

Tensiones en el pie de acoplamientos dentados abombados que trabajan en aplicaciones con alta desalineación

A. Iñurritegui Marroquin¹, J. Larrañaga Amilibia¹, A. Arana Ostoloza¹, I. Ulacia Garmendia¹,
I. Berganzo Sampedro¹

¹Dpto. de Mecánica y Producción Industrial. Mondragon Unibertsitatea, Arrasate-Mondragón, España.
ainurritegui@mondragon.edu, jlarranaga@mondragon.edu, aarana@mondragon.edu, iulacia@mondragon.edu,
irenevalentina.berga@alumni.mondragon.edu

Los acoplamientos dentados abombados son componentes mecánicos para transmitir potencia entre ejes en rotación desalineados. Para poder absorber dichas desalineaciones y en especial, la desalineación angular, la geometría del diente se caracteriza por tener una gran cantidad de abombamiento longitudinal. Este abombamiento se genera realizando una trayectoria circular de la herramienta durante el proceso de fabricación. Sin embargo, debido al pequeño radio de la trayectoria es muy frecuente la aparición de secciones con interferencia de tallado en acoplamientos pequeños fabricados directamente sobre el eje.

Recientes trabajos, han demostrado que el número de dientes en contacto desciende drásticamente con desalineaciones altas, así como que la distribución de carga entre los dientes en contacto no es homogénea. Es por ello que el principal fallo de este tipo de componente es la rotura del pie del diente. Las normas para el diseño y dimensionamiento de acoplamientos dentados utilizados actualmente consideran el ángulo de desalineación para estimar el número de dientes en contacto y el ancho de cara que soporta la carga, sin embargo, solo hasta valores de desalineación inferiores a 1.5°. Cuando se trata de desalineaciones por encima de los 3°, las normas consideran dichas aplicaciones como especiales y no existen guías de diseño ni de predicción de tensiones.

En el presente trabajo, se propone un procedimiento para determinar la evolución de las tensiones en el pie de acoplamientos dentados abombados para optimizar un diseño utilizado en una aplicación con gran desalineación angular. Para ello, se utilizan modelos analíticos para la generación de la geometría y modelos de elementos finitos para el cálculo de las tensiones en el pie. Asimismo, estos valores se validan experimentalmente en un banco de ensayos diseñado para tal fin. Dichos resultados correlan con los modelos numéricos, demostrando así que el método propuesto es adecuado para acoplamientos abombados que trabajan con desalineaciones angulares altas. Asimismo, se observa que el diseño optimizado propuesto reduce un 50% las tensiones en el pie.

1. Introducción

Los acoplamientos dentados se utilizan para transmitir potencia entre ejes debido a su alta capacidad de transmitir potencia en comparación con otras conexiones no dentadas [1]. Los acoplamientos dentados esféricos abombados están diseñados especialmente para trabajar con ángulos de desalineación elevados ($\gamma \gg 1^\circ$). Estos acoplamientos requieren superficies activas con gran cantidad de abombamiento longitudinal para obtener un patrón de contacto favorable en condiciones de desalineación severas ($3^\circ \leq \gamma \leq 10^\circ$). Además, este abombamiento longitudinal evita interferencias durante su funcionamiento y equilibra el juego entre los dientes del eje y de la camisa, al tiempo que aumenta la relación de contacto [2]. Sin embargo, la gran cantidad de abombamiento longitudinal ($\gg 100 \mu\text{m}$), junto con el reducido radio de la trayectoria de la herramienta utilizado en su fabricación, plantea desafíos al generar de forma analítica las superficies de los dientes del eje de acoplamientos dentados abombados. Uno de los más significativos es la aparición de singularidades (correspondiente a zonas en las que se da interferencia de tallado). Es por ello, que recientemente se ha desarrollado [3] y validado experimentalmente [4] un modelo analítico de generación que tiene en cuenta la superficie helicoidal de la fresa madre durante el proceso de generación. Este modelo presenta ventajas sobre otros modelos publicados [5,6], porque es capaz de generar superficies de dientes con gran cantidad de abombamiento que pueden contener interferencias durante el tallado. Además, ninguno de los modelos presentes en la literatura fue validado experimentalmente, como es el caso del modelo propuesto [4].

Los acoplamientos abombados deben tener una cantidad específica de holgura para evitar interferencias y, al mismo tiempo, soportar un determinado ángulo de desalineación [6-9]. La holgura angular es el ángulo de rotación que existe al girar los dientes del eje manteniendo la camisa inmóvil, es decir, desde el punto en el que los flancos izquierdos están en contacto hasta el punto en el que los flancos derechos están en contacto [7,10]. Puesto que la superficie del diente está abombada y existe desalineación angular, el valor del juego no será constante en todos los dientes [2,11]. En efecto, las posiciones angulares de cabeceo presentarán una holgura menor que las de la posición de balanceo, por lo que los dientes entrarán en contacto de forma progresiva [12]. De este modo, los dientes en la posición angular de cabeceo son los primeros en entrar en contacto y sufrirán las mayores tensiones en el pie del diente [13,14]. Además, la distribución desigual del juego hará que el número de dientes en contacto varíe en función del par aplicado y del ángulo de desalineación, lo que provocará una variación de la rigidez del acoplamiento [15]. Para determinar el número de dientes en contacto, la literatura científica muestra modelos de elementos finitos [16,17] y algoritmos de análisis del contacto sin carga [3,18]. Sin embargo, las normas [7,9,19,20] no incluyen el efecto de la geometría o las condiciones de carga en sus ecuaciones. Es decir, definen el porcentaje del número de dientes en contacto sólo en función del ángulo de desalineación, sin tener en cuenta su rigidez y par aplicado. Por esta razón, es un criterio común considerar que la mitad de los dientes del acoplamiento estarán en contacto [7-9,19]. Este criterio puede ser adecuado en aplicaciones con pequeñas desalineaciones angulares ($\gamma \gg 1^\circ$), sin embargo, los modelos de elementos finitos [17,21] han demostrado que éste no es extensible para aplicaciones con alta desalineación. La razón principal es que el número de dientes en contacto puede ser incluso menor a la mitad, especialmente en aplicaciones de baja carga y alta desalineación. Este hecho fue demostrado numéricamente [17] y experimentalmente [4], donde se ve que apenas hay 3 dientes en contacto de un total de 13 con una desalineación angular de 7° y bajo 100 Nm de par aplicado.

Dado que los acoplamientos dentados se emplean frecuentemente en aplicaciones con pequeños ángulos de desalineación [14,22], la mayoría de los trabajos experimentales y bancos de ensayos están orientados a estas condiciones de trabajo [23,24]. Los estudios realizados han demostrado que el patrón de contacto no está centrado ni se mantiene constante en condiciones de desalineación [6,25], y que el desgaste aumenta con el ángulo de desalineación [26]. Asimismo, Cuffaro et al. [23] analizaron la distribución de carga en acoplamientos estriados con láminas sensibles a la presión y validaron analítica y numéricamente las presiones de contacto obtenidas. El principal objetivo de estos estudios está orientado al fallo por desgaste superficial [19,27], por lo que se puede entender que la desalineación angular máxima para la mayoría de los bancos de ensayos sea $\gamma \ll 1^\circ$. Sin embargo, Mancuso [28] demostró que los fallos comunes en acoplamientos que trabajan en aplicaciones pesadas de hasta $\gamma = 6^\circ$ están más relacionados con la rotura del pie del diente, resaltando que el ángulo de desalineación era la variable más perjudicial.

En relación a las condiciones con desalineación, y en vista de la importancia del ángulo de desalineación, existen trabajos analíticos que han determinado la relación entre los parámetros de diseño del acoplamiento dentado y el ángulo de desalineación máximo alcanzable [29], mostrando además valores muy cercanos a la realidad en un caso analizado experimentalmente [4]. Además, se ha concluido que el número de dientes y el ángulo de presión son los parámetros de diseño predominantes, seguidos por el radio de abombamiento para definir la desalineación máxima a la que puede operar un acoplamiento dentado abombado. En relación a los trabajos experimentales, estos son más escasos. Por ejemplo, Herbstritt et al. [30] midieron las tensiones en el pie del diente con un ángulo de desalineación máximo de $\gamma = 3^\circ$, y validaron un modelo de elementos finitos con un margen de error del 15%. Sin embargo, la información sobre la metodología experimental era muy escasa. Más recientemente, Inurritegui et

al. [4] presentaron un banco de ensayos con el que se realizaron ensayos hasta una desalineación angular de 10° . En este trabajo validaron también con un error inferior al 15% el número de dientes en contacto, el patrón de contacto y la rigidez de un acoplamiento hasta una desalineación de 7° . No obstante, en este caso no hay información referente a valores de tensiones en el pie.

