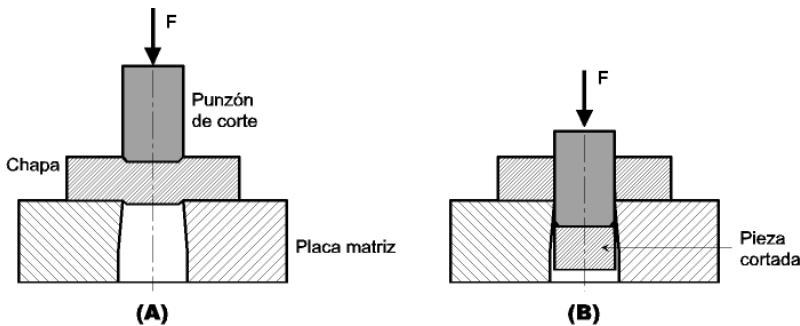


Figura 5.38: Esquema del proceso de punzonado

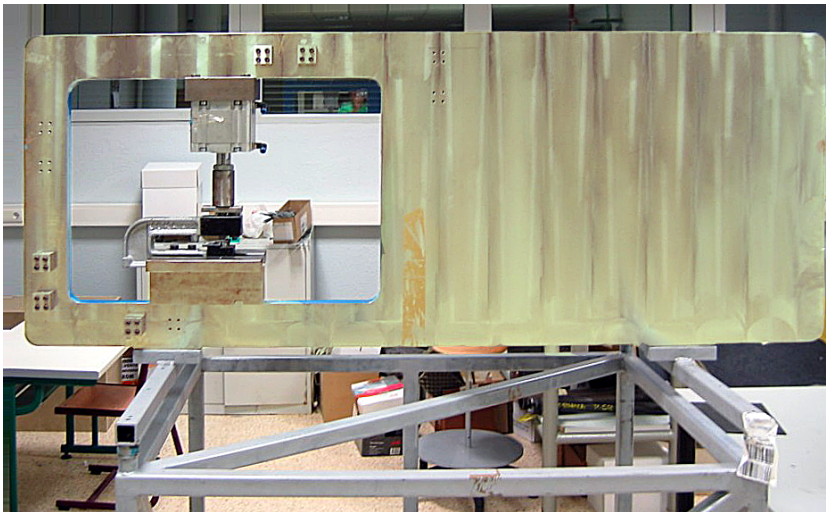
Una de las primeras tareas realizadas sobre la punzonadora consistió en la caracterización de su comportamiento vibro-acústico y en la identificación de las principales fuentes de ruido. En esta fase se observó que la principal fuente de ruido era la vibración del bastidor. Se concluyó, pues, que el comportamiento sonoro de la máquina tenía un origen estructural, producido por una estructura de muy alta rigidez. Así pues, se decidió realizar un banco de ensayos para poder experimentar en ella las técnicas de control de ruido.

### 5.3.2. Descripción de la plataforma de ensayo

Para diseñar el banco de ensayos se partió de un modelo de elementos finitos en el cual se calcularon los modos de vibración, que se compararon con los medidos experimentalmente en la punzonadora Goiti PGA-4, validando de esta manera el modelo de banco.

El banco de ensayos (figura 5.39) consta de tres partes principales: el bastidor, el sistema de punzonado y el sistema de alimentación.

- El bastidor: es la estructura objeto de estudio del banco de ensayos, la cual está apoyada en dos soportes de acero encima de una estructura metálica.
- El sistema de punzonado: la parte superior del sistema está formada por el portador del cilindro, el cilindro y el golpeador; el portador del cilindro es la pieza que une el bastidor con el cilindro. La parte inferior la componen el portador de la unidad de punzonado y la unidad de punzonado. El banco fue excitado mediante este punzón neumático, que también puede verse en la figura 5.39.
- El sistema de alimentación: es el encargado de la alimentación del sistema de punzonado.



**Figura 5.39:** Banco de ensayos del bastidor de la punzonadora

#### 5.3.2.1. Equipo empleado

El equipo que se ha utilizado para realizar el experimento de control en la maqueta del bastidor de la punzonadora incluye:

- Tres acelerómetros Brüel & Kjær 4370, con sus amplificadores de carga Brüel & Kjær 2644.
- Dos actuadores piezoeléctricos PPA40M de CEDRAT Technologies (800 N, -20 ... 150 V).
- Un actuador piezoeléctrico PPA40L de CEDRAT Technologies (3500 N, -20 ... 150 V).
- Un amplificador de potencia LA75B-2 de dos canales de CEDRAT Technologies (ganancia de 20).
- Un amplificador de potencia LA75C de un canal de CEDRAT Technologies.
- Una tarjeta de control dSPACE DS1104 R&D.
- Software de adquisición de datos IDEAS-TEST.
- Un PC Pentium para el diseño del controlador.
- Un ordenador portátil para postprocesar las señales.
- Como generador de señal de ruido blanco se ha utilizado IDEAS-TEST.

El ancho de banda del actuador PPA40L con el amplificador LA75C es de hasta 800 Hz, y el de los actuador PPA40M con el amplificador LA75B es de hasta 500 Hz, según datos proporcionados por CEDRAT Technologies.

El controlador se ha implementado en el sistema dSPACE a una frecuencia de muestreo de 10 kHz; la programación del control se ha realizado en SIMULINK / MATLAB, siendo el algoritmo de la integración temporal el Runge-Kutta de quinto orden. Finalmente el fichero de SIMULINK / MATLAB se convierte a lenguaje máquina y se descarga al sistema de dSPACE.

### 5.3.2.2. Análisis vibroacústico

Con el objetivo de identificar los modos que más ruido radiaban cuando el bastidor se excitaba mediante el punzón neumático, en un primer momento se realizó un análisis modal del banco de ensayo hasta los 500 Hz. En la siguiente tabla se han indicado las frecuencias naturales y los amortiguamientos relativos que se obtuvieron.

Para identificar los modos más radiantes en la maqueta del bastidor de la punzonadora se realizó una medición de ruido a una distancia de dos metros desde el centro de gravedad de la maqueta excitando el bastidor golpeándolo con el punzón rítmicamente.

En la gráfica del espectro de ruido (figura 5.40) se puede observar que a la frecuencia de 375 Hz se produce el pico de máximo ruido. Así pues el siguiente paso consistió en hallar las posiciones óptimas de actuador y sensor para poder controlar dicho modo, pero además de para dicho modo también se hallaron las posiciones óptimas para los modos que están cerca de dicha frecuencia (346,5 Hz, 461,3 Hz, 527,5 Hz y 616,3 Hz).

Modo	$\omega_k$ (Hz)	$\xi_k$ (%)
1	41,25	4,33
2	96,25	3,385
3	117,5	3,034
4	127,5	3,446
5	168,8	2,134
6	200	1,493
7	268,8	2,311
8	295	0,726
9	312,5	1,203
10	346,3	1,073
11	375	0,67
12	461,3	1,054

Tabla 5.13: Parámetros del análisis modal

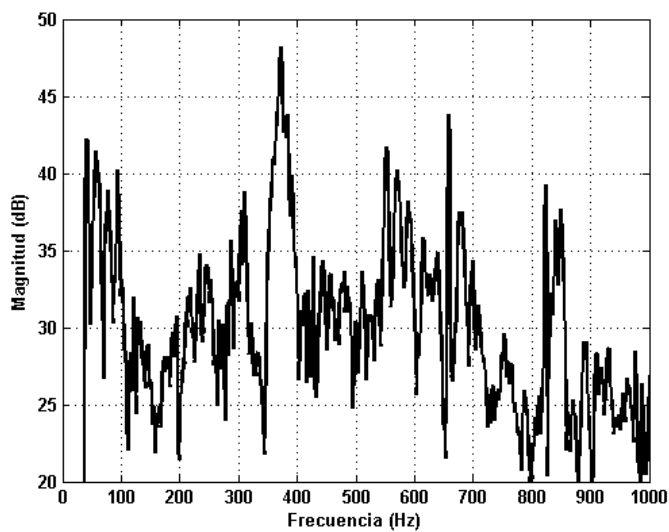
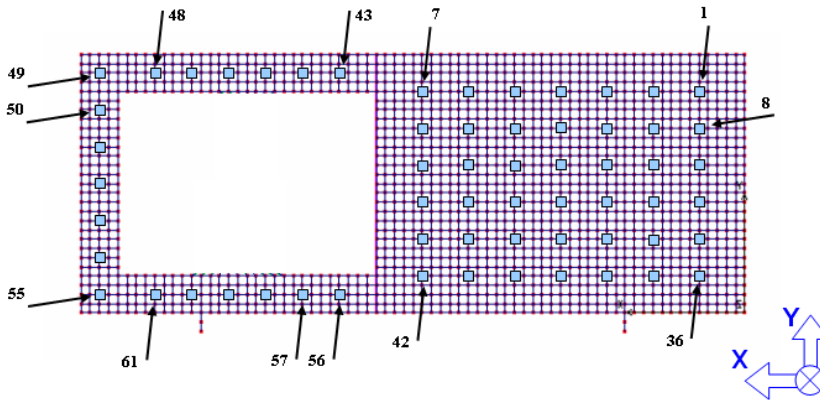


Figura 5.40: Espectro de ruido del modelo del bastidor excitando con el punzón

### 5.3.2.3. Colocación de actuadores y sensores

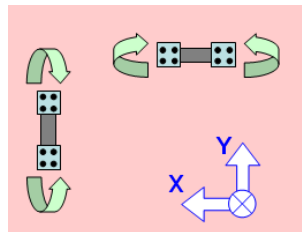
Con la intención de reducir el pico de ruido de 375 Hz se han hallado las posiciones óptimas del actuador y del sensor con la técnica descrita en el tercer capítulo (apartado 3.4.1) para los modos que se encuentran cerca de dicho pico. Para ello se ha utilizado un algoritmo de posicionamiento de actuadores y sensores desarrollado para estructuras flexibles basado en la norma  $H_2$ . El algoritmo consiste en determinar la norma para la función de transferencia de cada combinación de modo, actuador y sensor. Basado en esas normas se generan las matrices de los índices de posición de actuadores y sensores para cada modo considerado. Posteriormente las matrices se evalúan y se obtienen simultáneamente las posiciones óptimas del actuador y del sensor allí donde se maximice la norma de cada modo.

Las posibles posiciones de actuador y sensor que se han empleado se pueden observar en la figura 5.41.



