



Corrección en la medida del área de contacto de una rueda de ferrocarril

M. Maiztegui¹, J. Larrañaga¹, A. Arana¹, A. Oyanguren¹, I. Ulacia¹

¹ Dpto. de Mecánica y Producción Industrial. Mondragon Unibertsitatea, Arrasate-Mondragon, España.

mmaiztegui@mondragon.edu, jlarranaga@mondragon.edu, aarana@mondragon.edu,

aoyanguren@mondragon.edu, iulacia@mondragon.edu

El trabajo pionero de H. I. Andrews de 1959 sobre el contacto entre una rueda de ferrocarril y el carril de las vías férreas es de una relevancia significativa en el ámbito de desarrollo y optimización de máquinas ferroviarias. Andrews desarrolló una técnica experimental basada en el uso de carbono en forma de grafito y papel de oficina para visualizar el área de contacto generada por la aplicación de un rango incremental de cargas en diversas referencias de ruedas ferroviarias con vías nuevas y desgastadas, las cuales presentan distintos radios de curvatura. En su trabajo, Andrews llegó a la conclusión de que, aunque su técnica era capaz de captar la curva de tendencia del aumento del área de contacto al incrementar la carga normal aplicada a las ruedas, las medidas experimentales diferían de los cálculos analíticos realizados aplicando una forma simplificada de la teoría de Hertz. Las medidas experimentales resultaban en un área de contacto significativamente mayor a los cálculos teóricos tanto en vías nuevas como desgastadas, lo que Andrews atribuyó a la influencia de la rugosidad superficial no contemplada en la formulación analítica. En un trabajo reciente, donde se analiza la medida del área de contacto en elementos rodantes con superficies pintadas, se demuestra que el aumento del área de contacto experimental respecto al teórico se debe al grosor de la capa de pintura aplicada. Los resultados obtenidos en el desarrollo de esta metodología sugieren que el aumento en el área de contacto percibido por Andrews puede ser debido al efecto del grosor del papel utilizado y su deformación a compresión al aplicarse la fuerza normal en la rueda. La metodología de cálculo del área de contacto en superficies pintadas se ha aplicado a las medidas realizadas por Andrews para compensar el efecto del papel introducido en el contacto, calculando para ello la compresión de la lámina al aplicar la carga normal. Los resultados obtenidos concuerdan satisfactoriamente con los resultados experimentales medidos por Andrews, demostrando así que el efecto del espesor del papel introducido es mayor que el de la rugosidad superficial mencionada en la publicación original.

1. Introducción

La determinación experimental de las características de contacto entre dos cuerpos, y en particular la medición del área de contacto entre cuerpos elásticos opacos es un tema ampliamente estudiado en el que diversos investigadores han intentado realizar progresos durante años. Uno de los campos de aplicación más relevantes de este fenómeno es el sector ferroviario, donde el control del contacto entre las ruedas del tren y los carriles de las vías es fundamental para garantizar la seguridad, la capacidad de carga y la durabilidad del vehículo.

El área y las características de contacto entre cuerpos elásticos perfectamente lisos fueron descritas analíticamente por Hertz en 1895 [1]. Desde entonces se han desarrollado diversas metodologías para medir experimentalmente el área de contacto y validar dicha formulación. Diferentes grupos de investigación han abordado este desafío mediante diferentes técnicas como el uso de probetas transparentes de zafiro o elastómeros [2], haces de neutrones para cuerpos opacos a la luz visible [3], mediciones por ultrasonidos [4] o analizando la transferencia de una nanocapa de oro entre cuerpos observada mediante microscopía electrónica [5]. Sin embargo, la aplicabilidad de estas técnicas al ámbito ferroviario se ve restringida por la incompatibilidad de materiales, al requerir elementos distintos al acero, o por la inviabilidad económica debida a los elevados costes y la dificultad para justificarlos.

La investigación pionera de Andrews, publicada en 1959 [6], analizó el contacto entre las ruedas motrices de las locomotoras y los carriles utilizando polvo de carbón y papel de oficina colocado entre ambos componentes para medir el área de contacto. Su estudio consideró componentes recién torneados y desgastados, permitiendo observar la evolución del área de contacto con el uso del vehículo. Aplicando la formulación de Hertz para dos cilindros cruzados en contacto, sus resultados mostraron una buena concordancia en la tendencia de evolución del área de contacto al aumentar la carga normal aplicada. Sin embargo, los valores medidos fueron superiores a los valores calculados, tanto en geometrías de carril nuevas como desgastadas, para varios diámetros de rueda.