La bibliografía ha demostrado que los acoplamientos dentados abombados presentan una serie de retos en términos de geometría y comportamiento mecánico. Además, las normas siguen considerándolos casos excepcionales y no proporcionan criterios de dimensionamiento precisos. Recientemente, se han realizado muchos avances en el desarrollo de modelos analíticos y de elementos finitos para determinar la geometría de las superficies de los dientes y el comportamiento mecánico de los acoplamientos dentados abombados. Sin embargo, sigue sin haber una metodología clara para el diseño de acoplamientos y dimensionamiento según el criterio de rotura del pie del diente. Por lo tanto, el principal objetivo de este estudio es presentar las herramientas y la metodología a emplear para diseñar y optimizar un acoplamiento dentado abombado que trabaja en condiciones de desalineación alta, así como validar experimentalmente la distribución de tensiones en el pie.

2. Metodología de trabajo

En este apartado se resumen brevemente los modelos analíticos y numéricos que se emplearán para el diseño y dimensionamiento de acoplamientos, utilizando el caso de estudio de una aplanadora para la laminación de aceros de alta resistencia. El elevado número de rodillos en un espacio reducido, asociado al uso de grandes reductoras provoca que el ángulo de desalineación entre los rodillos y el reductor sea muy elevado, incluso alcanzado ángulos superiores a 6° [21,31]. Las condiciones de diseño para dicha aplicación se detallan en la Tabla 1. Cabe destacar que el par máximo aplicado corresponde a los rodillos centrales que trabajan en condiciones casi-alineadas. El par aplicado en los rodillos externos, es decir, en los más desalineados disminuye, hasta aproximadamente la mitad (500 Nm).

Tabla 1: Condiciones de diseño y de trabajo del acoplamiento para la aplanadora.

Parámetro	Valor	Unidades
Diámetro primitivo máximo, $d_{p,max}$	50	mm
Desalineación angular máxima, γ_{max}	6	$^\circ$
Par máximo aplicado, T_{max}	1000	Nm

Los parámetros geométricos de los acoplamientos actualmente utilizados en la aplanadora y que se emplearan para la validación experimental se encuentran en la Tabla 2. El material con el que se han fabricado es un acero carburizado y templado 15NiCr11 con las propiedades mecánicas establecidas en la Tabla 2.

Tabla 2: Parámetros del acoplamiento del caso de estudio utilizado (Actual) en la aplanadora y ensayado.

Parámetro	Valor	Unidades
Diámetro primitivo	39	mm
Módulo	3	mm
Número de dientes	13	-
Ángulo de presión	30	$^\circ$
Relación de aspecto	0.30	-
Juego normal	0.285	mm
Radio de abombamiento	10	mm
Módulo de elasticidad	210	GPa
Coefficiente de Poisson	0.33	-
Densidad	7850	kg/m ³
Límite elástico	850	MPa

2.1. Modelo de generación analítica

Para poder analizar el comportamiento mecánico y las características geométricas de los acoplamientos dentados, primero hay que generar la geometría analíticamente. Para ello es necesario considerar tanto el proceso de fabricación, como la geometría de la herramienta de tallado. En el caso del eje, el proceso de fresado con trayectoria no lineal y la fresa madre, respectivamente, y en el caso de la camisa el proceso de generación por piñón cortador y el propio piñón cortador.

Las superficies esféricas de los dientes del eje del acoplamiento se generan considerando la superficie helicoidal de la fresa como un conjunto de filos de corte que actúan al mismo tiempo durante el proceso de generación, como se explica en [3]. Este es un proceso de generación de envolvente de dos parámetros [32], en el cual la fresa madre sigue un movimiento no-lineal de alimentación y por tanto la distancia entre el acoplamiento y la fresa varían

continuamente. La Figura 1 muestra el proceso completo de generación, donde la superficie helicoidal de la fresa madre se determina antes de la generación del eje del acoplamiento.

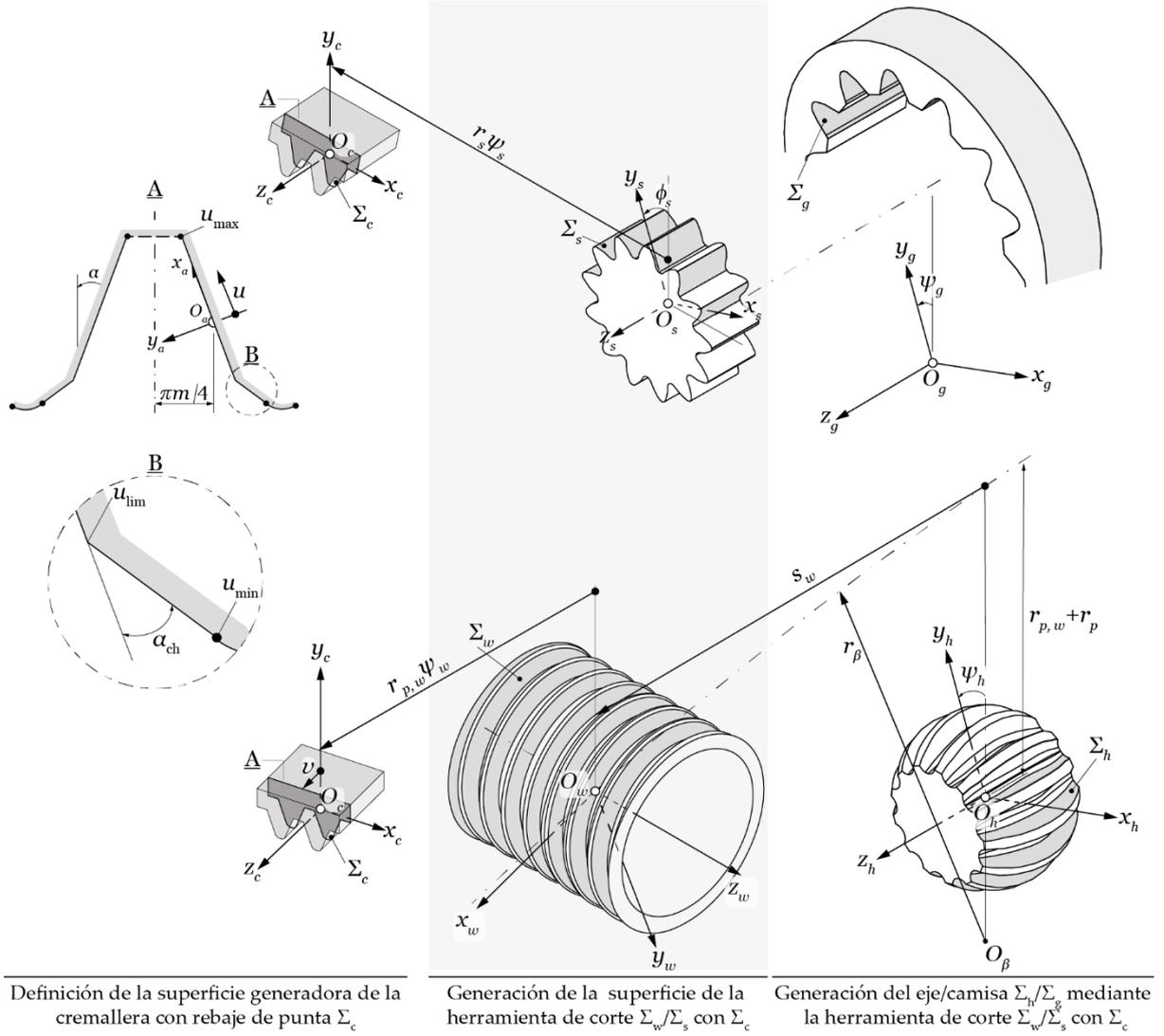


Figura 1: Derivación de la superficie del diente del eje y de la camisa, con previa generación de la superficie de la herramienta talladora (adaptada de [17]).