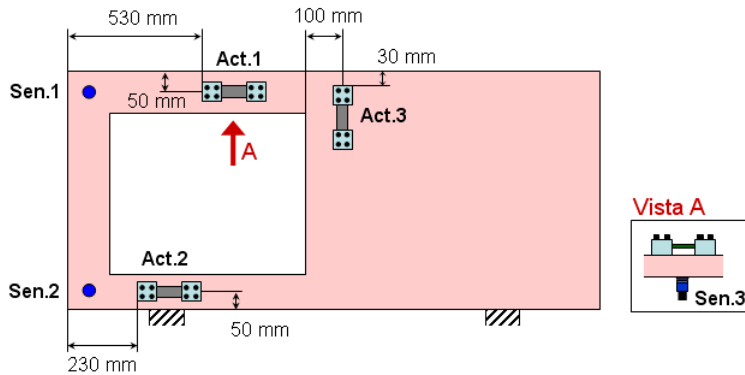
**Figura 5.41:** Posiciones posibles de actuadores y sensores en el modelo del bastidor

Las posiciones posibles de sensores han sido para medir las aceleraciones en el eje perpendicular (eje Z) al plano del bastidor. Los actuadores se han orientado tanto en el eje X, para producir momentos en el eje Y como en el eje Y, para producir momentos en el eje X (figura 5.42).



**Figura 5.42:** Actuador orientado según el eje X o el eje Y

Con dichas posiciones posibles de actuador y sensor, y aplicando las técnicas ya descritas y empleadas para el caso de la viga empotrada libre, las posiciones óptimas que se han obtenido para los actuadores y sensores se indican en la figura 5.43. En esas posiciones se han colocalizado los actuadores unidos con los dos bloques, tal como se describió anteriormente en el caso de la viga empotrada libre.



**Figura 5.43:** Posiciones óptimas de actuadores y sensores en el modelo del bastidor

Estas posiciones óptimas se han obtenido con el modelo de simulación, en el que el ajuste en frecuencias era adecuado, pero no tanto en formas modales. Además en el análisis modal experimental se obtuvieron los desplazamientos en las tres direcciones, los cuales valen para el cálculo del posicionamiento del sensor pero no del actuador, debido a que el actuador produce dos momentos de signo contrario separados por la longitud del actuador. Por tanto en este caso la optimización del posicionamiento sensor es mejor que la del actuador.

### 5.3.3. Ajuste de parámetros

En el control de los modos cercanos al pico de ruido, cada filtro se ha calculado independientemente suponiendo que la respuesta está únicamente dominada por los modos que se desean controlar. En la posición 1 se ha puesto un actuador PPA40L y en las posiciones 2 y 3 dos de tipo PPA40M (figura 5.43).

El control utilizado en este caso también ha sido de realimentación de la aceleración de segundo orden; también los parámetros del filtro se han calculado con el método del *punto de corte*. Los parámetros necesarios del sistema se han obtenido de la función de respuesta en frecuencia entre la tensión introducida en el actuador ( $V_i$ ) y la aceleración del sensor ( $\ddot{x}$ ) y del análisis modal del sistema. Para calcular los parámetros de los filtros de los controladores de cada par actuador sensor se ha excitado el modelo únicamente con un ruido blanco mediante cada uno de los actuadores; por ejemplo, para calcular los filtros de control par del actuador  $i$  y sensor  $j$  el sistema se excita con un ruido blanco el actuador  $i$ , y análogamente con los demás.

Hasta 500 Hz, la frecuencia natural de los modos y el amortiguamiento modal se han obtenido del análisis modal del sistema (tabla 5.13). A partir de ahí, la frecuencia de resonancia se ha obtenido de la función de respuesta en frecuencia y el amortiguamiento modal se ha supuesto de 1% para todos los modos, obteniéndose el residuo modal de la función de transferencia entre dichos puntos mediante la expresión 5.1, de la misma forma que se hizo en el caso de la viga empotrada libre.

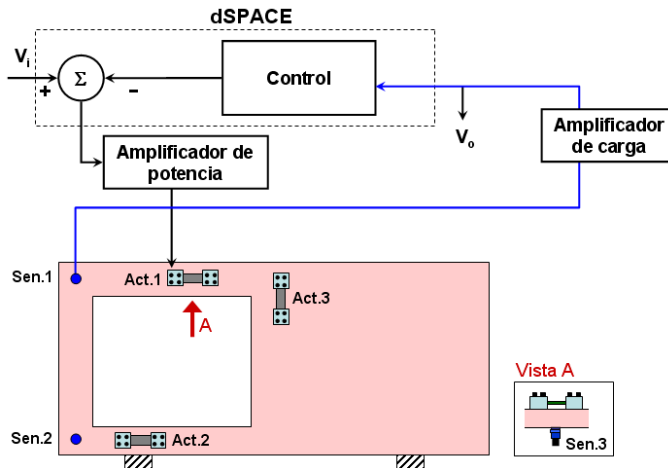
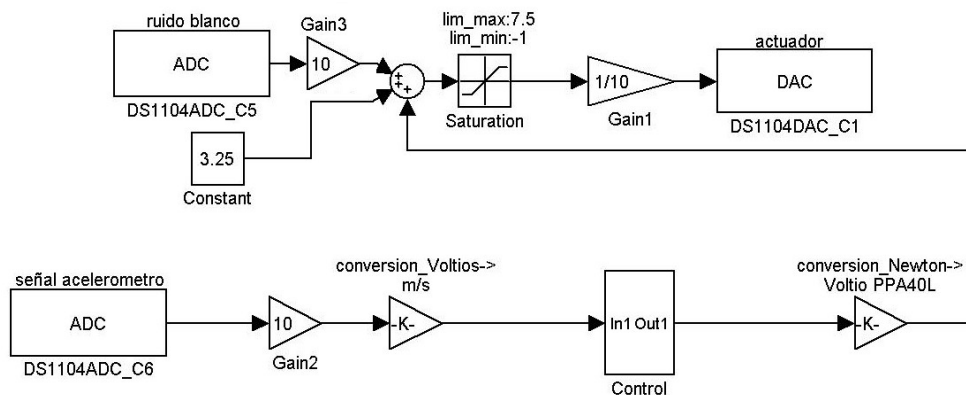


Figura 5.44: Experimento del modelo del bastidor para el ajuste de parámetros

El ajuste de los parámetros de cada par actuador sensor se ha realizado excitando el modelo del bastidor con un ruido blanco mediante el actuador; el esquema del montaje experimental puede verse en la figura 5.44. A pesar de que en la citada figura pueden verse representados todos los actuadores y sensores, en cada una de las ocasiones el experimento ha sido llevado a cabo con un único sensor y un único



actuador, cuyo diagrama de bloques de control se puede ver en la figura 5.45.



**Figura 5.45:** Diagrama de bloques de control para ajuste de parámetros

Se ha realizado el mismo experimento por cada par de actuador y sensor para ajustar así experimentalmente los parámetros del controlador. En las siguientes páginas se detallarán algunas de ellas a modo de ejemplo.

### 5.3.3.1. Actuador 1

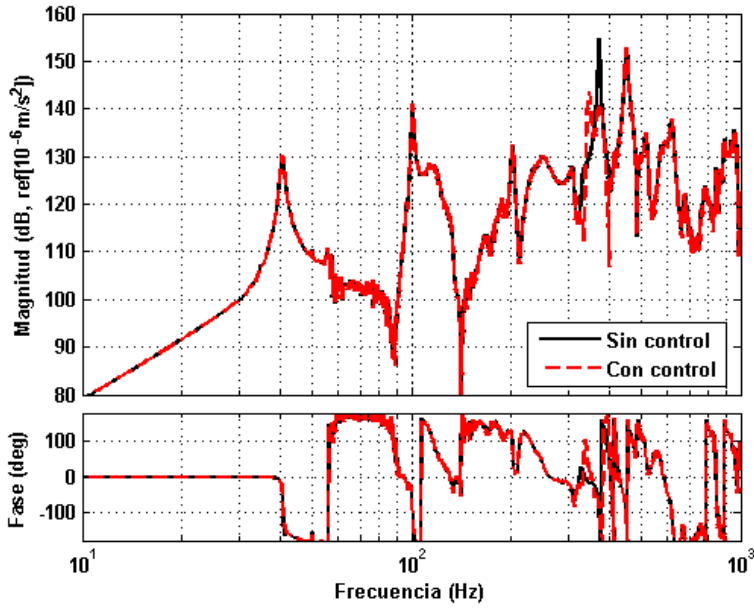
Con este actuador se han empleado dos sensores para el control de los modos. Primeramente se van a presentar los resultados del control del modo de 375 Hz con el sensor 2 (figura 5.43) y posteriormente los de los modos cercanos a dicho modo con el sensor 1 (figura 5.43).

#### 5.3.3.1.1. Sensor 2

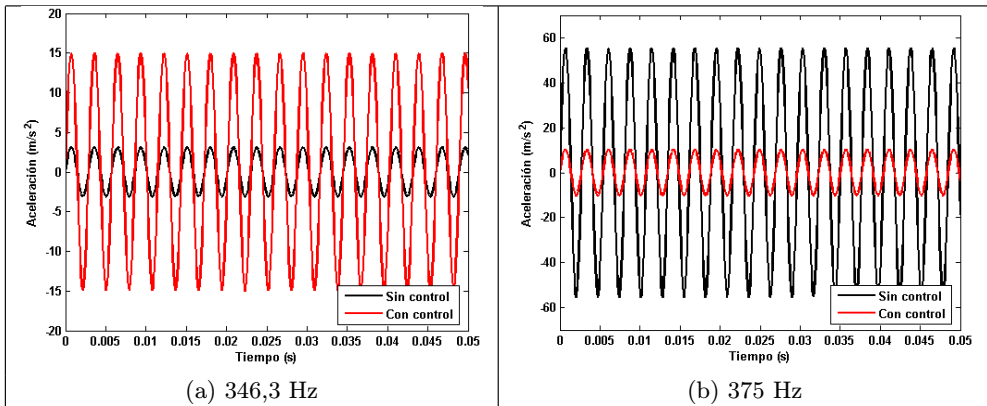
Con el actuador 1 y con el sensor 2 (figura 5.43) se ha controlado el modo de 375 Hz (figura 5.46) con unos valores de:  $g_c = 4$ ,  $\xi_c = 13,81\%$  y  $\omega_c = 375$ . En este caso se observa que se excita el modo que se encuentra a 346,3 Hz.

En la tabla 5.14 se han indicado las variaciones que ha habido en el pico de la frecuencia de resonancia del modo controlado (375 Hz) y en el que se ha excitado (346,3 Hz). En ella se puede ver que la reducción que ha habido a la frecuencia de 375 Hz ha sido de 14 dB, pero en cambio a la frecuencia de 346,3 Hz ha habido una amplificación en esos mismos 14 dB.

En la figura 5.47 también se han representado las respuestas temporales a dichas frecuencias de resonancia controlando el modo de 375 Hz. En ella se puede observar que ha habido una reducción de  $45 \text{ m/s}^2$  a la frecuencia de 375 Hz y un aumento de  $11,85 \text{ m/s}^2$  a la frecuencia de 646,3 Hz.