Este incremento en el área de contacto se atribuyó a la rugosidad de las superficies, un factor no contemplado en la formulación de Hertz. En el caso de los componentes ferroviarios, esta rugosidad puede ser relativamente pronunciada en comparación con componentes más controlados y precisos, como pueden ser los elementos rodantes utilizados en elementos de máquina como rodamientos o husillos. No obstante, otro posible factor que podría haber influido en los valores medidos es el grosor del papel interpuesto entre los cuerpos en contacto, ya que la formulación de Hertz tampoco considera la presencia de un tercer cuerpo menos rígido entre la rueda y el carril. Aún no está claro el impacto relativo de cada uno de estos fenómenos en la medición del área de contacto; y aunque el autor original Andrews lo atribuyó a la rugosidad, esta afirmación no ha sido verificada.

El efecto de capas blandas fácilmente removibles en el contacto entre dos cuerpos fue analizado por Maiztegui et al. [7], quienes estudiaron la influencia de recubrimientos de pintura en la medición del área de contacto para superficies metálicas de elementos rodantes de máquina. Sin embargo, el método desarrollado podría adaptarse a casos de estudio fuera de los elementos de máquina, como se menciona en la publicación original, lo que lo convierte en una alternativa versátil para la medición no destructiva de las características de contacto en componentes industriales sin modificaciones.

Por ejemplo, el método desarrollado podría aplicarse a la investigación de Andrews para determinar el efecto del papel interpuesto en el contacto. En el trabajo original de Maiztegui et al. [7] se considera que la pintura es una capa blanda con un módulo de elasticidad despreciable al ser mucho menor que el acero utilizado para los cuerpos en contacto. El módulo de Young del papel, aunque mayor que el de la pintura, es significativamente menor que el del acero, por lo que se puede considerar la misma hipótesis y aplicar la formulación desarrollada para superficies pintadas.

Según lo concluido [7], la presencia de este material puede aumentar significativamente el área de contacto medida. Aplicando la formulación analítica de contacto propuesta en dicho trabajo, se podría reducir la discrepancia entre los valores calculados y medidos en el trabajo de Andrews, relacionando el aumento del área de contacto con el espesor del papel.

El objetivo de este trabajo es demostrar la aplicabilidad de la metodología de corrección de la medida del área de contacto con recubrimientos blandos, desarrollada por los autores, a casos de estudio no considerados en el trabajo original. En este estudio, las geometrías analizadas son significativamente mayores y se utiliza una capa intermedia blanda, aunque no completamente removible por los cuerpos en contacto. Para ello, se han extraído los datos de la publicación original de Andrews y se han recalculado los resultados con ambas formulaciones. Una correcta medida del área de contacto puede servir como base para evaluar fenómenos de rodadura como el desgaste y la fatiga de contacto, además de contribuir a la optimización del rendimiento del sistema rueda-carril.

La aplicabilidad de la metodología de medida del área de contacto en superficies pintadas está limitada a cuerpos con un nivel bajo de rugosidad. Las superficies comúnmente empleadas en ámbitos industriales de rodadura o mecanizado contienen una rugosidad lo suficientemente baja como para que el área de contacto no se vea distorsionada en exceso. La aplicabilidad de la metodología de Hertz en contactos rugosos fue analizada por Johnson [8]. El método propuesto deja de ser aplicable en superficies con perfiles agresivos de rugosidad.

2. Formulación analítica

La formulación analítica propuesta por los autores para superficies pintadas [7] se basa en la teoría de contacto de Hertz, concretamente en la simplificación desarrollada por Hamrock y Anderson [9], la cual define el área de contacto Hertziana con las Ecuaciones 1 y 2.

$$a_H = \left(\frac{6k^2 \hat{E}FR}{\pi E} \right)^{1/3} \quad (1)$$

$$b_H = \left(\frac{6\hat{E}FR}{\pi kE} \right)^{1/3} \quad (2)$$

Donde a_H y b_H son los semiejes mayor y menor de contacto Hertziano respectivamente, k es el parámetro de elipticidad, \hat{E} es la integral elíptica de segundo tipo, F es la carga de contacto aplicada, R es el radio equivalente y E es el módulo de Young equivalente.

