



# Influencia del ángulo de contacto en la cinemática y la distribución de carga de rodamientos a bolas

Pello Alberdi Quevedo<sup>1</sup>, Aitor Arana Ostolaza<sup>1</sup>, Aitor Oyanguren Garcia<sup>1</sup>, Jon Larrañaga Amilibia<sup>1</sup>,  
Ibai Ulacia Garmendia<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Mecánica y Producción Industrial. Mondragon Unibertsitatea, Arrasate-Mondragón, España.  
palberdi@mondragon.edu, aarana@mondragon.edu, aoyanguren@mondragon.edu, jlarrañaga@mondragon.edu,  
iulacia@mondragon.edu

---

*Los rodamientos a bolas son esenciales en componentes de máquinas rotativas debido a su capacidad para operar bajo cargas axiales y radiales combinadas a altas velocidades, y la lubricación es fundamental para mejorar tanto el rendimiento como la fiabilidad. Un parámetro clave en el diseño de estos rodamientos es el ángulo de contacto, que influye directamente en la capacidad del rodamiento para soportar cargas tanto radiales como axiales. Aunque generalmente se selecciona en función de la distribución de carga, el ángulo de contacto también afecta la cinemática de la bola, lo que repercute en el desgaste, las pérdidas de energía y la temperatura del componente. Este trabajo propone un modelo cuasi-estático basado en el principio de la mínima pérdida de energía para analizar cómo el ángulo de contacto impacta la distribución de carga, la cinemática de la bola y las pérdidas de potencia por deslizamiento. El modelo incorpora lubricación elastohidrodinámica (EHL) para tener en cuenta los efectos locales del movimiento de rotación y resuelve la cinemática del contacto considerando las interacciones de fricción. Los resultados se comparan con hipótesis comúnmente utilizadas en la literatura, destacando que, aunque diferentes hipótesis cinemáticas ofrecen predicciones similares en la distribución de carga, presentan diferencias significativas en la cinemática y las pérdidas de potencia. Así, se concluye que el ángulo de contacto debe ser seleccionado no solo por su capacidad de carga, sino también teniendo en cuenta su influencia sobre el deslizamiento, para optimizar el diseño de los rodamientos.*

---

## 1. Introducción

Los rodamientos a bolas se utilizan ampliamente en elementos de máquinas rotativas debido a su capacidad para operar bajo cargas axiales y radiales combinadas a altas velocidades de funcionamiento [1]. En la mayoría de los casos, se recurre a la lubricación para mejorar el rendimiento y la fiabilidad.

El ángulo de contacto es uno de los parámetros estructurales más importantes de un rodamiento de bolas. Se define como el ángulo entre la línea que conecta los puntos de contacto de la bola con las pistas interna y externa y el plano radial del rodamiento. Dependiendo de las condiciones de trabajo, se emplean distintos tipos de rodamientos, cuya principal diferencia radica en el ángulo de contacto, ya que este define la capacidad del rodamiento para soportar cargas radiales y axiales. Los rodamientos radiales estándar, diseñados principalmente para soportar cargas radiales, tienen ángulos de contacto pequeños, generalmente entre  $0^\circ$  y  $10^\circ$ . Esta característica les permite operar a altas velocidades y soportar predominantemente fuerzas radiales. En contraste, los rodamientos axiales de bolas presentan un ángulo de contacto cercano a  $90^\circ$ , ya que están diseñados exclusivamente para soportar cargas axiales. Por otro lado, los rodamientos de contacto angular, que deben soportar cargas axiales y radiales combinadas, presentan ángulos de contacto típicos entre  $15^\circ$  y  $40^\circ$ . La elección de los rodamientos se basa normalmente en la distribución de carga, sin considerar la influencia de la cinemática del contacto en el proceso de selección. Sin embargo, se sabe que el ángulo de contacto afecta tanto a la distribución de carga como a la cinemática de la bola [2]. Además, la cinemática de contacto es un parámetro determinante en el desgaste de las pistas, las pérdidas de energía y el aumento de la temperatura del componente. Por ello, la cinemática de contacto es un factor clave que debe considerarse en la etapa de diseño y elección de rodamientos.