**Figura 5.46:** FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 2, con y sin control, del modo de 375 Hz



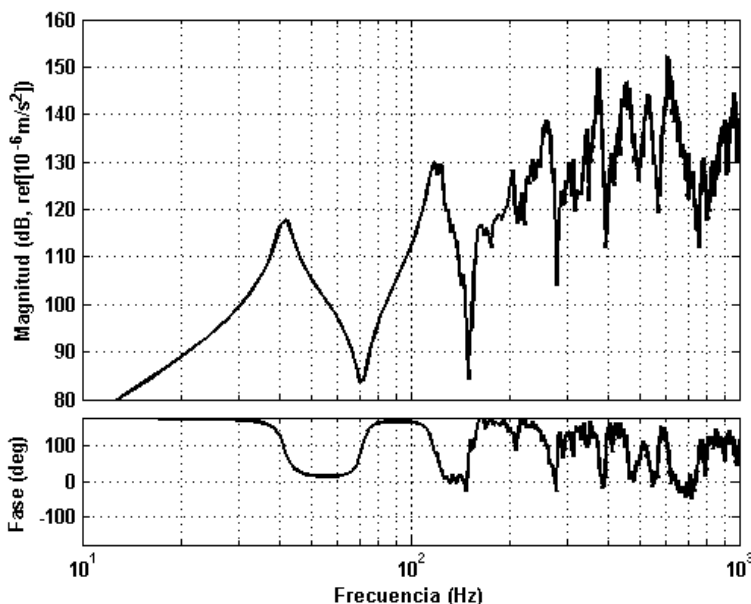
**Figura 5.47:** Respuestas temporales del sensor 2, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 375 Hz, con y sin control

Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	
346,3	Sin control	129,85
	Con control	143,50
375	Sin control	154,87
	Con control	140,21

**Tabla 5.14:** Variación de la amplitud con y sin control del par actuador 1 y sensor 2

Para controlar el modo de 346,3 Hz, que se ha excitado con el sensor 2, se ha empleado un sensor *casi-colocalizado* con el actuador, posicionado debajo del actuador en la mitad de su longitud, de la misma manera que se realizó en la viga anteriormente.

En la figura 5.48 se puede observar la FRF entre el actuador 1 y el sensor 3. En ella se ve que a ambos lados del modo de 346,3 Hz hay antiresonancias, por lo que con este sensor se estabiliza dicho modo, que había sido inestabilizado por el control *no-colocalizado* con el sensor 2 utilizado anteriormente para controlar el modo de 375 Hz.



**Figura 5.48:** FRF entre el actuador 1 y el sensor 3

El sensor 3 se ha empleado para controlar el modo que se ha excitado con el control del sensor 2 del modo de 375 Hz. En la figura 5.49 se han representado las FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 2, con y sin control. En este caso se han controlado dos modos: el de 375 Hz con el sensor 2 (control *no-colocalizado*) y el modo de 346,3 Hz con el sensor 3 (control *casi-colocalizado*). En la citada figura se puede observar cómo se produce una disminución de amplitud en los dos modos sin que se excite ningún

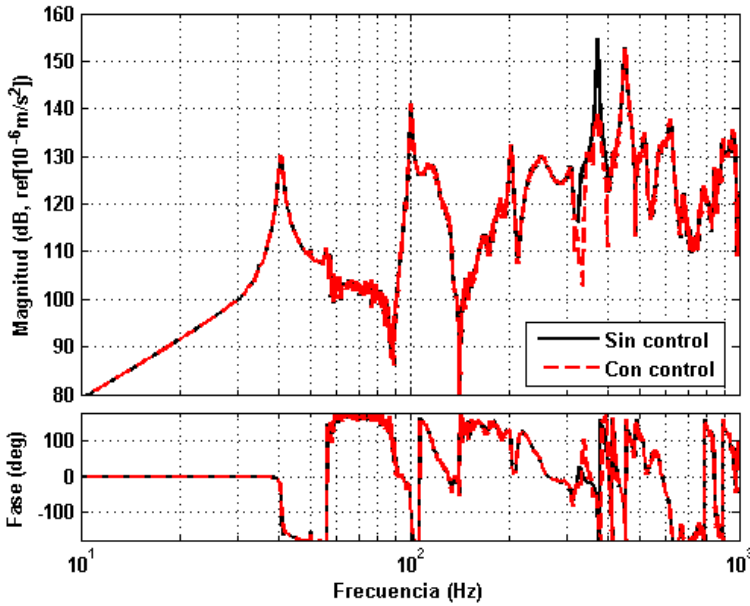


Figura 5.49: FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 2, con y sin control, de los modos de 375 Hz y de 346,3 Hz con dos sensores

Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	
346,3	Sin control	129,86
	Con control	129,70
375	Sin control	154,88
	Con control	138,92

Tabla 5.15: Variación de la amplitud con y sin control del par actuador 1 y sensor 2

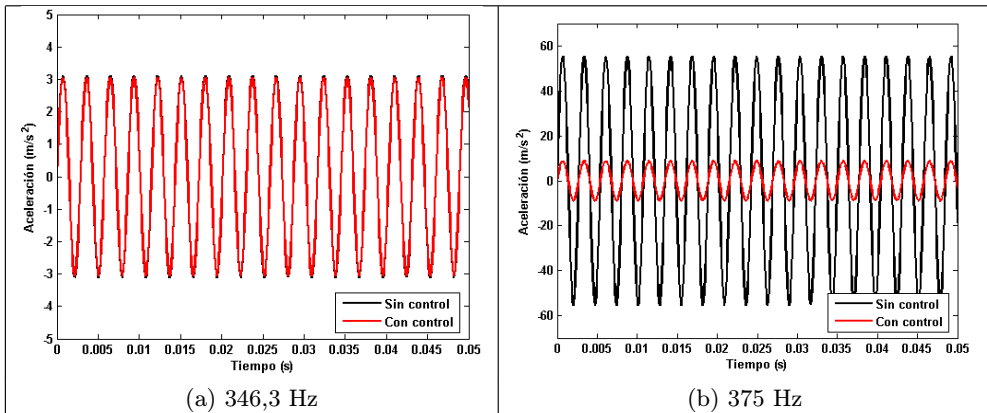


Figura 5.50: Respuestas temporales del sensor 2, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 375 Hz, con y sin control, con dos sensores

otro.

En la tabla 5.15 se han indicado las amplitudes en dB de los picos de resonancia con y sin control de los modos de 346,3 Hz y de 375 Hz de la FRF entre el sensor 2 y el actuador 1 (figura 5.49). En ella se puede ver que el pico del modo de 375 Hz se ha reducido en 16 dB y el de 346,3 Hz en 0,16 dB.

Por último en la figura 5.50 se han representado las respuestas temporales del sensor 2 excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 375 Hz. En ella se puede observar que a la frecuencia de 346,3 Hz ha habido una disminución de 26,61  $m/s^2$  y a la de 375 Hz una de 0,053  $m/s^2$ .

#### 5.3.3.1.2. Sensor 1

Con el actuador 1 y el sensor 1 (figura 5.43) se han controlado los modos de: 346,3 Hz, 461,3 Hz, 526,3 Hz y 613,3 Hz. Las FRF-s con control de dichos modos se pueden ver en las figuras 5.51, 5.52, 5.53 y 5.54 respectivamente. En ellas se puede observar que con las ganancias que se han elegido no se inestabiliza ningún otro modo, pero si se aumentasen más sí se podría inestabilizar alguno, ya que se está utilizando un control *no-colocalizado*.

Frecuencia del modo (Hz)	$\omega_c$ (Hz)	$\xi_c$ (%)	$g_c$
346.3	346,3	5,88	5
461.3	461,3	7,98	2
526.3	526,3	4,82	2
616.3	616,3	1,85	2

**Tabla 5.16:** Parámetros de los filtros de control del par actuador 1 y sensor 1

En dichas figuras también se puede observar que no se ha producido ningún otro pico adicional en el modo controlado, y que de entre todos el modo que más se ha amortiguado ha sido el de 616,3 Hz (figura 5.54). En la tabla 5.17 se han indicado las reducciones que se han obtenido con estos filtros de control en los modos que se han controlado. En ella se puede observar que la frecuencia que más reducción ha experimentado ha sido la de 616,3 Hz, con una disminución de 9 dB, mientras que la de menor reducción ha sido la de 346,3 Hz, con una reducción de 6 dB. Esto es debido a que el residuo del modo de 461,3 Hz es de signo contrario al de 346,3 Hz, lo cual limita la ganancia del controlador debido al riesgo que existe a inestabilizar el modo que está a 461,3 Hz.

En la figura 5.55, también se han representado las respuestas temporales con y sin control excitando la maqueta mediante una función sinusoidal de frecuencia igual a la de los modos que se han controlado (346,3Hz, 461,3 Hz, 526,3 Hz y 616,3 Hz). Las reducciones temporales que se han obtenido controlando estos cuatro modos han sido de: 4,78  $m/s^2$  a la frecuencia de 346,3 Hz, 29,93  $m/s^2$  a la frecuencia de 461,3 Hz, 9,26  $m/s^2$  a la frecuencia de 526,3 Hz y 7,85  $m/s^2$  a la frecuencia de 616,3 Hz.