El recubrimiento aplicado produce un aumento en el área de contacto medida, lo que se puede cuantificar con relaciones geométricas entre los cuerpos en contacto. La formulación para superficies pintadas presentada por los autores se divide en dos tipos de contacto dependiendo de si ambos cuerpos son curvos o solo uno de ellos presenta un radio de curvatura significativo. En el caso de las ruedas del tren, cada eje de contacto presenta una combinación de superficie curva con superficie plana, por lo que se aplican las Ecuaciones 3 y 4 de la formulación modificada para la corrección del área de contacto. Estas expresiones consideran la penetración íntegra de la capa de recubrimiento, y parten del resultado analítico de la teoría de Hertz en las Ecuaciones 1 y 2.

$$a_p = \sqrt{r_w^2 - \left(\sqrt{r_w^2 - a_H^2} - h_p \right)^2} \quad (3)$$

$$b_p = \sqrt{r_r^2 - \left(\sqrt{r_r^2 - b_H^2} - h_p \right)^2} \quad (4)$$

Donde a_p y b_p son los semiejes mayor y menor de contacto en superficies pintadas, r_w es el radio de la rueda, r_r es el radio del carril y h_p es el grosor de la capa intermedia aplicada. La Figura 1 muestra el área de contacto generada entre la rueda y el carril ferroviarios con sus respectivos semiejes indicados.

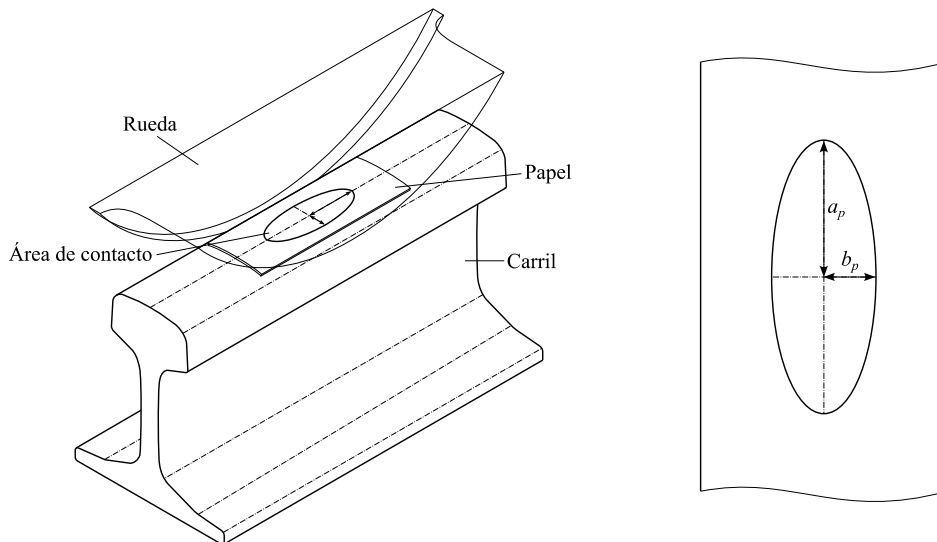


Figura 1: Esquema de contacto entre una rueda de tren y un carril ferroviario, indicando el área de contacto y los semiejes que definen la elipse generada por el contacto entre cilindros cruzados.

La formulación de contacto de superficie pintada desarrollada por los autores [7] utiliza un valor de espesor de recubrimiento el cual se considera que es completamente perforado por el indentador, marcando la huella de contacto en la superficie. Sin embargo, en el caso del ensayo de la rueda de ferrocarril realizado en el trabajo

original de Andrews, se utilizó papel normal junto con carbono para visualizar las áreas de contacto, el cual no puede ser completamente perforado por las probetas en las condiciones ensayadas. Esto significa que el aumento del área de contacto se deberá a que el papel ha sido comprimido en su espesor, pero no ha sido completamente superado, por lo que el espesor de película de cálculo que se utilizará será la distancia de compresión del material o su pérdida de espesor bajo carga.

El papel de oficina normal puede tener un grosor que oscila entre 50 μm y 150 μm [10]. En el ensayo realizado por Andrews, utilizaron el papel más fino disponible con el objetivo de reducir errores de medida del área de contacto, lo que tiene sentido si se analiza desde el enfoque de la formulación modificada mencionada anteriormente. Un material más grueso con propiedades elásticas similares se comprimirá más bajo la misma carga, lo que significa que el grosor de la capa que se utilizará para la formulación modificada será mayor y, a su vez, el área de contacto total será mayor, aumentando el error con respecto a los resultados analíticos de la formulación de Hertz. Teniendo esto en cuenta, se ha considerado para los cálculos un papel de 50 μm de espesor.