La predicción teórica de la distribución de carga y la cinemática de las bolas en condiciones de lubricación representa un reto por tres razones. En primer lugar, la lubricación influye en la fricción del contacto, que a su vez gobierna la rotación de las bolas en las pistas de rodadura, y la cinemática afecta directamente a la fricción [3]. En segundo lugar, el contacto bola-pista no es conforme, lo que da lugar a altas presiones de contacto. El comportamiento de las propiedades del lubricante en tales condiciones es difícil de determinar [4]. Por último, el movimiento de la bola incluye tanto la rodadura como el spin, lo que genera una distribución no uniforme del deslizamiento dentro del contacto [2].

En la literatura una estrategia habitual para resolver la distribución de carga y la cinemática son los modelos cuasi-estáticos. Estos modelos emplean ecuaciones de equilibrio de fuerzas estáticas para cada bola. Estas ecuaciones consideran varios factores, como fuerzas de contacto y fuerzas inerciales, lo que permite la inclusión de efectos dinámicos [5]. Los modelos cuasi-estáticos presentan desafíos en su implementación, siendo el más crítico la incorporación de expresiones analíticas realistas de fricción en las ecuaciones de equilibrio [6]. El coeficiente de fricción de los contactos lubricados depende del estado de carga y de la cinemática de la bola, y a su vez, el movimiento de la bola está influenciado por el coeficiente de fricción. Por lo tanto, el problema debe resolverse simultáneamente, teniendo en cuenta estas variables interconectadas. Sin embargo, pueden surgir problemas de convergencia debido a la fuerte no linealidad de estas ecuaciones, por lo que una estrategia común es introducir restricciones cinemáticas para simplificar y resolver el problema.

Una de las primeras y más comúnmente utilizadas restricciones en la literatura es la hipótesis de control de la pista presentada por Jones [7,8]. Esta hipótesis asume que la bola rueda sin giro en una de las pistas, mientras que en la pista opuesta rueda y gira simultáneamente. La pista en la que ocurre el movimiento de rodadura pura se define como la pista de control y depende en gran medida de las condiciones operativas a las que está sometido el rodamiento. Aunque la precisión de la hipótesis de control de la pista aún no ha sido completamente validada, es ampliamente utilizada para modelar el rendimiento de los rodamientos [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Otra alternativa a la hipótesis de control de la pista fue desarrollada por Ding [16]. Basado en el principio de inercia de d'Alembert, este enfoque considera que la potencia transmitida por todas las fuerzas sobre la bola es cero. La implementación de esta estrategia es cada vez más frecuente en los modelos cuasi-estáticos [17, 18, 19, 20, 21]. Otro enfoque para reemplazar la hipótesis de control de la pista es calcular el ángulo de paso como el valor promedio de los ángulos de contacto interno y externo. En la literatura, este modelo es conocido como la hipótesis geométrica. Foord [22] midió experimentalmente el ángulo de paso de la bola y encontró que sigue esta tendencia. Este enfoque también ha sido implementado por otros autores, como Noel et al. [23] y Tong [25, 25, 26].