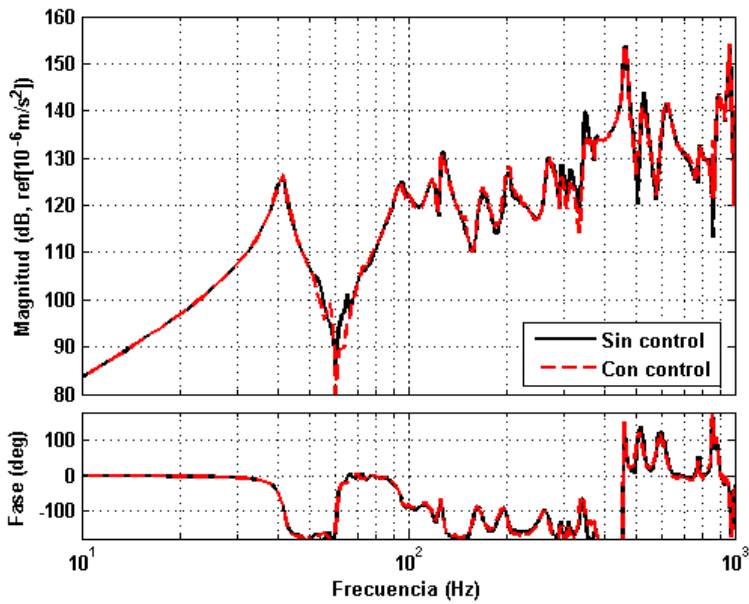


Figura 5.51: FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,1 Hz

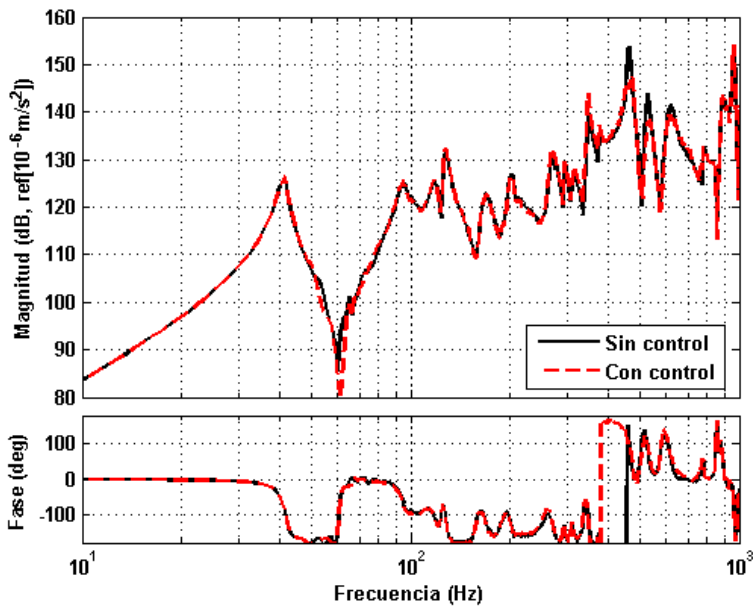


Figura 5.52: FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 461,3 Hz

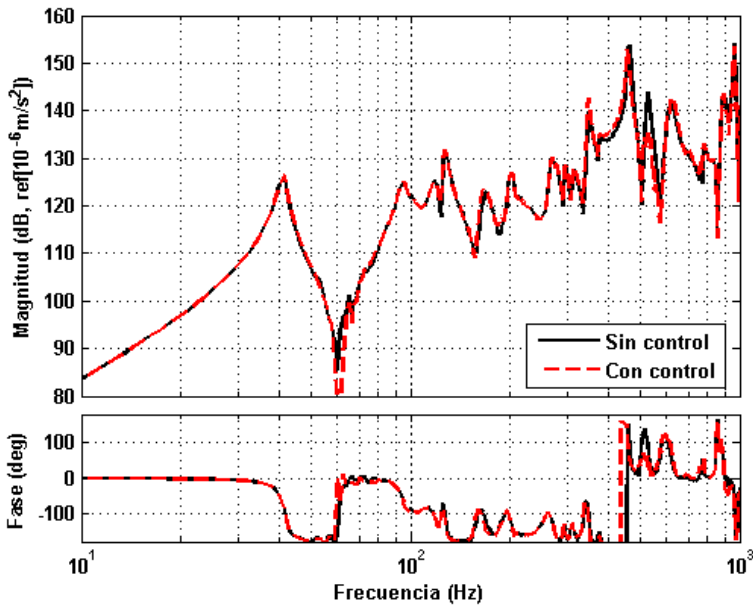


Figura 5.53: FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 526,3 Hz

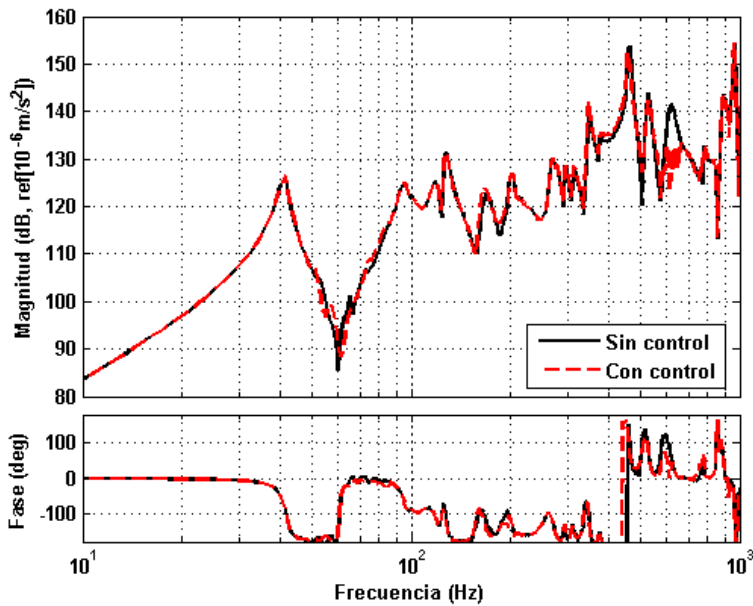
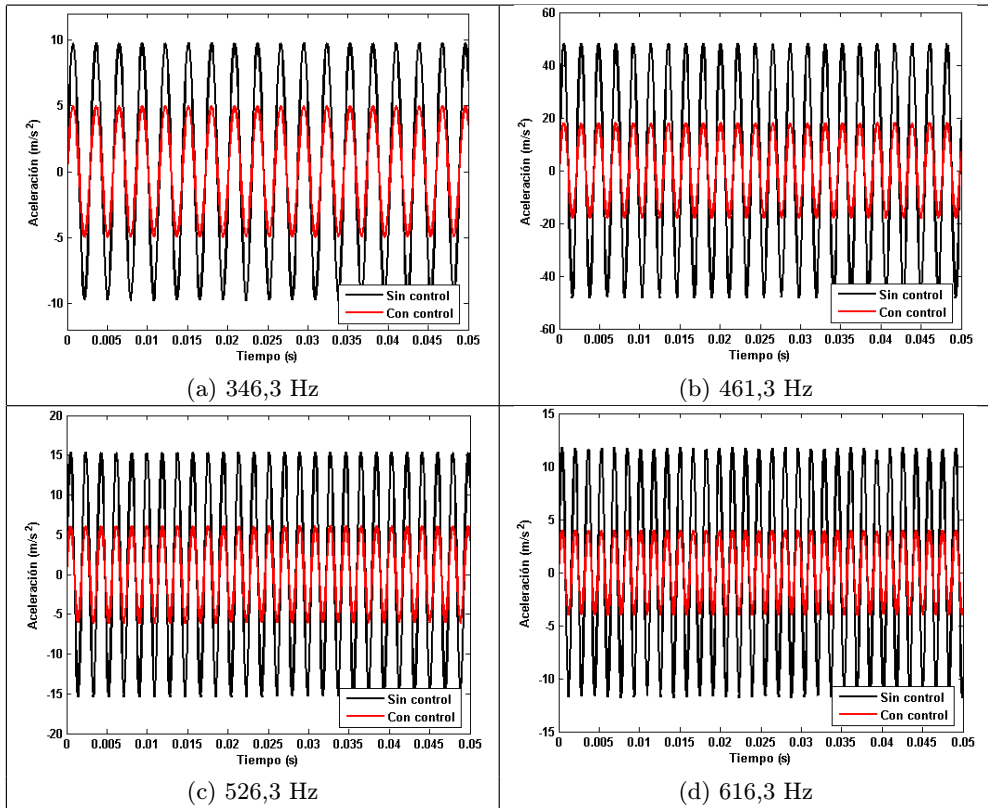


Figura 5.54: FRF-s entre el actuador 1 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 616,3 Hz



**Figura 5.55:** Respuestas temporales del sensor 1, excitando con el actuador 1 a las frecuencias de 346,3 Hz, 461,3 Hz, 526,3 Hz y 616,3 Hz, con y sin control

Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	
346,3	Sin control	139,79
	Con control	133,93
461,3	Sin control	153,69
	Con control	145,14
526,3	Sin control	143,75
	Con control	135,70
616,3	Sin control	141,41
	Con control	132,02

**Tabla 5.17:** Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 1 y sensor 1



### 5.3.3.2. Actuador 2

El actuador 2 se ha utilizado con el sensor 1 para el control de los modos de 346,3 Hz ( $g_c = 1$ ,  $\xi_c = 6,89\%$  y  $\omega_c = 346,3$ ) y de 461,3 Hz ( $g_c = 2$ ,  $\xi_c = 2,51\%$  y  $\omega_c = 461,3$ ). En este caso tampoco ha habido ninguna variación de ningún otro modo no controlado, únicamente ha tenido lugar el amortiguamiento de los modos controlados (figuras 5.56 y 5.57).

En la tabla 5.18 se han indicado las disminuciones que ha habido en las dos frecuencias de resonancia que se han controlado: en la frecuencia de 346,3 Hz de 12 dB y en la de 461,3 Hz de 9 dB.

Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	
346,3	Sin control	144,58
	Con control	132,14
461,3	Sin control	137,23
	Con control	128,85

**Tabla 5.18:** Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 2 y sensor 1

En la figura 5.58 se han representado las respuestas temporales del sensor 1 excitando a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz con el actuador 2. En ella se puede ver que la reducción que ha habido ha sido de  $12,83 \text{ m/s}^2$  a 346,3 Hz y de  $4,46 \text{ m/s}^2$  a 461,3 Hz.

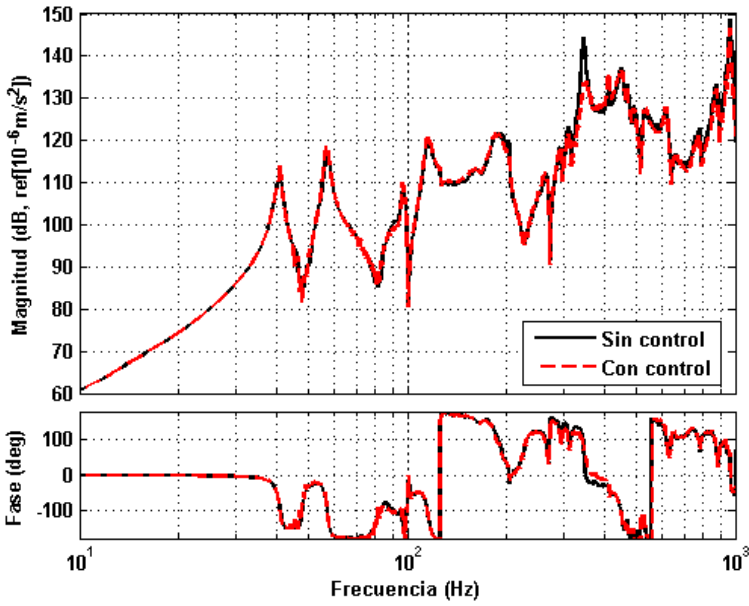


Figura 5.56: FRF-s entre el actuador 2 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,3 Hz