Primero, se genera la superficie helicoidal de la fresa madre (Σ_w) como herramienta de corte a partir de la superficie del diente de la cremallera (Σ_c). La fresa madre sigue a su vez un movimiento de alimentación circular que determina la superficie del diente del eje (Σ_h), como la envolvente a la familia de superficies de la fresa madre. La superficie helicoidal de la fresa madre se determina a partir de la superficie del diente de la cremallera Σ_c considerando la ecuación de engrane (2). La superficie del diente del eje se genera mediante la transformación de coordenadas (1) del sistema S_c al sistema S_h , teniendo en cuenta el proceso de doble envolvente [32] con dos parámetros independientes de generación ϕ_w y s_w ((3), (4)).

$$r_h(u, v, \psi_w, s_w, \phi_w) = \mathbf{M}_{hw}(s_w, \phi_w) \mathbf{M}_{wc}(\psi_w) \mathbf{r}_c(u, v) \quad (1)$$

$$f_1(u, v, \psi_w) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_w}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_w}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_w}{\partial \psi_w} \quad (2)$$

$$f_2(u, v, s_w, \phi_w) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \phi_w} \quad (3)$$

$$f_3(u, v, s_w, \phi_w) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial s_w} \quad (4)$$

Aquí, ψ_w es el parámetro de generación para la superficie helicoidal de la fresa madre y las matrices \mathbf{M}_{hw} y \mathbf{M}_{wc} son las matrices de transformación de coordenadas entre los sistemas de coordenadas. Las matrices y detalles del modelo se encuentran en [3].

Para la camisa del acoplamiento, el proceso de fabricación es de generación por piñón cortador, y sigue los mismos pasos definidos para el eje (parte superior de la Figura 1). Primero, se genera un piñón cortador (Σ_s) como herramienta de corte a partir de la superficie del diente de la cremallera (Σ_c) mediante la ecuación del engrane (6). Esta sigue una trayectoria recta para determinar las superficies dentadas de la camisa (Σ_g) como la envolvente a la familia de superficies del piñón cortador. La transformación de coordenadas (5) del sistema S_c al sistema S_g y la consideración de la ecuación de engrane (7) con el parámetro de generación ψ_s permite determinar la superficie del diente de la camisa.

$$\mathbf{r}_g(u, v, \psi_s, \phi_s) = \mathbf{M}_{gs}(\phi_s)\mathbf{M}_{sc}(\psi_s)\mathbf{r}_c(u, v) \quad (5)$$

$$f_4(u, v, \psi_s) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \psi_s} \quad (6)$$

$$f_5(u, v, \psi_s, \phi_s) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_g}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_g}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_g}{\partial \phi_s} \quad (7)$$

Aquí, ϕ_s es el parámetro de generación para la superficie de la camisa y las matrices \mathbf{M}_{gs} y \mathbf{M}_{sc} son las matrices de transformación de coordenadas entre los sistemas de coordenadas. Las matrices y detalles del modelo se encuentran en [3].

Por otro lado, a la hora de validar experimentalmente el valor de las tensiones en el pie, la geometría experimental se mide con una maquina de mediciones de coordenadas (CMM), a partir de la cual se extrae la nube de puntos de la superficie del diente del eje y de la camisa. La reconstrucción de las superficies se realiza mediante la metodología descrita en [4], que elimina los puntos innecesarios y genera una malla de puntos ordenada y adecuada para el mallado tridimensional que se requiere para la posterior simulación de elementos finitos.

2.2. Modelo de elementos finitos

Para poder analizar el comportamiento mecánico y la trayectoria de la huella de contacto de los acoplamientos dentados abombados se emplea el método por elementos finitos. Para ello primero se genera el mallado de las superficies dentadas. Para tal fin se emplea el método presentado por Argyris et al. [33], habitualmente utilizado para el análisis de engranajes. Este conocido método produce una malla estructurada uniforme en los dientes de los engranajes, dividiendo la superficie en cinco secciones: perfiles activo y pie del lado derecho e izquierdo del diente y, el cuerpo del engranaje. Al generar analíticamente la geometría del diente mediante el modelo presentado en la sección precedente, los nodos que forman la superficie del diente son conocidos. A partir de estos se genera automáticamente la malla de elementos hexaédricos hacia el interior del eje y hacia el exterior de la camisa. En la Figura 2(a) se muestra el detalle del mallado empleado en el eje a modo de ejemplo. Se reduce el tamaño de los elementos en las regiones del diente de contacto potencial, lo cual proporciona elementos más pequeños en las zonas con mayores gradientes de tensión sin aumentar el número de elementos y, por tanto, el coste computacional. Como se ve en la Figura 2(a), la zona de malla fina corresponde con la región donde se dará el contacto, la cual se delimita mediante un análisis de contacto (TCA) [29], más un 25% adicional. Asimismo, la distancia entre los elementos aumenta progresivamente hacia los bordes del acoplamiento. En la superficie del diente se generan varias capas de elementos pequeños ($l_{\min} = 0.08$ mm) caracterizadas por un espesor $e = 0.15$ mm [34], los cuales evolucionan hacia elementos más grandes en el cuerpo del eje o de la camisa.

El eje y la camisa se ensamblan en un sistema de coordenadas fijo S_f . El sistema de coordenadas auxiliar S_m permite aplicar el ángulo de desalineación, girando la camisa alrededor del eje x y manteniéndolo fijo durante el análisis. El origen de ambos sistemas de coordenadas se sitúa en la sección central del acoplamiento (0,0,0), donde al mismo tiempo se sitúan los nodos de referencia del eje y de la camisa. Estos nodos se unen rígidamente con los nodos situados en el diámetro interior del eje y del diámetro exterior de la camisa, respectivamente, para formar superficies rígidas (en color amarillo y verde en la Figura 2(b)). Además, para realizar la simulación y garantizar el correcto post-procesado de los datos se define un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z_f) [17]. Durante la simulación los grados de libertad de la camisa están bloqueados, mientras que en el eje del acoplamiento todos se bloquean salvo el giro en el eje z , que permite aplicar el par.

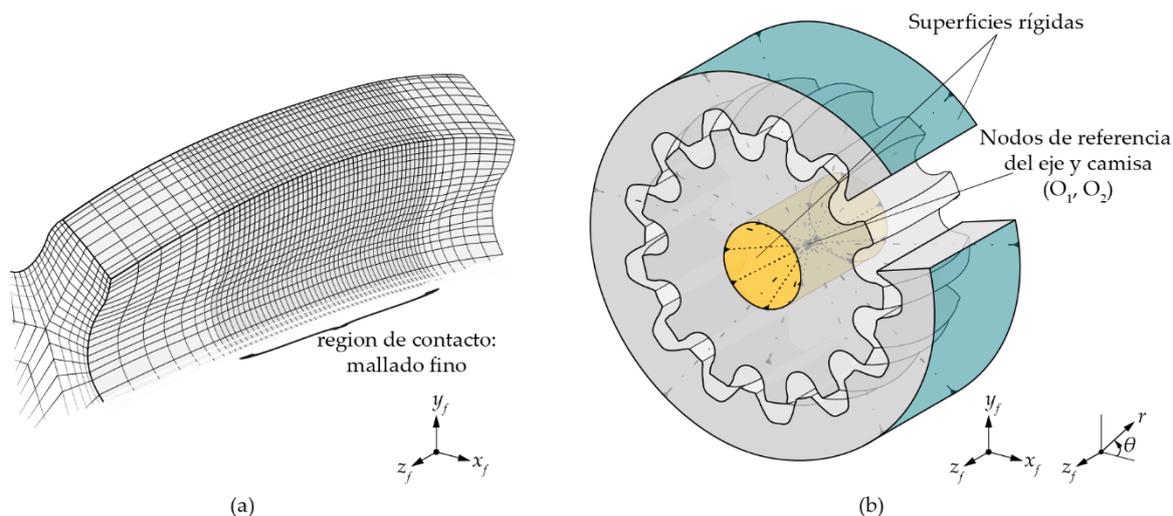


Figura 2: (a) discretización del mallado longitudinal del modelo de elementos finitos con la zona de contacto identificada, y (b) descripción de las condiciones de contorno y superficies rígidas definidas en el modelo de elementos finitos (adaptada de [17]).