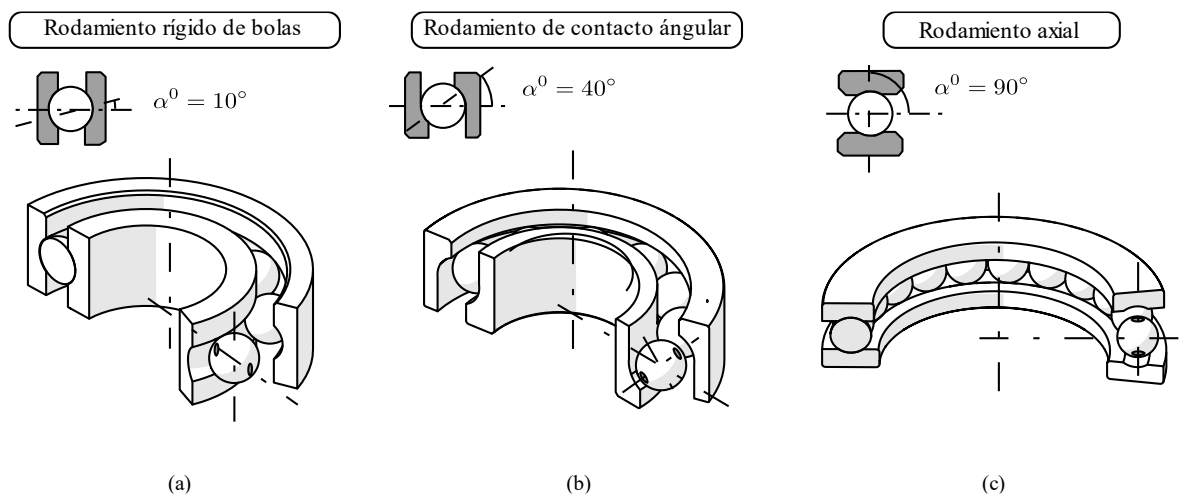
Todos los modelos mencionados se basan en restricciones cinemáticas y no pueden considerar la influencia de las interacciones en el contacto lubricado al resolver la cinemática de la bola. Por ello, generalmente se acepta en la literatura que los modelos cuasi-estáticos pueden predecir con precisión la distribución de carga, pero no son precisos para determinar la cinemática de los componentes del rodamiento [27, 28].

Para abordar estas limitaciones, varios autores han propuesto el concepto de disipación mínima de energía para determinar la cinemática de la bola. Esta hipótesis establece que la bola se moverá de tal manera que se disipe la menor cantidad de energía por deslizamiento. Este tipo de modelos permite una gran flexibilidad para introducir las interacciones friccionales en el problema. Por ello, en estos modelos las interacciones friccionales se caracterizan de diversas maneras. Para condiciones de contacto seco, la mayoría de los autores [29, 30, 31, 32]

asumen un valor constante único para el coeficiente de fricción dentro del contacto. Otros refinan esta suposición incorporando el fenómeno de adherencia-deslizamiento de Kalker [33] para representar mejor las tensiones tangenciales en contactos secos [34]. Para condiciones lubricadas, Foord [22] también asumió un coeficiente de fricción constante para el área de contacto. Sin embargo, esta suposición se vuelve inválida en contactos lubricados, ya que las características de fricción varían a lo largo de la superficie de contacto. Por lo tanto, se requiere un enfoque más avanzado para capturar con precisión el comportamiento friccional. En este sentido, Gupta et al. [35, 36] y, más recientemente, los presentes autores [37] han introducido una expresión más refinada de lubricación elastohidrodinámica (EHL) en el modelo cuasi-estático para describir las interacciones friccionales.

La mayoría de los trabajos en la literatura analizan el comportamiento mecánico de la bola en función de las condiciones de trabajo. Sin embargo, no es frecuente estudiar el efecto de la geometría en su comportamiento dinámico. Existen algunos estudios en los que se ha investigado la influencia de las variables geométricas. Entre otros, el trabajo de Wang et al. [38] analiza la influencia del ratio de conformidad de la pista en las características de contacto y movimiento de la bola. Gloeckner [39] analiza experimentalmente la influencia de este ratio en el par de fricción. En relación al ángulo de contacto, existen varios estudios que analizan su influencia. Por ejemplo, algunos otros trabajos mencionan el ángulo de contacto. Estos trabajos se centran en la distribución de carga y la vida a fatiga del componente [40, 41]. Sin embargo, según el conocimiento de los autores, no existe en la literatura ningún estudio que analice el efecto del ángulo de contacto en la cinemática y la pérdida de potencia de contacto.