La compresión elástica del papel puede calcularse mediante la ley de Hooke, que puede simplificarse a una sola dimensión para este caso, como se muestra en la Ecuación 5. La deformación ε puede calcularse a partir de la longitud inicial l_0 y el cambio de longitud Δl o utilizando el módulo de Young E y la tensión aplicada σ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E} \quad (5)$$

El cambio de longitud Δl , es la variable de entrada utilizada para la formulación modificada propuesta, sustituyendo el espesor de capa h_p definido para superficies pintadas. El cambio de espesor de papel por compresión puede calcularse en función de la tensión aplicada definiendo un espesor de capa inicial de 50 μm y un módulo de Young de 5 GPa, que es el valor medio de la rigidez del papel normal [11]. Esta formulación permite determinar la longitud comprimida para cada carga aplicada en los casos estudiados y realizar la corrección para superficies estratificadas.

3. Casos de estudio

En el trabajo de Andrews se presentan los resultados experimentales de las medidas del área de contacto realizadas en dos diámetros de rueda de ferrocarril: una de 42 pulgadas de diámetro y otra de 49,75 pulgadas de diámetro. Se considera el uso de carriles de vía férrea nuevos y desgastados para analizar la evolución del área de contacto entre ambos componentes durante el uso del ferrocarril.

El material empleado para la fabricación de los especímenes de ensayo es el acero, el mismo empleado para la construcción de ruedas y carriles de ferrocarril, con el objetivo de acercarse lo más posible los resultados obtenidos a casos prácticos reales. Los parámetros de material considerados son un módulo de Young de 13400 ton/in² o 207 GPa con un coeficiente de Poisson de 0,3.

El espécimen de rueda de 42 pulgadas de diámetro se ensayó en carriles recién mecanizados, obteniendo los resultados que se muestran en la Figura 2. Estos datos han sido digitalmente muestreados de la publicación original para poder mostrarlas con mayor claridad y realizar un análisis más exhaustivo. Los carriles nuevos tienen un radio de curvatura inicial de 12 pulgadas, generando una elipse de contacto cuyo tamaño varía con la carga aplicada. Los resultados de la digitalización de los datos calculados de carril nuevo y las mediciones experimentales se muestran en la Tabla 1.

Las mediciones del área de contacto mostradas en la Figura 2 indican la tendencia de crecimiento del área al aumentar la carga de contacto, pero los resultados experimentales distan del modelo analítico empleado, aunque las tendencias de ambas curvas sean similares. Esta diferencia entre los resultados experimentales y analíticos no está debidamente justificada, ya que, aunque se mencione la rugosidad en el trabajo de Andrews, no se realiza ninguna comprobación para validar la hipótesis.

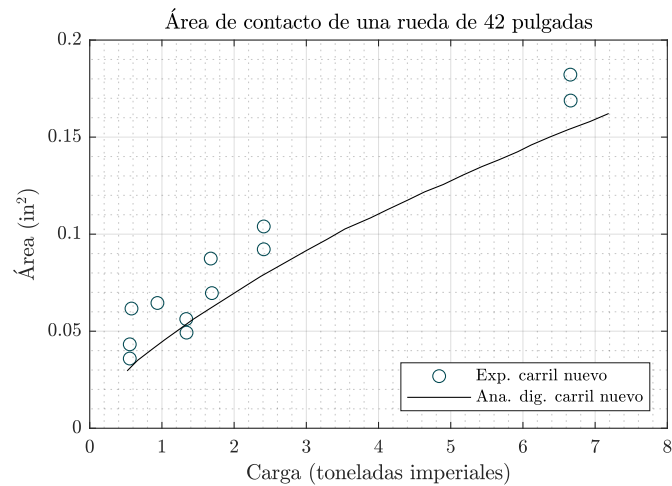


Figura 2: Variación del área de contacto con el aumento de la carga en una rueda de tren cónica de 42 pulgadas de diámetro en contacto con un carril nuevo (datos digitalizados del trabajo original [6]).

Tabla 1: Datos muestreados del gráfico de la rueda de 42 pulgadas [6].