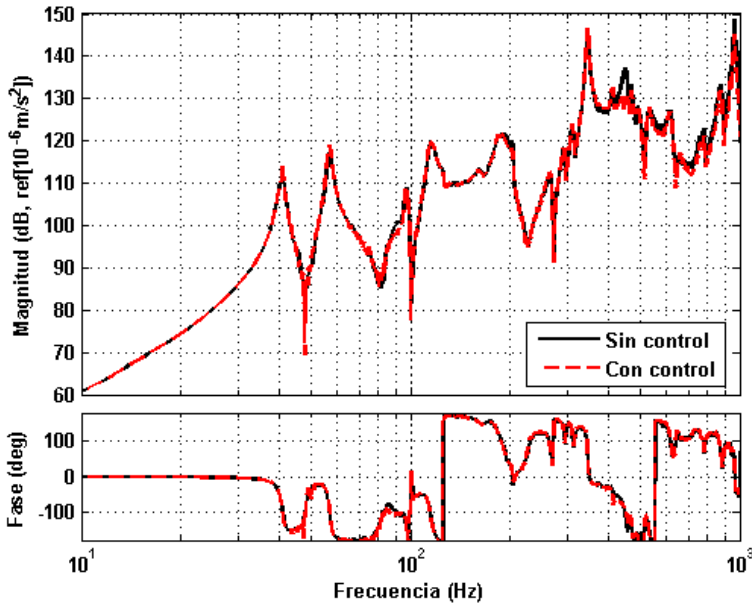
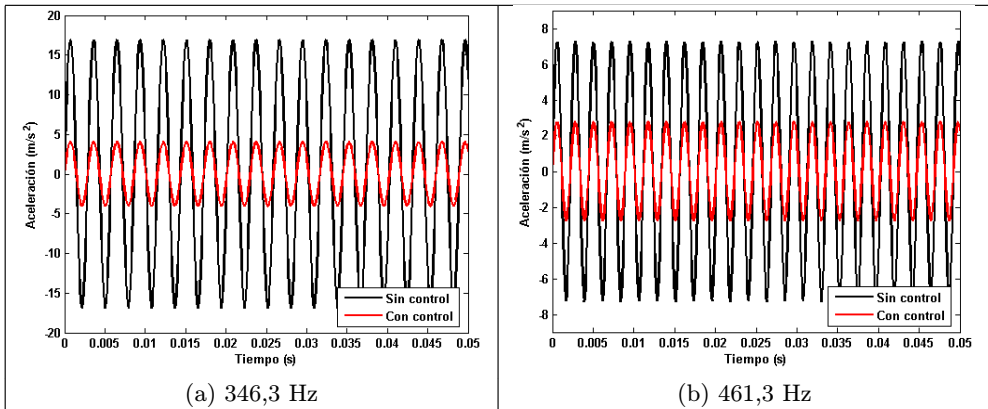


Figura 5.57: FRF-s entre el actuador 2 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 461,3 Hz



**Figura 5.58:** Respuestas temporales del sensor 1 excitando con el actuador 2 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz, con y sin control, con dos sensores

**5.3.3.3. Actuador 3**

Por último, con el actuador 3 y el sensor 1 se han controlado los modos que están a las frecuencias de 346,3 Hz ( $g_c = 5$ ,  $\xi_c = 5,27\%$  y  $\omega_c = 346,3$ ) y de 461,3 Hz ( $g_c = 1,05$ ,  $\xi_c = 2,51\%$  y  $\omega_c = 461,3$ ). En las figuras 5.59 y 5.60 se han representado las FRF-s entre el actuador y el sensor con y sin control; en ellas queda también de manifiesto que con las ganancias que se han elegido el sistema es estable y que no aparece ningún otro nuevo pico.

Las variaciones que ha habido en las amplitudes de los picos de los modos controlados se han indicado en la tabla 5.19; en ella se ve que ha habido una reducción de 8,98 dB en la frecuencia de 346,3 Hz y de 9,68 dB en la frecuencia de 461,3 Hz.

Frecuencia (Hz)	Amplitud (dB)	
346,3	Sin control	119,93
	Con control	110,95
461,3	Sin control	111,76
	Con control	102,08

**Tabla 5.19:** Variación de la amplitud, con y sin control, del par actuador 3 y sensor 1

En la figura 5.61 se ha representado la respuesta temporal del sensor 1 excitando con el actuador 3 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz. En ella se puede observar una reducción de  $0,63\text{ m/s}^2$  a la frecuencia de 346,3 Hz y una de  $0,26\text{ m/s}^2$  a la de 461,3 Hz.

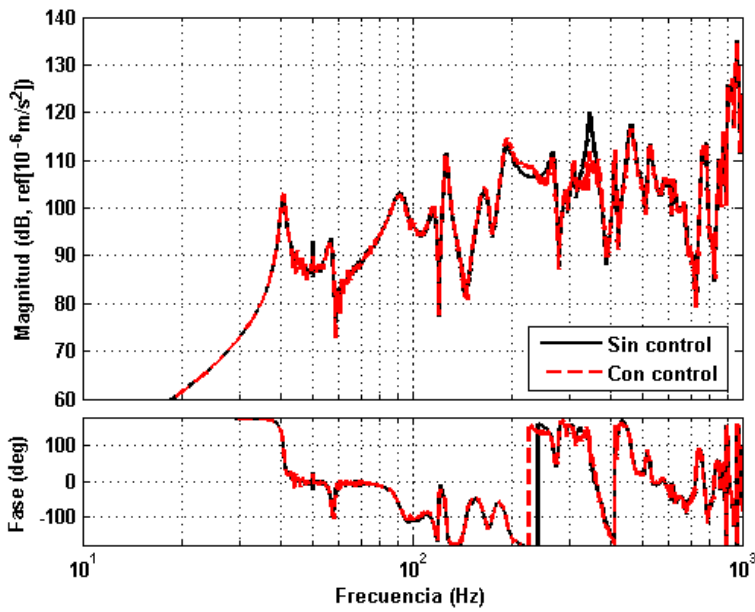


Figura 5.59: FRF-s entre el actuador 3 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 346,3 Hz

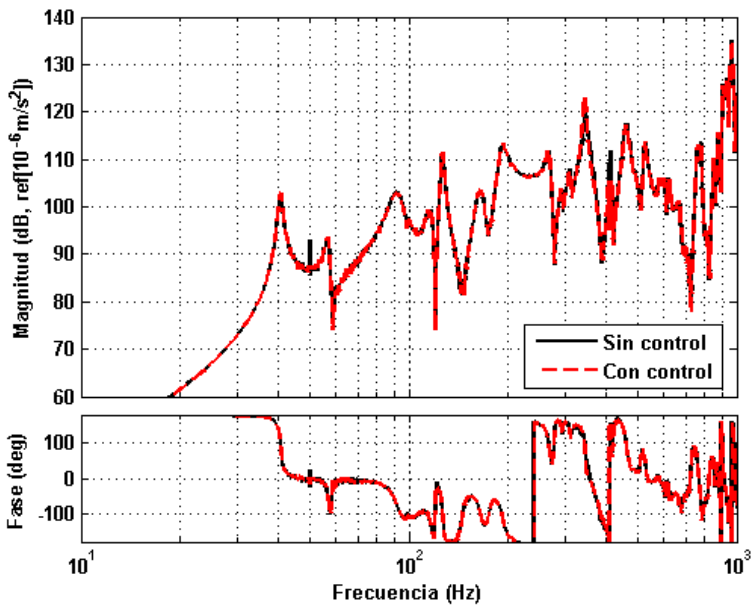
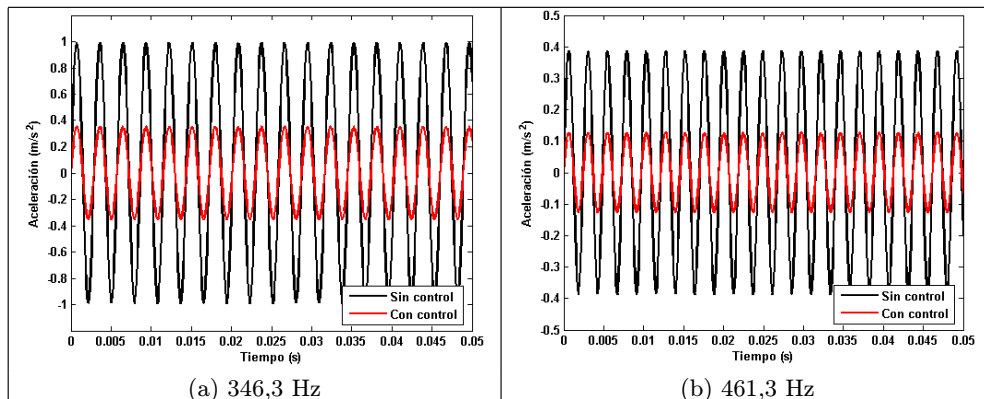


Figura 5.60: FRF-s entre el actuador 3 y el sensor 1, con y sin control, del modo de 412 Hz



**Figura 5.61:** Respuestas temporales del sensor 1, excitando con el actuador 3 a las frecuencias de 346,3 Hz y de 461,3 Hz, con y sin control, con dos sensores

## 5.4. Resultados estructurales y acústicos con control

Como resultado de todo lo anterior, con los filtros de control que se han diseñado se ha controlado el modelo del bastidor de la punzonadora golpeando con el punzón rítmicamente. En las siguientes figuras se puede observar la reducción de la vibración que ha habido en los sensores 1 y 2 y el espectro del ruido en el micrófono, que se ha posicionado a dos metros de distancia al centro de gravedad del bastidor.

El estudio experimental ha sido llevado a cabo con tres acelerómetros conectados a tres amplificadores de carga, conectando la salida de estos amplificadores a tres canales analógico-digitales (A/D) del bornario de dSPACE (figura 5.62). Otros tres canales digital-analógicos han sido usados para obtener la señal de los tres actuadores; éstas se han introducido en dos amplificadores de potencia, una de dos canales y otra de una, y finalmente su salida ha sido conectada a los actuadores (de tipo pila piezoeléctricos).

En la figura 5.63 se ha representado el diagrama de bloques de control de SIMULINK utilizado en el experimento del modelo del bastidor.

En el espectro de vibraciones del sensor 1 (figura 5.64) se observa que ha habido reducciones alrededor de las frecuencias de 230 Hz, 320Hz y 450Hz; en cambio en las cercanías de la frecuencia 100 Hz ha habido una modificación de la respuesta y alrededor de la de 50 Hz ha habido un incremento de la vibración. Aún y todo se puede ver que globalmente, entre 200 Hz y 500 Hz, ha habido una reducción de la vibración bastante importante. En el caso del sensor 2 también ha habido una reducción de vibración entre los 200 y 500 Hz, pero en este caso no es tan notoria como en el caso del sensor 1.