En estas simulaciones no se tiene en cuenta la fricción entre los componentes y el contacto se define mediante pares de contacto nodo-segmento, con una tolerancia equivalente a $1/20$ del tamaño del elemento más pequeño. Asimismo, se determina un material elástico lineal (propiedades en la Tabla 2), bajo el supuesto que las deformaciones son tan pequeñas que pueden estudiarse bajo la teoría de pequeñas deformaciones. El tipo de elemento seleccionado es un elemento hexaédrico isoparamétrico de primer orden (tipo 7 en el software de simulación Marc [35]).

2.3. Banco de ensayos y protocolo experimental

Para la validación experimental, [4] muestra un banco estático diseñado especialmente para ensayar acoplamientos dentados abombados con altos grados de desalineación angular ($\gamma_{\max} = 10^\circ$) el cual se ha utilizado para este estudio. El banco se puede ver en la Figura 3(a) y está compuesto por dos partes principales: la parte estática, donde se sitúa la camisa y se aplica el par de torsión, y la parte móvil, donde se coloca el eje del acoplamiento y se aplica el ángulo de desalineación en el sentido de las agujas del reloj. Este se aplica mediante un sistema pivotante con una serie de orificios en la parte móvil y en la base del banco y con pasadores de posicionamiento, que permiten ajustar el ángulo de desalineación de grado en grado con una precisión de $\pm 0.2^\circ$. El par se aplica mediante pesos calibrados hasta un máximo de 1000 Nm y se mide mediante una galga de torsión de puente completo (CEA-06-250US-350 de Micromeritics), la cual fue calibrada con una unidad de medición de par de alta precisión hasta alcanzar una precisión de ± 20 Nm.

El método más empleado en la literatura para la evaluación empírica de las tensiones en el pie consiste en colocar galgas extensiométricas [24,30,36]. Centrándose en estudios realizados para acoplamientos dentados, Herbstritt et al. [30] trataron la optimización del diseño de acoplamientos hasta un ángulo de desalineación $\gamma = 3^\circ$, mediante una correlación excelente en las tensiones del pie del diente. Sin embargo, no se proporcionó información sobre el banco de pruebas o el procedimiento de adquisición de datos. [36] analizó numéricamente y experimentalmente la distribución de la carga a lo largo de la longitud del acoplamiento, y [24] instrumentó con galgas extensiométricas en miniatura un diente en todo el ancho de cara. Se emplearon galgas extensiométricas de cuarto de puente y una frecuencia de adquisición de datos de 100 Hz.

Es por ello, que, para validar experimentalmente las tensiones en el pie, partiendo de la geometría del acoplamiento (propiedades en Tabla 2) se mecanizarán todos los dientes salvo uno para permitir el pegado de las galgas extensiométricas correctamente y eliminar cualquier efecto convectivo de los dientes adyacentes. Se coloca una galga extensiométrica de cuarto de puente (1-LY11-0.6/120 de HBM) con una anchura de alambre de un milímetro a ambos lados del diente, como se muestran en la Figura 3(b). Estas permiten medir deformaciones uniaxiales localizadas y permiten medir la tracción y compresión causadas por la flexión del diente.

Las condiciones de trabajo en las cuales se realizaron los ensayos son de 0 Nm a 150 Nm (dado que solo hay un único diente soportando todo el par aplicado) y de 0° a 7° de desalineación angular, con cinco repeticiones por ensayo para garantizar la repetibilidad de los resultados y eliminar cualquier holgura que pudiera tener el mecanismo. Una vez aplicado el par mediante los pesos calibrados, se hace la adquisición de datos durante 30 segundos para poder extraer un valor medio de deformación de cada galga extensiométrica.



Figura 3: (a) banco de ensayos diseñado [4] para realizar los ensayos experimentales, y (b) eje del acoplamiento mecanizado y galga extensiométrica utilizada para medir las deformaciones de flexión.

3. Resultados y Discusión

3.1. Validación experimental

En la Figura 4 se observan los resultados obtenidos tanto del modelo numérico como de los ensayos experimentales realizados para ángulos de desalineación distintos y en función del par aplicado. Las barras de error mostradas en cada dato experimental representan la variabilidad de los resultados obtenidos en todas las repeticiones realizadas. Asimismo, el área sombreada muestra los valores numéricos obtenidos dentro de la precisión de par $T \pm 20$ Nm, para el área en el que se sitúa la galga extensiométrica. Los valores de deformación medidos experimentalmente se han convertido a tensiones mediante el módulo de elasticidad (Tabla 2): $\sigma = E\varepsilon$, para que los datos sean más representativos. Como se aprecia en las gráficas, a mayor par aplicado mayores son las tensiones en el pie. También las tensiones de compresión son algo superiores a las de tracción, coincidiendo con la literatura [37]. Asimismo, los valores obtenidos experimentalmente se sitúan dentro de la región de los valores numéricos calculados. Cabe destacar que las diferencias observadas pueden estar ligadas a las desviaciones en el pegado de las galgas y la dirección en la que se han pegado.

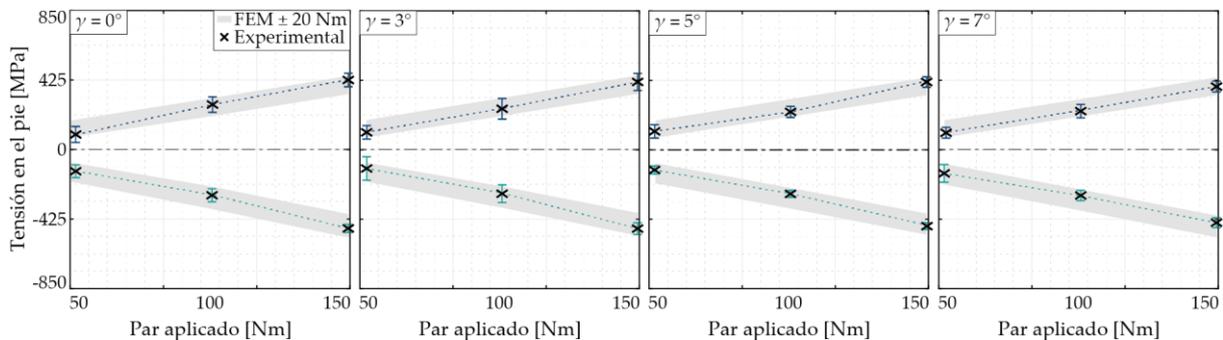


Figura 4: Comparativa numérico-experimental de tensiones en el pie del diente en función del par aplicado para diferentes ángulos de desalineación.

Asimismo, la Figura 5 muestra la evolución de la tensión en el pie tanto en el lado de tracción como en el de compresión en función del ángulo de desalineación para diferentes valores de par aplicados. La tendencia es similar para todos los pares, siendo las diferencias por la influencia del ángulo de desalineación más relevantes a mayor par aplicado. La tensión del pie del diente no varía significativamente en función del ángulo de desalineación. Esto se debe a que se está midiendo la tensión en un único diente y por tanto el efecto de la variación de la tensión en el pie solo viene dado por la modificación de la rigidez del diente causado por el desplazamiento del punto de contacto.

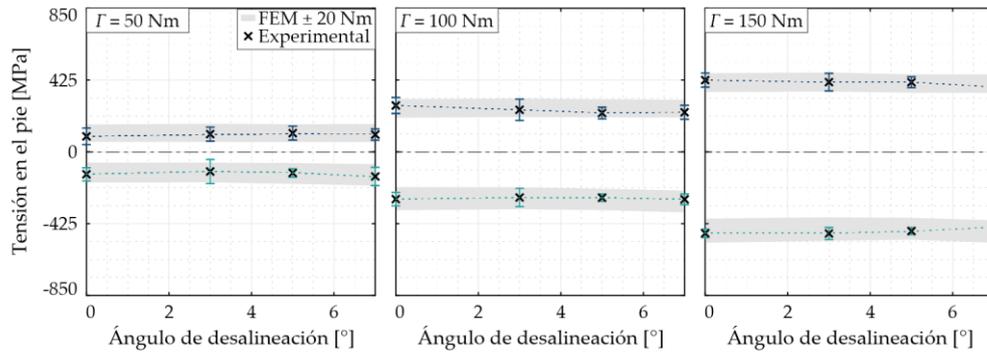


Figura 5: Comparativa numérico-experimental de tensiones en el pie del diente en función del ángulo de desalineación para diferentes pares aplicados.