El objetivo de este trabajo es analizar la influencia del ángulo de contacto en la distribución de carga, la cinemática de contacto y las pérdidas de potencia por deslizamiento. Para ello, se ha desarrollado un modelo cuasi-estático basado en el principio de la mínima pérdida de energía, el cual permite resolver la cinemática del contacto considerando la fricción, lo que se espera que aporte mayor precisión. Dado que existen diversos métodos para modelar la cinemática del contacto, y con el fin de recalcar la importancia de la predicción cinemática en el comportamiento mecánico de la bola, los resultados se han comparado con diferentes hipótesis comúnmente utilizadas en la literatura



**Figura 1:** Ejemplos de diferentes tipos de rodamiento. (a) rodamiento rígido de bolas, (b) rodamiento angular y (c) rodamiento axial.

## 2. Modelo teórico

El modelo empleado en este estudio se basa en el desarrollado por los presentes autores en la referencia [37]. Esta sección proporciona una descripción resumida del modelo con el fin de comprender los fundamentos de su formulación, las ecuaciones que lo rigen y las hipótesis consideradas en su desarrollo.

El modelo se fundamenta en el principio de la mínima energía, el cual establece que la bola se moverá de tal manera que se disipe la menor cantidad de energía por deslizamiento. Esta estrategia permite acoplar de forma eficaz la cinemática y la fricción con un costo computacional reducido.

El problema se resuelve mediante módulos independientes. Esta estrategia aporta una gran flexibilidad al modelo, permitiendo la integración de distintos modelos de fricción sin alterar la estructura general del modelo cuasi-estático. En este caso, se ha introducido un modelo teórico de lubricación elastohidrodinámica (EHL) que considera los efectos locales producidos por el *spin* [42]. Dado que la predicción de la fricción en contactos lubricados es un desafío técnico, la naturaleza modular del modelo permite incorporar formulaciones de distinta complejidad con solo modificar el bloque correspondiente a la caracterización de la fricción.

### 2.1. Distribución de carga

Los ángulos de contacto y las cargas de contacto se calculan a través de las ecuaciones de elasticidad y equilibrio de la bola. El análisis se realiza individualmente para una bola que se encuentra en una posición angular determinada en la bola.

La relación carga-deformación se calcula para un determinado desplazamiento axial ( $\delta_a$ ), radial ( $\delta_r$ ) y angular ( $\theta$ ) de la pista interior. La Figura 2(a) muestra la posición del centro de la curvatura de la bola y la pista. Mediante la compatibilidad geométrica de la figura, se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\Delta_{i,j} \sin \alpha_{i,j} + \Delta_{o,j} \sin \alpha_{o,j} - A_{1,j} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{i,j} \cos \alpha_{i,j} + \Delta_{o,j} \cos \alpha_{o,j} - A_{2,j} = 0 \quad (2)$$

En estas ecuaciones, los subíndices  $i$  y  $o$  hacen referencia a la pista interna y externa respectivamente. Por otra parte, desde el diagrama del sólido libre de la Figura 2, se obtienen las ecuaciones de equilibrio de fuerza que actúan en la bola:

$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow W_{i,j} \sin \alpha_{i,j} - W_{o,j} \sin \alpha_{o,j} + F_{ri,j} \cos \alpha_{i,j} - F_{ro,j} \cos \alpha_{o,j} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow W_{i,j} \cos \alpha_{i,j} - W_{o,j} \cos \alpha_{o,j} + F_{ri,j} \sin \alpha_{i,j} - F_{ro,j} \sin \alpha_{o,j} + F_{c,j} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{z'} = 0 \rightarrow M_{g,j} - 0.5 D F_{ri,j} - 0.5 D F_{ro,j} = 0 \quad (5)$$

Las variables  $M_{g,j}$  y  $F_{c,j}$  son el momento giroscópico y la fuerza centrífuga respectivamente. Mediante estas variables se introduce el efecto de las fuerzas dinámicas. Hay que destacar que estas variables se calculan a través de las relaciones cinemáticas. La distribución de carga y cinemática están relacionadas.