Si nos fijamos en el espectro de ruido (figura 5.66), vemos que ha habido una reducción de ruido de 20 dB en la frecuencia de 375 Hz; reducción menor que en

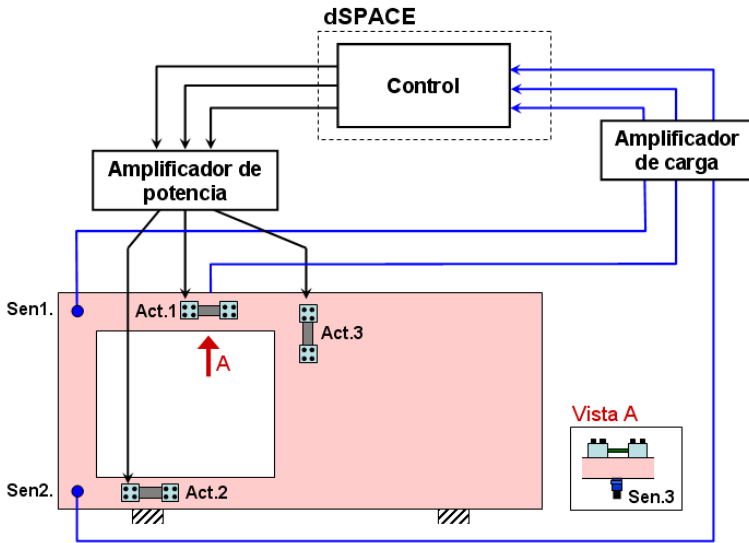


Figura 5.62: Experimento del modelo del bastidor de la punzonadora

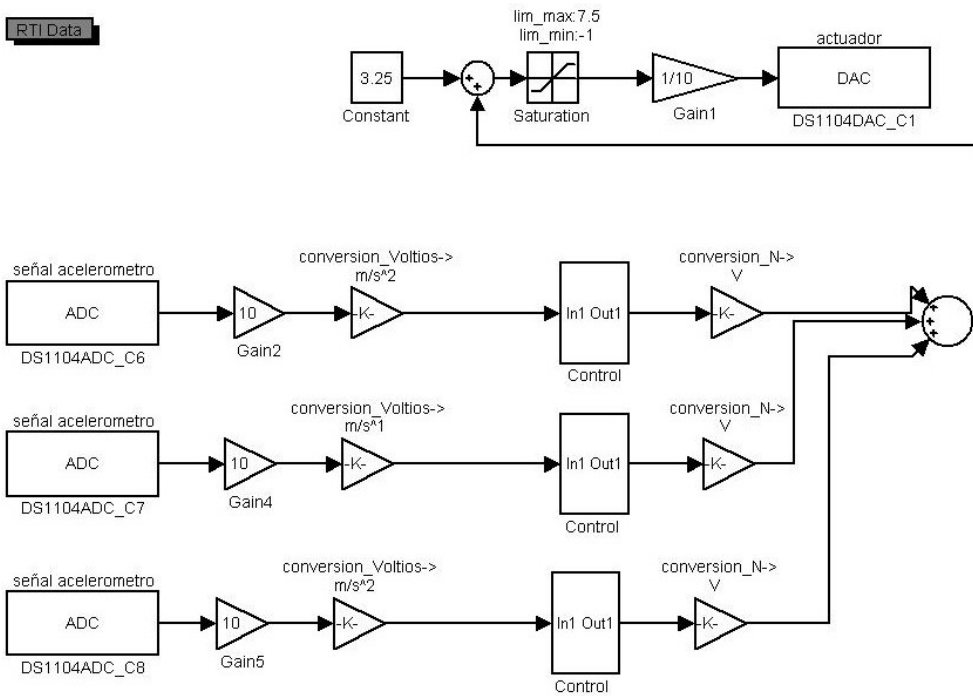
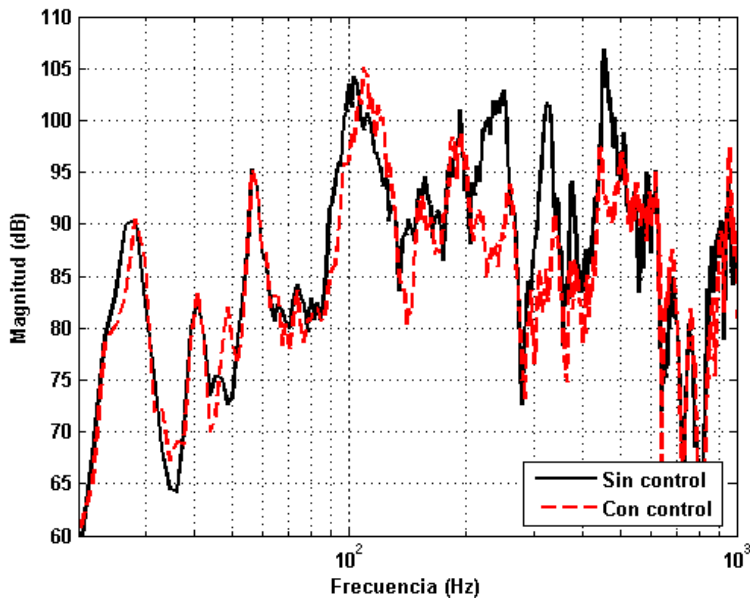
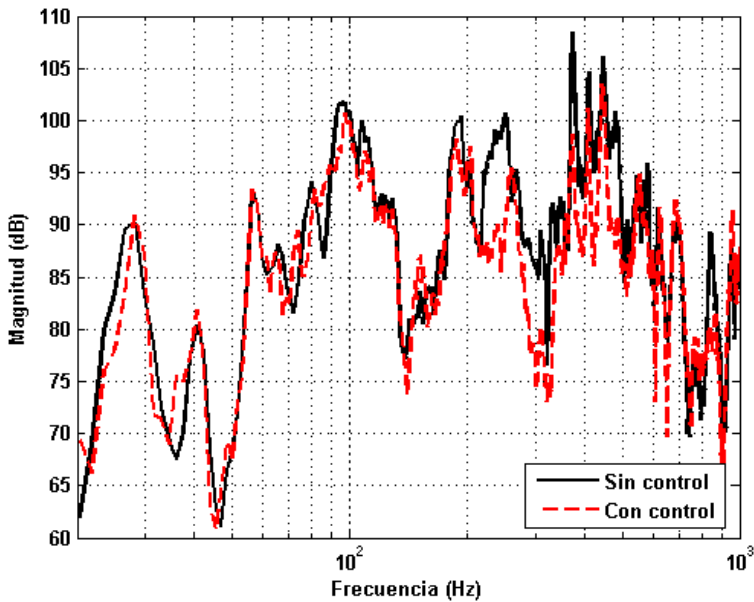


Figura 5.63: Diagrama de bloques de SIMULINK para el control del modelo del bastidor



**Figura 5.64:** Espectro de vibraciones en el sensor 1, con y sin control, excitando el modelo con el punzón



**Figura 5.65:** Espectro de vibraciones en el sensor 2, con y sin control, excitando el modelo con el punzón

el caso de la viga empotrada libre. En este caso, y debido a que se han controlado los modos más cercanos a dicho modo, se puede observar cómo entre 400 y 500 Hz también ha habido una importante reducción de ruido.

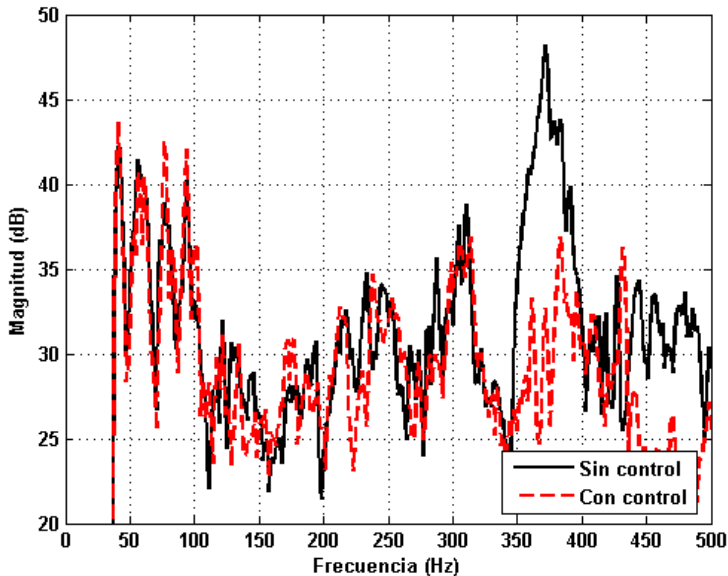


Figura 5.66: Espectro de ruido, con y sin control, excitando el modelo con el punzón

## 5.5. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a la práctica el control activo acústico estructural, utilizando actuadores piezoeléctricos de tipo pila posicionados paralelamente a la estructura a controlar. Las leyes de control empleadas han sido de realimentación de la aceleración de segundo orden, y como sensores se han utilizado acelerómetros.

En el caso de la viga empotrada libre, para el control acústico se ha realizado un control múltiple, con un actuador y dos sensores, y los filtros del control se han calculado independientemente para cada modo amortiguado. Uno de los sensores se ha situado *no-colocalizado* con el actuador, tanto para controlar el modo radiante como para estabilizar un modo inestabilizado. El otro sensor, dispuesto *casi-colocalizado* con el actuador, se ha empleado para estabilizar otro modo inestabilizado con el control *no-colocalizado*. El motivo de la utilización de un sensor u otro para estabilizar los modos inestabilizados con el control *no-colocalizado* ha sido que alrededor del modo que se deseaba controlar hubiera antiresonancias en la función de respuesta en frecuencia entre el sensor y el actuador, puesto que estas antiresonancias retrasan la inestabilización del siguiente modo, es decir dan un mayor margen de ganancia.



En el caso de la utilización de un sensor *colocalizado* con el actuador no se ha conseguido obtener uno que sea *colocalizado* en todo el rango de interés; por tanto a la hora de controlar con dicho sensor mediante un control de aceleración de primer orden el sistema de control tenía un límite de ganancia en el que se inestabiliza el primer modo que no tiene una antiresonancia por debajo. Así pues se puede concluir que si no se tiene un sensor *colocalizado* con el actuador en todo el rango de interés en el que el controlador puede tener efecto, no es aconsejable la utilización de un filtro de primer orden. Por tanto, es mejor estabilizar los modos que inestabilice el sensor *no-colocalizado* con sensores *casi-colocalizados*, debido a que la utilización de estos sensores con un control de segundo orden tiene menos riesgo de inestabilizar los modos no controlados.

En el modelo reducido del bastidor de la punzonadora también se ha llevado a cabo un control activo acústico estructural con un control de realimentación de la aceleración de segundo orden. En este caso también se ha realizado un control múltiple, con tres actuadores de tipo pila piezoeléctricos y dos acelerómetros *no-colocalizados* como sensores. Al igual que en el caso anterior también en éste se ha realizado una estabilización de los modos inestabilizados con el control *no-colocalizado* mediante sensores *casi-colocalizados* con los actuadores. Como resultado, en este caso también se puede observar que ha habido un aumento del grado de estabilidad del sistema. Por tanto queda patente la mejora que presentan la utilización de dichos sensores con filtros de segundo orden.

En ambos estudios, para reducir la sensibilidad a los errores cometidos a la hora de diseñar los filtros de control, los datos necesarios para el cálculo de dichos filtros han sido obtenidos experimentalmente, tanto de las funciones de respuesta en frecuencia como del análisis modal de los modelos.

En los dos experimentos, tanto de la viga como del modelo del bastidor, se ha obtenido una reducción de ruido de uno de los picos principales de dicho espectro. También se ha conseguido aumentar la ganancia del control *no-colocalizado* mediante la utilización de sensores *casi-colocalizados* para asegurar la estabilidad del sistema de control, aumentando el amortiguamiento de los modos que pueden inestabilizar el control *no-colocalizado*.



## Capítulo 6

# Conclusiones y futuras líneas de investigación

El objetivo general de la tesis tiene como finalidad el diseño y la validación experimental de un sistema de Control Activo Acústico Estructural *no-colocalizado* para reducir el ruido radiado por los modos de bajo orden en un modelo reducido del bastidor de una punzonadora empleando actuadores piezoeléctricos. Como primera aproximación se consideró una viga empotrada libre y posteriormente se investigó sobre un modelo a escala del bastidor de una punzonadora. Se trabajó en un sistema *no-colocalizado* estudiando un método de estabilización. La ventaja que presentan estos controles *no-colocalizados* es que permiten usar actuadores de menor potencia; la desventaja es que no garantizan la estabilidad, aunque en ocasiones es inevitable usarlos si no es posible actuar en el punto de medida.