Analítico		Carril nuevo	
Carga (ton)	Área (in ²)	Carga (ton)	Área (in ²)
0,513	0,029	0,565	0,036
1,008	0,044	0,558	0,043
1,778	0,064	0,584	0,061
2,466	0,080	0,956	0,064
2,999	0,092	1,348	0,049
3,480	0,101	1,348	0,056
4,00	0,109	1,701	0,069
4,784	0,123	1,682	0,087
5,510	0,136	2,414	0,092
6,004	0,144	2,421	0,103
6,633	0,154	6,672	0,168
7,250	0,162	6,666	0,182

Por otro lado, el espécimen de rueda de 49,75 pulgadas de diámetro se ensayó en carriles nuevos y desgastados. El radio de curvatura inicial de los carriles nuevos se modifica a lo largo de la vida del ferrocarril, que tras un uso prolongado se reduce a aproximadamente 10 pulgadas [6], donde también se modifica la geometría de la curvatura original y surge una combinación de curvaturas múltiples a lo largo del perfil del carril. Este fenómeno de desgaste, al cambiar las características geométricas del contacto, modifica el área de contacto. Además, el cálculo del área de contacto teórica del carril desgastado utilizando la formulación de Hertz ya no es exacto debido a que el carril se aleja de la forma ideal de curvatura única, y pueden generarse algunos puntos planos debido al mecanismo de desgaste.

En la Figura 3 se muestran los resultados originales obtenidos por Andrews para la rueda de 49,75 pulgadas de diámetro. Los resultados muestran que, como se ha mencionado anteriormente, los valores medidos tanto en el carril nuevo como en el desgastado son mayores de lo esperado a partir de los resultados analíticos, siendo el área de contacto en el carril desgastado menor que en el carril nuevo. No obstante, todos los resultados siguen la misma tendencia teórica creciente, pero el aumento del área de contacto en los resultados experimentales respecto a los analíticos no está debidamente justificado. Se muestran en la Tabla 2 los datos empleados para la reconstrucción digital del gráfico original.

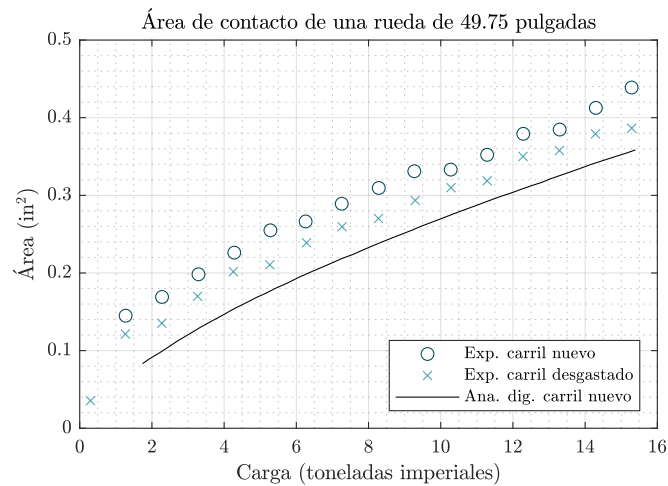


Figura 3: Variación del área de contacto con el aumento de la carga en una rueda de tren cónica de 49,75 pulgadas de diámetro en contacto con carriles nuevos y desgastados (datos digitalizados del trabajo original [6]).

Tabla 2: Datos muestreados del gráfico de la rueda de 49,75 pulgadas [6].

Analítico		Carril nuevo		Carril desgastado	
Carga (ton)	Área (in ²)	Carga (ton)	Área (in ²)	Carga (ton)	Área (in ²)
1,726	0,083	1,281	0,144	0,300	0,035
2,367	0,100	2,275	0,169	1,281	0,120
3,321	0,130	3,282	0,197	2,275	0,134
4,315	0,154	4,289	0,227	3,269	0,169
5,335	0,177	5,283	0,255	4,263	0,201
6,355	0,199	6,264	0,265	5,270	0,210
7,401	0,219	7,271	0,289	6,277	0,239
8,369	0,240	8,278	0,309	7,284	0,260
9,402	0,258	9,272	0,331	8,278	0,269
10,383	0,276	10,278	0,333	9,285	0,293
11,364	0,293	11,285	0,351	10,278	0,309
12,384	0,310	12,292	0,379	11,299	0,318
13,299	0,325	13,299	0,384	12,292	0,349
14,319	0,341	14,306	0,411	13,312	0,358
15,340	0,357	15,300	0,438	14,293	0,379
-	-	-	-	15,300	0,386

4. Resultados

A continuación, se recogen los resultados obtenidos de análisis de los casos de estudio presentados en la sección 3, comenzando con la validación de los resultados analíticos de la formulación presentada en la sección 2 comparando estos con los resultados obtenidos por Andrews. Tras validar la formulación, se presentan los resultados de la formulación modificada comparando los datos obtenidos con las medidas experimentales realizadas por Andrews en las ruedas de tren.