Este efecto se entiende mejor en la Figura 6 donde se muestran los valores numéricos de tensión en el pie normalizados para diferentes ángulos de desalineación. El pico máximo de la tensión se desplaza junto con el punto de contacto (Figura 6(a)) y la variación en el valor de la tensión no es superior al 10% (Figura 6(b-c)). Asimismo, si se miran las tensiones en el mismo punto para diferentes ángulos de desalineación, (como se ha realizado experimentalmente), la variación de tensión es menor al 20%. Experimentalmente, las variaciones son menos remarcables, debido a la precisión que existe en el par aplicado, la cercanía entre los puntos de contacto y el error de posición en el pegado de las galgas.

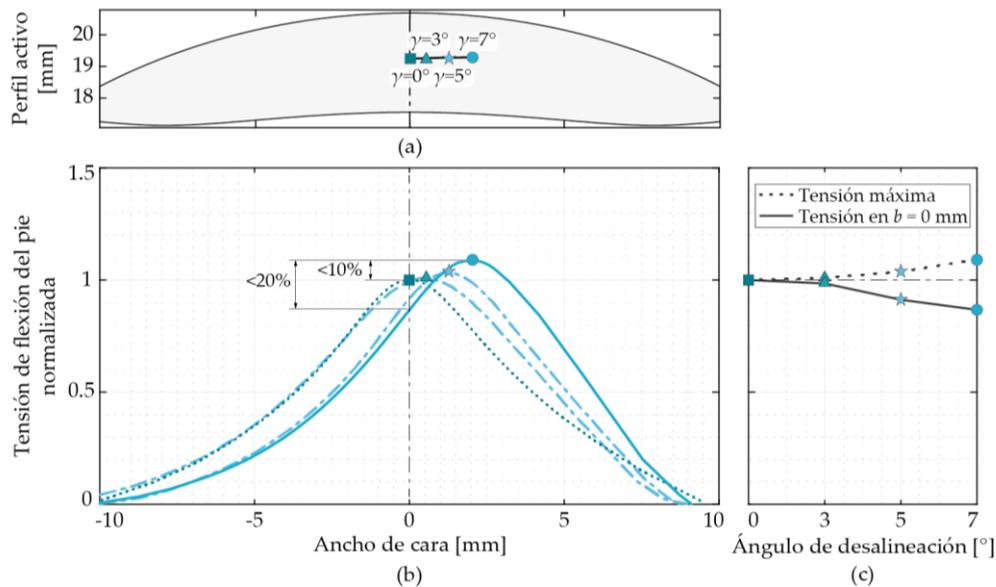


Figura 6: Resultados numéricos: (a) evolución del punto de contacto y (b) de tensiones en el pie normalizadas en función del ángulo de desalineación. (c) variación del valor normalizado máximo de la tensión en el pie y de la sección central en función del ángulo de desalineación.

3.2. Cálculo de la tensión máxima en el pie del diente

Para determinar la tensión máxima en el pie del diente para acoplamientos dentados abombados la normativa AGMA 945-1-B20 [7] propone la ecuación (8).

$$\sigma = \frac{2000\Gamma}{d_p^2 b Y} k_a k_{ls} k_m \quad (8)$$

Donde, Γ equivale al par aplicado, d_p al diámetro primitivo, b al ancho de cara del diente, Y al factor de Lewis, k_a corresponde al factor de aplicación de carga, k_m es el coeficiente de distribución de carga, y k_{ls} el coeficiente de reparto de carga. Estos dos últimos coeficientes son los más importantes a la hora de determinar la tensión en el pie en condiciones con desalineación angular alta, puesto que especifican el ancho de cara que está soportando la carga y entre cuantos dientes se reparte, respectivamente.

Por un lado, el coeficiente de reparto de carga (k_{ls}), se emplea para tener en cuenta el número de dientes que soportan realmente la carga. Causado por el ángulo de desalineación el juego entre los dientes del eje y de la

camisa no es constante y esto hace que los dientes entren en contacto de forma secuencial, siempre siendo los primeros los de la posición de cabeceo (en el plano perpendicular al ángulo de desalineación). Los criterios actualmente utilizados definen el número de dientes en contacto tan solo en función del ángulo de desalineación y sin tener en cuenta la rigidez del acoplamiento. Sin embargo, recientemente se ha demostrado [16,17] que este criterio no es adecuado para desalineaciones angulares altas, en las cuales se sobredimensiona el diseño en muchos casos, y lo que es aún más crítico, se subdimensiona en condiciones de trabajo muy desfavorables (ángulos de desalineación elevados con pares altos). Es por ello que se ha planteado un método para determinar el número de dientes en contacto efectivo basándose en el reparto de carga obtenido numéricamente y dividiendo la carga media soportada por cada diente (Γ_{med}) por la soportada por el diente más cargado (Γ_{max}). De esta forma en este trabajo el coeficiente de reparto de carga se determina mediante la ecuación (9).

$$k_{ls} = \frac{1}{C_{eff}} = \frac{1}{\Gamma_{med}/\Gamma_{max}} = \frac{\Gamma_{max}}{\Gamma/z} = \frac{z\Gamma_{max}}{\Gamma} \quad (9)$$

Por otro lado, en lo correspondiente al coeficiente de distribución de carga (k_m), en condiciones ideales y alineadas todos los dientes están engranados y el contacto está centrado en la mitad del ancho de cara, por lo que $k_m = 1$. No obstante, cuando se produce una ligera desalineación, debido a la cinemática y la variación espacial del punto de contacto, la definición del coeficiente no es tan evidente ni sencilla su estimación. El desplazamiento causado en el punto de contacto por el ángulo de desalineación provoca una variación del ancho de cara efectivo que soporta la carga [38]. Algunos trabajos calculan el desplazamiento máximo del punto de contacto y después definen la porción del diente que soporta la carga. Sin embargo, existen muy pocos datos [7,21,37] relacionados con el ancho de cara efectivo, y cómo considerarlo con aplicaciones de alta desalineación. Recientemente, basándose en resultados numéricos, el método propuesto en [17] mostró su eficacia para acoplamientos esféricos que trabajan con desalineaciones altas, donde el ancho de cara efectivo se definía basándose en el ancho del diente que soportaba el 70% de la tensión máxima del pie. Esta metodología se aplica también en este estudio, para determinar el coeficiente de distribución de carga mediante la ecuación (10).

$$k_m = \frac{b}{b_{eff}} \quad (10)$$

3.3. Procedimiento para la selección y optimización de acoplamientos dentados abombados

Como se ha mencionado en la Sección 2, actualmente se emplea el acoplamiento dentado descrito en la Tabla 2 para la aplanadora de acero de alta resistencia. Siguiendo con los requerimientos del acoplamiento establecidos en la Tabla 1, en la presente subsección se identifica la geometría del acoplamiento óptimo para dicha aplicación utilizando las herramientas descritas en las Secciones 1.1-1.3.

En primer lugar y empleando las gráficas de prediseño existentes en [29] se escogen los parámetros de la geometría de los acoplamientos que pueden alcanzar desalineaciones angulares máximas de 6° . La Figura 7 muestra la gráfica de prediseño para el diámetro primitivo de 50 mm, puesto que es el diámetro primitivo mayor permitido y un menor radio primitivo tendrá mayor riesgo de interferencias de tallado para desalineaciones angulares altas [29]. Cada una de las gráficas muestra la desalineación angular máxima permitida con cada geometría, divididas en cuatro ángulos de presión según la norma ISO 4156 [20]. Cada una de las geometrías está generada con un valor de ratio de abombamiento de entre 0.4 y 0.8. El ratio de abombamiento de un acoplamiento es un parámetro adimensional que relaciona su tamaño (radio primitivo, r_p) con el proceso de fabricación (radio de abombamiento, r_c). Cuanto menor es este valor mayor abombamiento tiene la geometría generada y puede alcanzar mayores ángulos de desalineación angular. Asimismo, se indican los límites de interferencia de tallado y apuntamiento, los cuales será preferible evitar en un rediseño puesto que se debilita la vida útil del acoplamiento. Se observa que si se pretende conseguir geometrías sin interferencia de tallado que alcancen la desalineación prestablecida hay que escoger geometrías con un reducido número de dientes o módulos grandes ($m = 5 - 6$ mm). Asimismo, se aprecia cómo un ángulo de presión más elevado permite las desalineaciones angulares deseadas sin interferencia de tallado o apuntamiento de cabeza. De estas gráficas de prediseño se descartan las geometrías de $\alpha = 20^\circ$, puesto que para alcanzar la desalineación angular deseada es inevitable la aparición de interferencia de tallado en el proceso de fabricación. Por tanto, se seleccionan tres geometrías de $d_p = 50$ mm tal y como se muestran en la Figura 7. Para comparar y decidir cuál es la geometría óptima, también se han seleccionado otras tres geometrías con $d_p = 40$ mm como el actual. Las propiedades de las geometrías preseleccionadas se describen en la Tabla 3.