Las acciones encaminadas a alcanzar dicho objetivo se estructuraron en torno a los siguientes objetivos parciales:

- Reducción del ruido radiado por medio de un actuador piezoeléctrico de tipo pila posicionado paralelamente con la estructura para así producir ondas de flexión en la estructura.
- Estudio de sensibilidad de la frecuencia y del amortiguamiento relativo del modo controlado frente a los parámetros del filtro de control de segundo orden de realimentación de la aceleración.
- Cálculo de los vectores propios por la derecha y por la izquierda del sistema integrado (estructura + actuador + sensor + leyes de control).
- Posicionamiento óptimo de actuadores y sensores teniendo en cuenta las leyes de control, sabiendo de antemano los modos no controlados que se pueden inestabilizar con el control *no-colocalizado*.

- Diseño de los controladores modales mediante técnicas teóricas y experimentales para la mejora del comportamiento vibro-acústico.
- Análisis y aumento del grado de estabilidad de los controladores modales *no-colocalizados* con el objetivo de poder aumentar la ganancia del controlador para así obtener una mayor eficiencia del sistema del control.

## 6.1. Conclusiones

Al final de cada capítulo se han ido detallando las conclusiones parciales del trabajo; a continuación se enuncian los resultados más relevantes de esta tesis:

- Con el propósito de reducir el ruido estructural que pueden producir las máquinas con estructuras con rigidez alta son recomendables usar los actuadores piezoeléctricos de tipo pila posicionados paralelamente a la estructura a controlar.
- Con el cálculo de los parámetros del filtro de segundo orden de forma selectiva con la técnica del *punto de corte*, las posiciones de los polos del controlador y del modo controlado varían poco en el mapa de polos y ceros por la influencia de los modos no controlados; por esto en la función de transferencia del sistema controlado aparece un único pico amortiguado en la frecuencia del modo controlado.
- De los tres datos necesarios (frecuencia, amortiguamiento y residuo) para el cálculo de los parámetros del filtro de control de segundo orden, la influencia de los errores cometidos en los datos de frecuencia y de amortiguamiento del modo que se desea controlar se refleja en que el sistema controlado posee un amortiguamiento menor que sin los errores, pero no ocurre ningún desdoblamiento del pico del modo controlado.
- Para evitar en los ensayos la sensibilidad que presenta el sistema controlado frente a los datos necesarios para la obtención de los parámetros del filtro, los datos necesarios se tienen que obtener experimentalmente.
- La ventaja que presenta la “técnica de posicionamiento óptimo basada en los polos en lazo cerrado”, desarrollada en esta tesis, además de tener en cuenta la influencia de los modos que no se controlan, es que se puede predecir de antemano la influencia que puede tener cada posicionamiento del actuador y del sensor en los modos no controlados con las leyes de control seleccionadas; por tanto se puede saber a priori si dicha posición es proclive a la inestabilización de los modos no controlados.
- El control *no-colocalizado* es el más eficiente en muchos casos, aunque presente la desventaja de no asegurar la estabilidad de los modos no controlados o de que no sea posible actuar y medir en el mismo punto.

- La desventaja que puede presentar el empleo de un control *colocalizado* para la estabilización de los modos inestabilizados por el control *no-colocalizado* es la dificultad de hallar un sensor cuya función de transferencia con el actuador sea una sucesión de resonancias y antiresonancias alternativamente.
- La ventaja que presenta el control *casi-colocalizado* para la estabilización de los modos inestabilizados por el control *no-colocalizado* es que siempre es más fácil hallar un sensor que tenga antiresonancias en la función de transferencia con el actuador cerca del modo que inestabiliza el control *no-colocalizado*.
- Otro de los puntos a tener en cuenta cuando se emplea un sensor *casi-colocalizado* es que la función de transferencia entre el sensor *casi-colocalizado* y el actuador, los residuos del modo controlado con el control *no-colocalizado* y los modos que hay que controlar con el sensor *casi-colocalizado* tengan el mismo signo, para que el control *casi-colocalizado* no disminuya el amortiguamiento del modo controlado con el control *no-colocalizado*.
- Los resultados experimentales muestran la reducción del ruido que se ha obtenido tanto en la viga empotrada libre como en el modelo del bastidor de una punzonadora. En estos resultados queda patente que, con la técnica experimental que se ha desarrollado en esta tesis para la obtención de los parámetros de los filtros de control de segundo orden, en los modos que se han controlado únicamente ha habido un aumento del amortiguamiento sin que exista un desdoblamiento del pico del modo controlado.

En los dos experimentos, tanto en el de la viga como en el del modelo del bastidor, se ha obtenido una reducción de ruido de uno de los picos principales del espectro. También se ha conseguido aumentar la ganancia del control *no-colocalizado* mediante la utilización de sensores *casi-colocalizados* para asegurar la estabilidad del sistema de control, aumentando el amortiguamiento de los modos que puede inestabilizar el control *no-colocalizado*.

## 6.2. Futuras líneas de investigación

A continuación se indican algunas de las posibles líneas de actuación que quedan abiertas a tenor de lo expuesto en los capítulos anteriores:

- Introducir el modelo del actuador y del sensor en el método de posicionamiento que se ha presentado en esta tesis, para que de esta forma se obtenga una mejor optimización del posicionamiento del actuador y del sensor teniendo en cuenta los modos que puede inestabilizar el sistema de control.
- En los casos que no se disponga un buen modelo del sistema a controlar, utilizar los datos experimentales para realizar la optimización del posicionamiento de actuadores y sensores.

- Utilizar un sensor distribuido de tipo lámina para obtener un control *colocalizado* para controlar los modos inestabilizados con el control *no-colocalizado* sin que exista ningún riesgo de inestabilizar los modos no controlados.
- Aplicar las técnicas desarrolladas en esta tesis para el control de vibraciones de los útiles de mecanizado en otros tipos de máquina herramienta, para así obtener una mayor precisión en las piezas finales.
- Aplicar las técnicas desarrolladas en esta tesis tanto para el control de vibraciones como para reducir el ruido radiado a bajas frecuencias en estructuras más complejas como las que se dan en la industria aeronáutica en las que el ruido y las vibraciones son un factor fundamental de diseño.

# Bibliografía

- Aizpuru, A. y Abete, J. M. (2005).  
Active structural acoustic control of a clamped-free by means of modal reduction, *Sixth european conference on structural dynamics EUROODYN2005*.
- Aizpuru, A. y Abete, J. M. (2006).  
Stabilisation of a non-collocated active structural acoustic control on a clamped-free beam, *The thirteenth international congress of sound and vibration ICSV13*.
- Baumann, W. T., Ho, F. y Robertshaw, H. H. (1992).  
Active structural acoustic control of broadband disturbances, *The Journal of the Acoustical Society of America* **92**(4): 1998–2005.
- Baumann, W. T., Saunders, W. R. y Robertshaw, H. H. (1991).  
Active suppression of acoustic radiation from impulsively excited structures, *The Journal of the Acoustical Society of America* **90**(6): 3202–3208.
- Bayon de Noyer, M. P. (1999).  
*Tail buffet alleviation of high performance twin tail aircraft using offset piezoceramic stack actuators and acceleration feedback control*, PhD thesis, Georgia Institute of Technology.
- Bayon de Noyer, M. P. y Hanagud, S. V. (1997).  
Single actuator and multi-mode acceleration feedback control, *American Society of Mechanical Engineers, Aerospace Division (Publication) AD* **54**: 227 – 235.
- Bayon de Noyer, M. P. y Hanagud, S. V. (1998a).  
Comparison of h2 optimized design and cross-over point design for acceleration feedback control, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* **4**: 3250 – 3258.
- Bayon de Noyer, M. P. y Hanagud, S. V. (1998b).  
Single actuator and multi-mode acceleration feedback control, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **9**(7): 522 – 533.
- Bravo, T. y Cobo, P. (2002).  
A demonstration of active noise reduction in a cabin van, *Acta Acustica united with Acustica* **88**(4): 493–499.

- Bruce, L. W. y Keith, E. R. (1996).  
Active vibration control of machining via dynamic absorbers, *Proceedings of the NSF Design and Manufacturing Grantees Conference*.
- Burgan, N. C., Snyder, S. D., Tanaka, N. y Zander, A. C. (2002).  
A generalized approach to modal filtering for active noise control - part i: Vibration sensing, *IEEE Sensors Journal* **2**(6): 577 – 589.
- Butter, C. C. y Hocker, G. B. (1978).  
fibre optics strain gauge, *Applied Optics* **17**: 2867–2869.
- Cazzolato, B. S. y Hansen, C. H. (1998).  
Active control of sound transmission using structural error sensing, *Journal of the Acoustical Society of America* **104**(5): 2878 – 2889.
- Charette, F., Berry, A. y Guigou, C. (1998).  
Active control of sound radiation from a plate using a polyvinylidene fluoride volume displacement sensor, *Journal of the Acoustical Society of America* **103**(3): 1493 – 1503.
- Charette, F., Guigou, C. y Berry, A. (1995).  
Development of volume velocity sensors for plates using pvdf film, *In Proceedings of Active 95*.
- Chee, K. K. (1978).  
Punch press noise characteristics, *Sheet Metal Industries* (10): 1131 – 1132.
- Chen, W., Liu, G., Cai, W. y Liu, L. H. (2006).  
Reduce the noise of punch press with the equivalent damping, *Journal of Harbin Institute of Technology (New Series)* **13**(1): 59 – 61.
- Chen, W., Sun, C. Q. y Li, Y. L. (2005).  
Noise reduction of punch press mechanical clutch engagement, *Transactions of Nonferrous Metals Society of China (English Edition)* **15**(2): 395 – 399.
- Cho, D. y Hedrick, J. K. (1985).  
Pneumatic actuators for vehicle active suspension applications, *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* **107**: 67–72.
- Clark, R. L., Fleming, M. R. y Fuller, C. R. (1993).  
Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates: A comparison between theory and experiment, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics* **115**: 332–339.
- Clark, R. L. y Fuller, C. R. (1992).  
Optimal placement of piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride error sensors in active structural acoustic control approaches, *Journal of the Acoustical Society of America* **92**(3): 1521 –.
- Cox, D. E. y Lindner, D. K. (1991).  
Active control for vibration suppression in a flexible beam using a modal domain optical fiber sensor, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* **113**(3): 369 – 382.