4.1. Validación de resultados analíticos

Los casos de estudio preseleccionados en la sección 3 incluyen un cálculo analítico basado en la teoría de Hertz de contacto elástico (como se muestra en las Figuras 2 y 3), el cual varía ligeramente de la formulación para contactos sin pintura presentada en la sección 2. La comparación de los resultados presentados en la publicación original con los obtenidos con la formulación de la teoría de Hertz propuesta en el trabajo de medida del área de contacto en superficies pintadas [7] sirve para validar la formulación Hertziana utilizada y la precisión de los parámetros de material y los radios de curvatura definidos por Andrews.

Como se ha mencionado en la sección 3, solo se proporcionan datos para carriles nuevos en el caso de la rueda de 42 pulgadas, por lo que los resultados analíticos solo se pueden validar con una única combinación geométrica. En la Figura 4 se muestran los resultados obtenidos para el caso de 42 pulgadas, donde se puede observar que los resultados recalculados coinciden con los resultados mostrados en la publicación original, por lo que se puede concluir que los datos empleados para el cálculo son correctos. Los resultados recalculados de las formulaciones de Andrews [6] y Maiztegui et al. [7] presentan ligeras diferencias entre sí, debidas principalmente al método utilizado por Andrews, que se basa en datos tabulados para la resolución de las integrales elípticas, lo que introduce errores cálculo mayores que la formulación propuesta por Hamrock y Anderson [9].

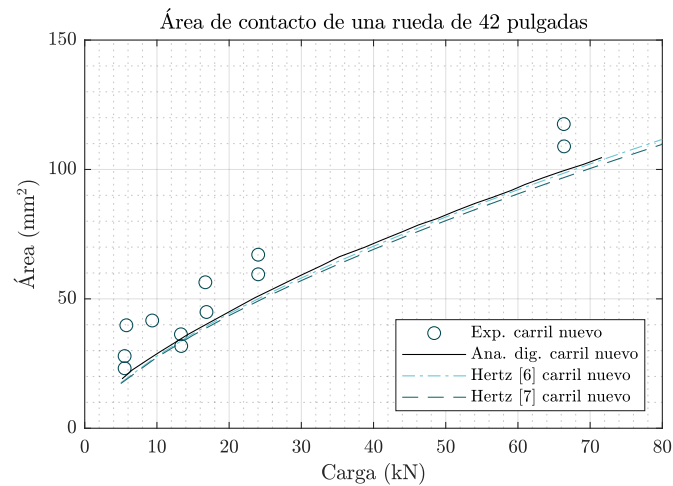


Figura 4: Comparación de los resultados analíticos de las formulaciones utilizadas por Andrews [6] y Maiztegui [7] para la rueda de 42 pulgadas de diámetro con los datos de los resultados extraídos de los gráficos originales.

Por otro lado, analizando los resultados obtenidos para la rueda de 49,75 pulgadas de diámetro mostrada en la Figura 5, se observa que, aunque hay una buena correspondencia entre ambas formulaciones recalculadas, éstas no coinciden con los resultados originales, lo que sugiere que hay un error en los datos utilizados para el cálculo. Aunque los resultados obtenidos distan mucho de los datos originales, la reducción del área de contacto debida al desgaste de las vías es similar a los resultados experimentales, lo que demuestra que la metodología puede representar adecuadamente el área de contacto en diversas combinaciones geométricas de curvatura.

Para obtener resultados de área de contacto analítica similares a los mostrados por Andrews con las formulaciones recalculadas, y considerando que el material empleado no varía entre los casos de estudio, sería necesario utilizar una rueda de 130 pulgadas (3,3 m) de diámetro, lo cual resulta inviable en trenes convencionales. Alternativamente, se podrían duplicar los radios de curvatura de los carriles manteniendo el diámetro de rueda. Sin embargo, esta modificación no es justificable, ya que, según lo indicado en el trabajo original, se emplean los mismos carriles para ambas geometrías de rueda propuestas.