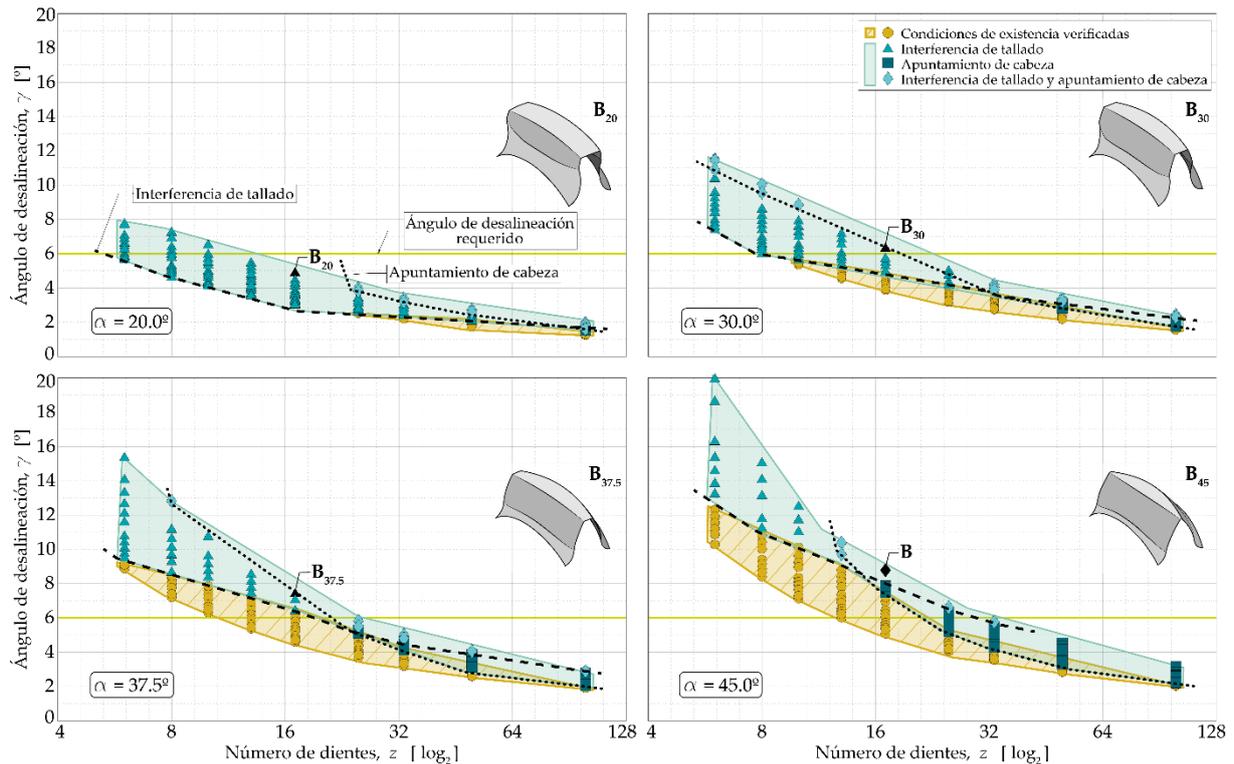


Figura 7: Ángulo de desalineación máximo para diferentes ángulos de presión en geometrías de: $d_p = 50 \text{ mm}$; $b = 0,3$; $k = 0,07$ [29]

Tabla 3: Parámetros del acoplamiento del caso de estudio utilizado en la aplanadora y ensayado.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Actual
Diámetro primitivo, [mm]	50	50	50	40	40	40	39
Módulo, [mm]	6	6	6	5	5	5	3
Número de dientes, [-]	8	8	8	8	8	8	13
Ángulo de presión, [°]	30	37.5	45	30	37.5	45	30
Relación de aspecto, [-]	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Radio de abombamiento, [mm]	24	27	27	20	20	23	10
Interferencia de tallado	No	No	No	No	No	No	Si
Ángulo de desalineación máx., [°]	6.7	7.2	8.5	6.6	8.2	8.3	7.0

Después de realizar la simulación con la desalineación máxima ($\gamma = 6^\circ$) se analizan los dos parámetros que influyen en las tensiones máximas del pie como se ha mencionado en la Sección 3.2: el número de dientes en contacto y el ancho de cara efectiva. La Figura 8 muestra el número de dientes en contacto y el número de dientes en contacto efectivo normalizados para cada uno de los casos preseleccionados. Tan solo fijándose en el número de dientes en contacto (Figura 8(a)), se concluye que el Caso 4 no es adecuado puesto que es el que menor número de dientes en contacto tiene para la desalineación máxima, y que sin embargo el Caso 1 es el más indicado. Es decir, un mayor diámetro primitivo con las mismas propiedades geométricas de los dientes (salvo en este caso el módulo) ofrece un mayor número de dientes en contacto, lo que implicará menores tensiones en el pie. Sin embargo, precedentes trabajos [12,15,17,39] han mostrado que, debido a la distribución no homogénea de las cargas en presencia de la desalineación, el número de dientes en contacto efectivo (Figura 8(b)) es un parámetro más relevante para el cálculo de las tensiones en el pie. En esta comparación, se puede ver que no existe mucha variedad en los resultados obtenidos entre los casos analizados. Es decir, todos los casos escogidos presentan una distribución de carga similar, dividida entre aproximadamente el mismo porcentaje de dientes. Esto puede ser debido al bajo número de dientes que tienen estas geometrías. Además, dado el alto grado de desalineación angular, pese a que se incremente el par aplicado se ve que el número de dientes en contacto no asciende.

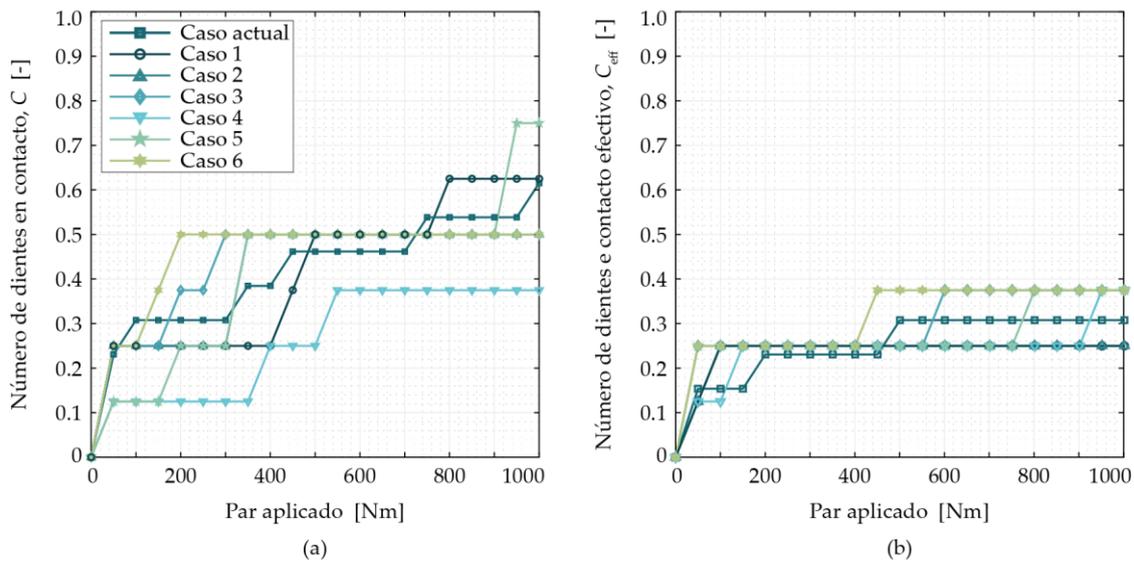


Figura 8: (a) número de dientes en contacto y (b) número de dientes en contacto efectivo normalizados para los casos preseleccionados en función del par aplicado.