- Crawley, E. F. (1994).  
Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment, *AIAA Journal* **32**(8): 1689–1669.
- Cremer, L., Heckl, M. y Ungar, E. E. (1988).  
*Structure-Borne Sound*, Springer.
- Cuesta, M. (2001).  
*Control activo del ruido radiado por estructuras bidimensionales*, PhD thesis, Universidad Computense de Madrid.
- De Man, P., François, A. y Preumont, A. (2001).  
Robust feedback control of a baffled plate through vibroacoustic optimization, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* **3**: 2128 – 2138.
- De Man, P., François, A. y Preumont, A. (2003).  
Active control of noise transmission through double wall structures an overview of possible approaches, *6th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*.
- Dimitriadis, E. K., Fuller, C. R. y Rogers, C. A. (1991).  
Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates, *Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* **113**: 100–107.
- Doege, E. y Seidel, H. J. (1985).  
Noise reduction on mechanical punch presses., *CIRP Annals* **34**(1): 507 – 509.
- Egaña, J. M. (2003).  
*Desarrollo de sistemas de control de ruido para conductos de aire acondicionado. Aplicación a un vehículo ferroviario*, PhD thesis, Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros.
- Egaña, J. M., Díaz, J. y Viñolas, J. (2003).  
Active control of low-frequency broadband air-conditioning duct noise, *Noise Control Engineering*.
- Elliott, S. J. y Johnson, M. E. (1993).  
Radiation modes and the active control of sound power, *The Journal of the Acoustical Society of America* **94**(4): 2194–2204.
- Ellison, J. (2004).  
*Investigation of active materials as driving elements in a hydraulic-hybrid actuator*, PhD thesis, Univerity of Maryland.
- Fahy, F. (1985).  
*Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*, Academic Press.
- Fuller, C. R. (1990).  
Active control of sound transmission/radiation from elastic plates by vibration inputs. i. analysis, *Journal of Sound and Vibration* **136**(1): 1 – 15.
- Fuller, C. R., Elliott, S. J. y Nelson, P. A. (1997).  
*Active control of vibration*, Academic Press.

- Fuller, C. R., Hansen, C. H. y Snyder, S. D. (1991).  
Active control of sound radiation from a vibrating rectangular panel by sound sources and vibration inputs. an experimental comparison, *Journal of Sound and Vibration* **145**(2): 195 – 215.
- Gawronski, W. (1999).  
Simultaneous placement of actuators and sensors, *Journal of Sound and Vibration* **228**(4): 915 – 922.
- Gibbs, G. P. y Fuller, C. R. (1992).  
Excitation of thin beams using asymmetric piezoelectric actuators, *Journal of the Acoustical Society of America* **92**(6): 3221 –.
- Giménez, J. G. y García de Jalón, J. (1984).  
*Teoría y práctica del análisis modal*, E.S.I. de San Sebastián.
- Goh, C. J. y Yan, W. Y. (1996).  
Approximate pole placement for acceleration feedback control of flexible structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **19**(1): 256 – 258.
- Gopinathan, S. V. (2001).  
*Modeling of piezoelectric smart structures for active vibration and noise control applications*, PhD thesis, The Pennsylvania State University.
- Gosavi, S. V. y Kelkar, A. G. (2004).  
Modelling, identification, and passivity-based robust control of piezo-actuated flexible beam, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* **126**(2): 260 – 271.
- Guigou, C., Berry, A., Charette, F. y Nicolas, J. (1996).  
Active control of finite beam volume velocity using shaped pvdv sensor, *Acta Acustica (Stuttgart)* **82**(5): 772 – 783.  
Polyvinylidene fluoride;Active noise control (ANC);Active structural acoustic control (ASAC);Spatial filtering techniques;.
- Guigou, C., Berry, A. y Charette, F. (1994).  
Active control of plate volume velocity using shaped pvdv sensor, *American Society of Mechanical Engineers, Aerospace Division (Publication) AD* **45**: 247 – 255.
- Hac, A. y Liu, L. (1992).  
Sensor and actuator location in motion control of flexible structures, *Proceedings of First International Conference on Motion and Vibration control* pp. 86–91.
- Halim, D. y Moheimani, S. O. R. (2003).  
An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate, *Mechatronics* **13**(1): 27 – 47.
- Hansen, C. H. y Snyder, S. D. (1997).  
*Active control of noise and vibration*, E and FN Spon.
- Hill, S. G., Snyder, S. D., Cazzolato, B. S., Fukuda, R. y Tanaka, N. (2003).  
Acoustic based modal filtering, *Proceedings of Wespac*.

- Hill, S. G., Snyder, S. D., Cazzolato, B. S., Tanaka, N. y Fukuda, R. (2002).  
A generalized approach to modal filtering for active noise control - part ii: Acoustic sensing, *IEEE Sensors Journal* **2**(6): 590 – 596.
- Johson, M. E. y Elliott, S. J. (1993).  
Volume velocity sensors for active control, *Proceedings of the Institute of Acoustics* **15**(3): 411–420.
- Kang, M. S. y Yang, B. (1992).  
Discrete time noncolocated control of flexible mechanical systems using time delay. part i. theory, *Proceedings of the American Control Conference* **4**: 2760 – 2764.
- Kelkar, A. G. y Joshi, S. M. (1997).  
Robust control of non-passive systems via passification, *Proceedings of the American Control Conference* **5**: 2657 – 2661.
- King, S. P. (1991).  
The minimisation of helicopter vibration through blade design and active control, *Aeronautical Journal* (29): 2047–2053.
- Lee, I. y Han, J. H. (1996).  
Optimal placement of piezoelectric actuators in intelligent structures using genetic algorithms, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* **2779**: 872 – 875.
- Li, Y., Onoda, J. y Minesugi, K. (2002).  
Simultaneous optimization of piezoelectric actuator placement and feedback for vibration suppression, *Acta Astronautica* **50**(6): 335 – 341.
- Loix, N., Kozanek, J. y Folette, E. (1996).  
On the complex zeros of non-colocated systems, *Journal os Structural Control* **3**(1-2): 79–87.
- Maillard, J. P. y Fuller, C. R. (1994).  
Advanced time domain wave-number sensing for structural acoustic systems. i. theory and design, *Journal of the Acoustical Society of America* **95**(6): 3252 –.
- Maillard, J. P. y Fuller, C. R. (1995).  
Advanced time domain wave-number sensing for structural acoustic systems. part iii. experiments on active broadband radiation control of a simply supported plate, *Journal of the Acoustical Society of America* **98**(5 pt 1): 2613 –.
- Maillard, J. P. y Fuller, C. R. (1998).  
Comparison of two structural sensing approaches for active structural acoustic control, *Journal of the Acoustical Society of America* **103**(1): 396 – 400.
- Masson, P., Berry, A. y Nicolas, J. (1997).  
Active structural acoustic control using strain sensing, *Journal of the Acoustical Society of America* **102**(3): 1588 – 1599.
- Miu, D. K. (1991).

- Physical interpretation of transfer function zeros for simple control systems with mechanical flexibilities, *American Society of Mechanical Engineers, Dynamic Systems and Control Division (Publication) DSC* **26**: 67 – 73.
- Nelson, P. A. y Elliott, S. J. (1992).  
*Active control of sound*, Academic Press.
- Onoda, J. y Haftka, R. T. (1987).  
Approach to structure/control simultaneous optimization for large flexible spacecraft., *AIAA Journal* **25**(8): 1133 – 1138.
- Paxton, S. (1997).  
*System identification and optimization methodologies for active structural acoustic control of aircraft cabin noise*, PhD thesis, Virginia Tech.
- Pinte, G., Boonen, R., Desmet, W. y Sas, P. (2005).  
Active control of impact noise in punching machines, *VDI Berichte (1887)*: 403 – 420.
- Preumont, A. (2002).  
*Vibration control of active structure*, Kluwer Academic Publishers.
- Preumont, A., François, A. y Dubru, S. (1999).  
Piezoelectric array sensing for real-time, broad-band sound radiation measurement, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* **121**(4): 446 – 452.
- Richards, E. J. y Stimpson, G. J. (1985).  
On the prediction of impact noise, part ix: The noise from punch presses., *Journal of Sound and Vibration* **103**(1): 43 – 81.
- Snyder, S. D., Burgan, N. C. y Tanaka, N. (2002).  
An acoustic-based modal filtering approach to sensing system design for active control of structural acoustic radiation: Theoretical development, *Mechanical Systems and Signal Processing* **16**(1): 123 – 139.
- Snyder, S. D., Tanaka, N. y Kikushima, Y. (1995).  
Use of optimally shaped piezo-electric film sensors in the active control of free field structural radiation, part 1: Feedforward control, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* **117**(3(A)): 311 – 322.
- Snyder, S. D., Tanaka, N. y Kikushima, Y. (1996).  
Use of optimally shaped piezo-electric film sensors in the active control of free field structural radiation, part 2: feedback control, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* **118**(1): 112 – 121.
- Sommerfeldt, S. D. y Scott, B. L. (1994).  
Estimating acoustic radiation using wavenumber sensors, *Proceedings - National Conference on Noise Control Engineering* pp. 279 – 284.
- Spector, V. A. y Flashner, H. (1990).  
Modeling and design implications of noncollocated control in flexible systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions ASME* **112**(2): 186 – 193.

- Stayner, R. M. (1998).  
Suspensions for agricultural vehicles, *In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers International Conference on Advanced Suspensions* pp. 133–137.
- Tanaka, N., Snyder, S. D. y Hansen, C. H. (1996).  
Distributed parameter modal filtering using smart sensors, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* **118**(4): 630 – 640.
- Tanaka, N. y Kikushima, Y. (1999).  
Active modal control and its robustness using point sensors and point actuators, *JSME International Journal, Series C* **42**(1): 54 – 61.
- Udwadia, F. E., von Bremen, H. F., Kumar, R. y Hosseini, M. (2003).  
Time delayed control of structural systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **32**(4): 495 – 535.
- Vander Velde, W. E. y Carignan, C. R. (1984).  
Number and placement of control system components considering possible failures., *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **7**(6): 703 – 709.
- Von Bremen, H. F., Udwadia, F. E. y Silverman, M. C. (2001).  
Effect of time delay on the control of a torsional bar, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* **1**: 356 – 365.
- Wang, B. T., Fuller, C. R. y Dimitriadis, E. K. (1991).  
Active control of noise transmission through rectangular plates using multiple piezoelectric or point force actuators, *The Journal of the Acoustical Society of America* **90**(5): 2820–2830.
- Wang, Z., Chen, S. y Han, W. (1999).  
Integrated structural and control optimization of intelligent structures, *Engineering Structures* **21**(2): 183 – 191.
- Weck, M. (1984).  
*Handbook of Machine Tools*.
- Wilson, H. W. (1985).  
Acoustical enclosures for machinery, *Sound and Vibrations* **19**: 6.
- Yang, B. (1991).  
Noncolocated control of a damped string using time delay, *Proceedings of the American Control Conference* **3**: 2445 – 2448.
- Yang, B. y Mote, C. D. J. (1991).  
On time delay in noncolocated control of flexible mechanical systems, *American Society of Mechanical Engineers, Dynamic Systems and Control Division (Publication) DSC* **26**: 53 – 57.
- Yang, B. y Mote, C. D. J. (1992).  
On time delay in noncolocated control of flexible mechanical systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME* **114**(3): 409 – 415.

- Yang, Y., Jin, Z. y Soh, C. K. (2005).  
Integrated optimal design of vibration control system for smart beams using genetic algorithms, *Journal of Sound and Vibration* **282**(3-5): 1293 – 1307.