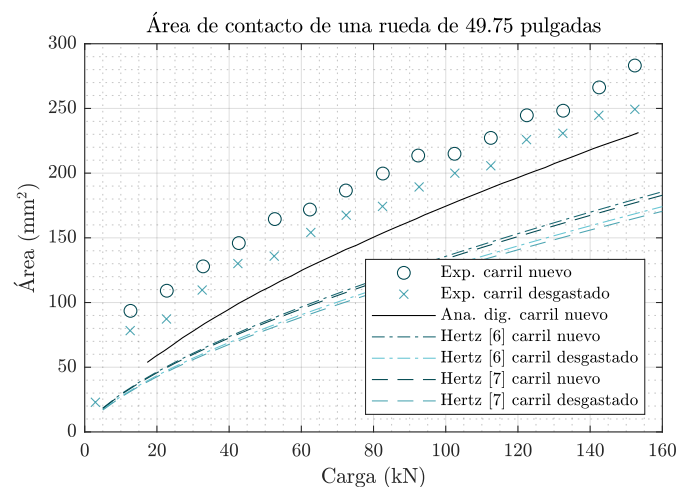


Figura 5: Comparación de los resultados analíticos de las formulaciones utilizadas por Andrews [6] y Maiztegui [7] para la rueda de 49,75 pulgadas de diámetro con los datos de resultados extraídos de los gráficos originales.

Tras analizar los resultados analíticos obtenidos para ambas muestras, se concluye que los resultados de la rueda de 42 pulgadas son los más adecuados para aplicar la formulación modificada, ya que la precisión de los datos de la otra muestra es insuficiente.

4.2. Resultados de la formulación modificada

Utilizando las ecuaciones descritas por Maiztegui et al. [7], se ha calculado la evolución del área de contacto medida sobre el papel de oficina en función de la carga aplicada para la rueda de 42 pulgadas sobre un carril nuevo. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 6, donde se observa una buena concordancia entre los resultados analíticos de la formulación modificada y las mediciones experimentales. Esto demuestra la validez de la formulación desarrollada en el estudio previo, incluso fuera del área de aplicación original en los elementos de máquina. Además, con la adaptación realizada en este trabajo para considerar recubrimientos que no son totalmente

perforados por las presiones de contacto aplicadas, la concordancia entre los datos experimentales y analíticos resulta satisfactoria.

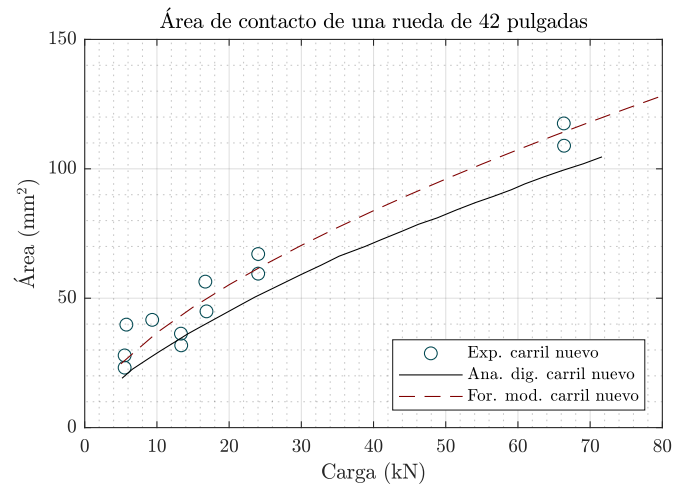


Figura 6: Resultado de la formulación modificada para las áreas de contacto de las ruedas de 42 pulgadas de diámetro considerando un espesor de capa variable subordinado a la carga comparado con los resultados experimentales y los resultados de la formulación analítica de Hertz.

Al tener en cuenta la deformación a compresión del papel, los resultados experimentales, aunque con una variabilidad significativa, pueden ser descritas con la formulación analítica modificada. Los resultados obtenidos en este trabajo sugieren que, a diferencia de lo propuesto por Andrews en su investigación, el efecto de la compresión del papel es más relevante que la rugosidad superficial de las muestras en la medida del área de contacto. La rugosidad superficial puede generar inconsistencias en el diámetro exterior del área de contacto, lo que puede explicar la variabilidad observada en los resultados experimentales de la Figura 6.

El área de contacto imperfecta producida por la rugosidad dificulta la determinación y medida manual de los semiejes de contacto, cuya variabilidad no es analizada en la publicación original. La carga aplicada puede también ser inconsistente dependiendo del equipo utilizado. La suma de todos estos factores genera la variabilidad experimental observada, algo no analizado por Andrews, por lo que se limita un análisis en mayor profundidad de los resultados.