Por otro lado, la Figura 9(a) muestra el ancho de cara efectivo calculado a partir de los resultados de la simulación y basándose en la metodología descrita en la Sección 3.2. Se aprecia que, para el mismo ratio de aspecto, el ancho de cara efectivo es mayor en los casos de menor diámetro primitivo ($d_p = 40$ mm). Es decir, el hecho de tener un ancho de cara mayor no significa que este ancho esté soportando las cargas. Los casos 4,5,6 tienen un ancho de cara efectivo de aproximadamente un 75% del total de la longitud del acoplamiento, mientras que los casos 1,2,3, y Actual del 50%, por lo que los casos 4,5,6 están más optimizados frente al Caso Actual, ya que tienen un mayor ancho del diente soportando la carga. No se aprecia efecto del ángulo de presión en el ancho de cara efectivo. En la Figura 9(b) se puede ver la distribución de tensiones en el pie para el par máximo aplicado ($T = 500$ Nm) con una desalineación angular de $\gamma = 6^\circ$. Existe diferencia entre el Caso Actual y resto de casos generados en la posición en la que se da el valor máximo de tensión (equivalente al punto de contacto). El parámetro que influye en este hecho es el radio de abombamiento del acoplamiento fabricado, el cual es de 10 mm en el Caso Actual y entre 20-27 mm para el resto de casos generados. A menor radio de abombamiento para el mismo ángulo de desalineación, se observa que el contacto estará más centrado en el ancho del diente. Sin embargo, reducir el radio de abombamiento aumenta el riesgo de interferencias de tallado durante la fabricación. Se puede ver que a mayor ángulo de presión la influencia del diámetro primitivo en las tensiones es menor. Las menores tensiones se obtienen con $\alpha = 45^\circ$, debido al mayor espesor de diente.

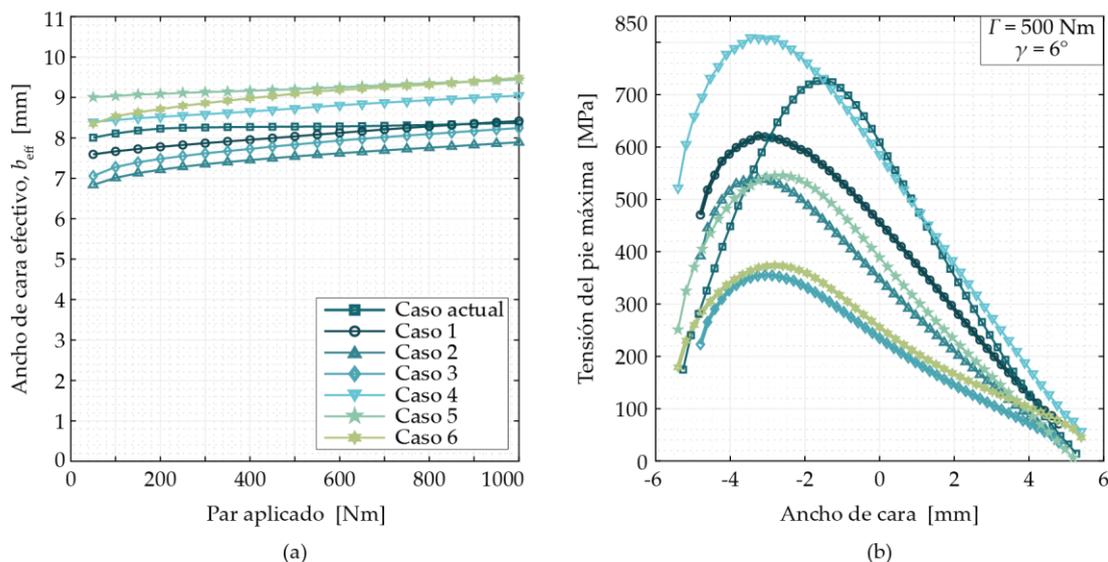


Figura 9: (a) ancho de cara efectivo en función del par aplicado y (b) tensión máxima en el pie a lo largo del ancho de cara para los casos preseleccionados y una desalineación angular de $\gamma = 6^\circ$.

Después de analizar los dos parámetros principales que influyen en las tensiones en el pie, la Figura 10 muestra la evolución de la tensión máxima del pie en función del par aplicado. Un mayor ángulo de presión ofrece una

reducción de tensiones de más del 50% frente al Caso Actual. Esta reducción es fundamentalmente debida al mayor espesor de diente que ofrece la fabricación del acoplamiento con $\alpha = 45^\circ$, dado que la influencia en el número de dientes en contacto no es evidente. Asimismo, se ha visto que el mayor diámetro primitivo no ofrece ventajas remarcables en el caso analizado, ya que, a pesar de tener un mayor ancho de cara en los casos con un menor diámetro primitivo, las tensiones son mayores.

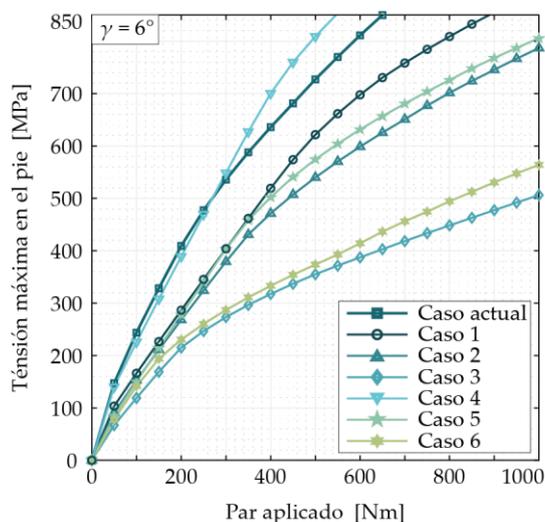


Figura 10: Tensión en el pie máxima para los casos preseleccionados en función del par aplicado para $\gamma = 6^\circ$.

Por tanto, para concluir que la elección del Caso 6 es adecuada para mejorar el Caso Actual, la Figura 11 muestra la evolución de la tensión máxima en el pie en función del ángulo de desalineación y para el par máximo aplicado (Figura 11 (b)) y el par máximo con desalineación máxima (Figura 11 (b)). Se confirma la reducción de tensiones de aproximadamente el 50% en todo el rango de desalineaciones angulares y par. Por lo que con el diseño optimizado se podría incrementar el par aplicado en los rodillos o aumentar la vida de dichos acoplamientos. Estas gráficas también muestran los valores calculados analíticamente a partir de la metodología descrita en la Sección 3.2. Se puede ver que los valores obtenidos se ajustan a los obtenidos numéricamente con un error inferior al 15%. Aunque se ha mejorado el valor predicho analíticamente frente a los métodos existentes en la literatura, aún hay que optimizar el cálculo del ancho de cara efectivo.

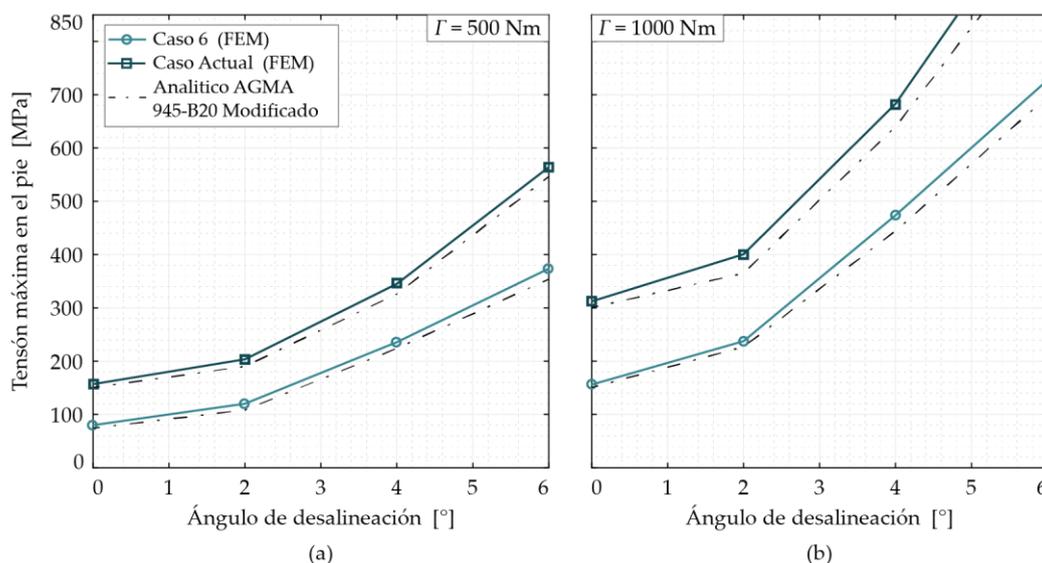


Figura 11: Tensión en el pie máxima numérico-analítica para el Caso Actual y el optimizado (Caso 6) en función del ángulo de desalineación: (a) $\Gamma = 500 \text{ Nm}$ y (b) $\Gamma = 1000 \text{ Nm}$.