5. Conclusiones

El presente estudio ha permitido reinterpretar los resultados experimentales obtenidos por H. I. Andrews en 1959 sobre la medición del área de contacto entre ruedas ferroviarias y vías férreas. A través de la aplicación de una metodología reciente basada en superficies pintadas, se ha demostrado que el incremento en el área de contacto medido por Andrews no se debe principalmente a la rugosidad superficial, como él sugirió originalmente, sino al espesor y la deformación por compresión del papel utilizado en su técnica experimental.

Los cálculos realizados para compensar este efecto muestran una concordancia satisfactoria con los valores medidos por Andrews, lo que valida la hipótesis de que la deformación del papel tiene un impacto significativo en la medición del área de contacto. Este hallazgo resalta la importancia de considerar el efecto de los materiales interpuestos en técnicas experimentales similares y sugiere la necesidad de revisar otros estudios históricos donde se hayan empleado métodos análogos.

Los resultados obtenidos contribuyen al desarrollo de técnicas más precisas para la caracterización del contacto en sistemas de rodadura, lo que puede tener implicaciones en la optimización de componentes ferroviarios y en el diseño de nuevas metodologías experimentales en el ámbito de la tribología, como pueden ser el desgaste o la fatiga por contacto rodante.

Si bien en este estudio se ha descartado el efecto de la rugosidad superficial en el área de contacto, su relevancia en el análisis tribológico de los elementos de rodadura no debe subestimarse. Aunque su impacto en el área aparente de contacto pueda ser insignificante a valores bajos de rugosidad, sus implicaciones en el estado tensional del contacto y en la iniciación de fracturas pueden influir en el desgaste prematuro de los componentes y deben considerarse en estudios futuros.

6. Referencias

- [1] H. Hertz, *Gesammelte werke*, vol. 1. Leipzig: J. A. Barth, 1895.
- [2] A. Ovcharenko, G. Halperin, I. Etsion, and M. Varenberg, “A novel test rig for in situ and real time optical measurement of the contact area evolution during pre-sliding of a spherical contact,” *Tribology Letters*, vol. 23, no. 1, pp. 55–63, Sep. 2006, doi: 10.1007/s11249-006-9113-9.
- [3] M. N. Dawson, “Applications of neutron radiography & tomography,” PhD thesis, University of Leeds, 2008.
- [4] G. Vogg, T. Heidmann, and S. Brand, “Scanning acoustic GHz-microscopy versus conventional SAM for advanced assessment of ball bond and metal interfaces in microelectronic devices,” *Microelectronics Reliability*, vol. 55, no. 9–10, pp. 1554–1558, Aug. 2015, doi: 10.1016/j.microrel.2015.06.066.
- [5] Y. Xu, Y. Chen, A. Zhang, R. L. Jackson, and B. C. Prorok, “A New Method for the Measurement of Real Area of Contact by the Adhesive Transfer of Thin Au film,” *Tribology Letters*, vol. 66, no. 1, p. 32, Mar. 2018, doi: 10.1007/s11249-018-0982-5.
- [6] H. Andrews, “The contact between a locomotive driving wheel and the rail,” *Wear*, vol. 2, no. 6, pp. 468–484, Oct. 1959, issn: 00431648. doi: 10.1016/0043-1648(59)90161-9.
- [7] M. Maiztegui, J. Larrañaga, A. Arana, A. Oyanguren, and I. Ulacia, “Non-destructive experimental technique to determine ball contact load in rolling machine elements,” *Tribology International*, vol. 195, p. 109 629, Jul. 2024, issn: 0301679X. doi: 10.1016/j.triboint.2024.109629.
- [8] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985. doi: 10.1017/CBO9781139171731.
- [9] B. J. Hamrock and W. J. Anderson, “Rolling-Element Bearings.” Jun. 01, 1983.
- [10] P. L. Houston and D. R. Miller, “A study of commercial dial micrometers for measuring the thickness of paper,” *Technologic Papers of the Bureau of Standards*, 1923. doi: <http://dx.doi.org/10.6028/nbst.6663>.
- [11] M. Khoury, G. E. Tourtoret, and A. Schröder, “Contactless measurement of the elastic young’s modulus of paper by an ultrasonic technique,” *Ultrasonics*, vol. 37, no. 2, pp. 133–139, Feb. 1999, issn: 0041624X. doi: 10.1016/S0041-624X(98)00049-3.