4. Conclusiones

Este trabajo muestra una recopilación de modelos analíticos y numéricos para la determinación y cálculo de tensiones en el pie en acoplamientos abombados que trabajan con altas desalineaciones angulares. Este trabajo valida experimentalmente las tensiones obtenidas numéricamente y propone una metodología para optimizar

diseños existentes o incluso para realizar nuevos diseños. Los resultados obtenidos muestran la eficacia de los modelos analíticos y numéricos para tal fin, proponiendo un diseño con el cual se consigue reducir las tensiones en el pie más de un 50%. Ese cambio permitirá alargar la vida útil del componente, así como aumentar el par máximo aplicable. Todas ellas ventajas para el usuario, fabricante o vendedor de la aplanadora.

Se ha demostrado que el número de dientes en contacto efectivo es un parámetro clave para determinar las tensiones en el pie y que poco tiene que ver con el número de dientes en contacto. Además, se concluye la gran influencia del ángulo de presión en la reducción de las tensiones en el pie en aplicaciones que trabajan con grandes desalineaciones. Asimismo, se ha visto que el ancho de cara efectivo no varía excesivamente entre los casos aquí analizados con la metodología propuesta. Se valida que una correcta determinación del número de dientes en contacto efectivo y ancho de cara efectivo son parámetros suficientes para estimar la tensión máxima en el pie de acoplamientos dentados abombados que trabajan con una alta desalineación angular. Finalmente, se prevé que las diferencias existentes entre los valores predichos analítica y numéricamente están ligados al valor del ancho de cara efectivo, por lo que, esta variable deberá ser analizada más en detalle.

5. Referencias

- [1] S. Hahn, “Coupling connections and splines”, *Encyclopedia of Automotive Engineering*, John Wiley & Sons (2014)
- [2] M. Alfares *et al.*, “Clearance distribution of misaligned gear coupling teeth considering crowning and geometry variations”, *Mechanism and Machine Theory* **41** (10) (2006)
- [3] A. Inurritegui *et al.*, “Computerized generation and tooth contact analysis of spherical gear couplings for high misalignment applications”, *Mechanism and Machine Theory* **164** (2021)
- [4] A. Inurritegui *et al.*, “Numerical-experimental analysis of highly crowned spherical gear couplings working at high misalignment angles”, *Mechanism and Machine Theory* **183** (2023)
- [5] Y. Guan, *et al.*, “Comparative analysis of three geometric models for crown gear coupling”, *Mechanism and Machine Theory* **136** (2019)
- [6] F. Ohshima, *et al.*, “Study on tooth contact of gear couplings”, *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineering Series C* **78** (786) (2012)
- [7] AGMA Standard AGMA 945-1-B20, “Splines – Design and Application”, American Gear Manufacturers Association, Virginia, 2020
- [8] G. Henriot, *et al.*, *Accouplements, alignement des axes, Engrenages : Conception, Fabrication, Mise en œuvre*, 5ª edición, Dunod (1983)
- [9] R. Cedoz, *et al.*, “Design guide for involute splines”, Society of Automotive Engineers, (1994)
- [10] ISO Standard ISO 21771, “Gears-Cylindrical Involute Gears and Gear Pairs-Concepts and Geometry”, International Organization for Standardization, 2007
- [11] Y. Guan, *et al.*, “Tooth contact analysis of crown gear coupling with misalignment”, *Mechanism and Machine Theory* **126** (2018)
- [12] B. de Caires, “Variation analysis of involute spline tooth contact”, Tesis Doctoral, Brigham Young University (2006)
- [13] Y. Guan, *et al.*, “Effects of misalignment and crowning on contact characteristics of crown gear coupling”, *Journal of Mechanical Engineering Sciences* (2018)
- [14] S. Medina, *et al.*, “Regimes of contact in spline couplings”, *Journal of Tribology* **124** (2) (2002)
- [15] J. Silvers, *et al.*, “A new statistical model for predicting tooth engagement and load sharing in involute splines”, *Actas del Fall Technical Meeting* (2010)
- [16] F. Curà, *et al.*, “Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C* **227** (10) (2013)
- [17] A. Inurritegui, *et al.*, “Load distribution and tooth root stress of highly crowned spherical gear couplings working at high misalignment angles,” *Mechanism and Machine Theory* **179** (2023)
- [18] K. Nakashima, “Teeth contact behavior and load distribution of gear couplings”, *Transactions of the Japan society of mechanical engineers Series C* **502** (54) (1988)
- [19] D. Dudley, “When splines need stress control”, *Production Engineering* **28** (1957)

- [20] ISO Standard ISO 4156, “Straight Cylindrical Involute Splines”, International Organization for Standardization, Geneva, 2005
- [21] J. Larrañaga, *et al.*, “Misalignment effect on contact pressure and tooth root strength of spline couplings”, *Actas del 5th International Conference on Power Transmission-BAPT*, Macedonia (2016)
- [22] Y. Guo, *et al.*, “Theoretical and experimental study on gear-coupling contact and loads considering misalignment, torque and friction influences”, *Mechanism and Machine Theory* **98** (2016)
- [23] V. Cuffaro, *et al.*, “Analysis of the pressure distribution in spline couplings”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C* **226** (12) (2012)
- [24] M. Benatar, *et al.*, “An experimental investigation of the load distribution of spline joints under gear loading conditions”, *Journal of Advanced Mechanical Design* **11** (6) (2017)
- [25] Y. Guan, *et al.*, “An experimental investigation of contact characteristics of crown gear coupling with angular misalignment”, *Journal of Advanced Mechanical Design* **5** (2021)
- [26] V. Cuffaro, *et al.*, “Experimental investigation about surface damage in straight and crowned misaligned splined couplings”, *Key Engineering Materials* (2014)
- [27] S. Leen, *Fretting fatigue and wear of spline couplings: from laboratory testing to industrial applications through computational modelling*, Wear in Advanced Engineering Applications and Materials, World Scientific (2022)
- [28] J.R. Mancuso, *Couplings and Joints: Design, Selection and Application*, *Technology & Engineering*, M. Dekker (1986)
- [29] A. Iñurritegui, *et al.*, “Spherical gear coupling design space analysis for high misalignment applications”, *Mechanism and Machine Theory* **173** (2022)
- [30] W. Herbstritt, *et al.*, “Mill spindle advanced gear design”, *Iron Steel Engineering*. **76** (7) (1999)
- [31] I. Ulacia, *et al.*, “Fatigue life prediction of spherical gear couplings”, *Actas del Fall Technical Meeting*, Illinois (2018)
- [32] F. Litvin, *et al.*, *Gear Geometry and Applied Theory*, 2^a edición, Cambridge University Press (2004)
- [33] J. Argyris, *et al.*, “Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191** (11–12) (2002)
- [34] I. Gonzalez-Perez, *et al.*, “Implementation of a finite element model for gear stress analysis based on tie-surface constraints and its validation through the Hertz’s theory”, *Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design* **140** (2) (2017)
- [35] MSC.Software, *Marc 2019 - Volume B: Element Library* (2019)
- [36] D. Petersen, “Auswirkung der Lastverteilung auf die Zahnfußtragfähigkeit von hoch überdeckenden Stirnradpaarungen”, TIB Hannover (1989)
- [37] DIN Standard DIN 5466, “Splined joints, calculation of load capacity”, Deutsche Institut für Normung, 2002
- [38] E. Neale, *Introduction to gear couplings*, Neale consulting engineers (1980)
- [39] J. Cavaillès, *et al.*, “Etude de la répartition de la charge appliquée sur un accouplement délignable à petites dents fonctionnant en position délignée”, *Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aéronautique* (1971)