Una vez conocida la carga y la geometría de las pistas, se calcula la distribución de presión y la huella del contacto elíptico siguiendo la teoría de Hertz.

### 2.2. Cinemática del punto de contacto

El efecto combinado de la superficie de contacto curvada y el movimiento de *spin* de la bola produce una distribución no uniforme de la velocidad de deslizamiento en la superficie de contacto. La Figura 2(b) ilustra la distribución de la velocidad de deslizamiento de los contactos de rodamientos de bolas. El componente de la velocidad de deslizamiento en un punto arbitrario de la superficie de contacto se calcula como la diferencia entre la velocidad lineal de la bola y la de la pista.

$$\mathbf{v}_{s,k} = \mathbf{v}_{b,k} - \mathbf{v}_{r,k} \quad (k = i, o) \quad (6)$$

donde  $\mathbf{v}_{b,k}$  es la velocidad de la bola,  $\mathbf{v}_{r,k}$  la velocidad de la pista. La velocidad lineal de la bola se calcula a mediante la siguiente relación:

$$\mathbf{v}_{b,k} = \boldsymbol{\omega}_{R,k}^c \times \mathbf{s}_{b,k} \quad (k = i, o) \quad (7)$$

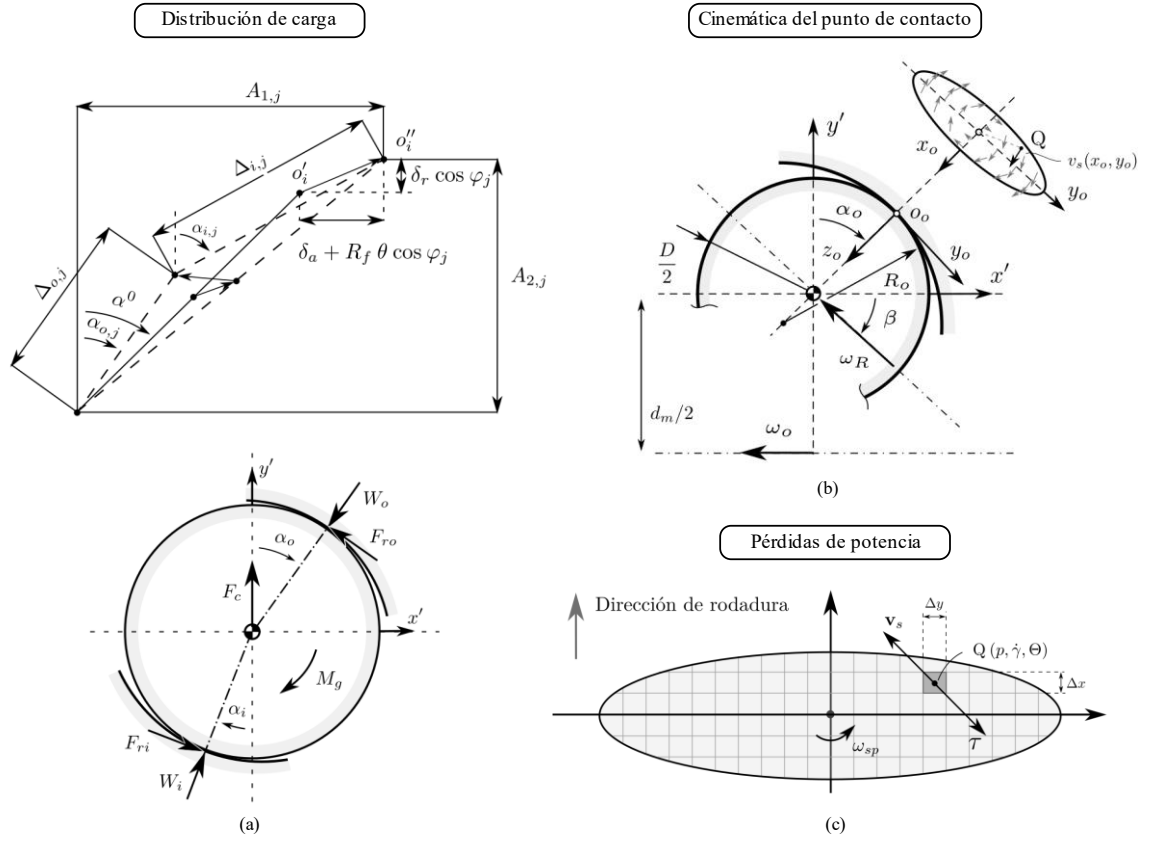
En el cual,  $\mathbf{s}_{b,k}$  es el vector de posición y  $\boldsymbol{\omega}_{R,k}^c$  la velocidad angular de la bola. Siguiendo el mismo procedimiento, se calculan las velocidades de la pista interna y externa:

$$\mathbf{v}_{r,k} = \boldsymbol{\omega}_k^c \times \mathbf{s}_{r,k} \quad (k = i, o) \quad (8)$$

En este caso,  $\mathbf{s}_{r,k}$  es el vector de posición de la pista interna.

### 2.3. Cálculo de pérdidas de potencia

La pérdida de potencia de la bola en los rodamientos se clasifica en dos categorías. Por un lado, están las pérdidas dependientes de la carga, que incluyen las pérdidas por rodadura y deslizamiento. Por otro lado, se encuentran las pérdidas independientes de la carga, como las pérdidas por arrastre y aquellas relacionadas con las interacciones con la jaula.



**Figura 2:** Resumen gráfico de los módulos que componen el modelo.

Las pérdidas de energía debidas a la rodadura, las fuerzas de arrastre y las interacciones con la jaula no varían con la cinemática de contacto. Estas pérdidas dependen de parámetros cinemáticos globales, como la velocidad orbital y la velocidad de rotación de la bola [37]. Por ello, los cambios en la cinemática de contacto no afectan el valor de estas pérdidas. Dado que el objetivo es minimizar la pérdida de energía de la bola, el modelo solamente considera las pérdidas generadas por el deslizamiento de contacto. Por definición, la pérdida de potencia por deslizamiento se calcula mediante la integral de área de la velocidad de deslizamiento ( $v_{s,k}$ ) y tensión de cortadura del aceite ( $\tau_k$ ):

$$P_{s,k} = \iint_{A_H} |v_{s,k}| |\tau_k| dA_H = \iint_{A_H} |v_{s,k}| |\min(\dot{\gamma} \eta_G, \Lambda p)| dA_H \quad (k = i, o) \quad (9)$$

donde  $\dot{\gamma}$  es el ratio de cizalladura que se calcula como  $\dot{\gamma} = |v_{s,k}|/h_c$ . La variable  $\eta_G$  es la viscosidad generalizada y  $\Lambda$  coeficiente presión-viscosidad límite. La viscosidad se ha calculado considerando su comportamiento no-Newtoniano y se ha predicho siguiendo el modelo de Carreau [43].

#### 2.4. Procedimiento de la minimización de las pérdidas de potencia

Una vez presentadas las ecuaciones fundamentales, se introduce el procedimiento para resolver el modelo. La Figura 3 muestra el diagrama de bloques del procedimiento. La solución consiste en resolver los parámetros cinemáticos  $r'_i$ ,  $r'_o$  and  $\beta$  los cuales minimizan la pérdida de energía por deslizamiento de la bola. Tal y como se ha mencionado, la pérdida de energía en el contacto depende de la carga y la cinemática de contacto, por lo que se itera hasta encontrar el valor óptimo. El proceso, consiste en un problema de optimización multivariable el cual se resuelve siguiendo la metodología de descenso de gradiente de Newton, presentado en la Ecuación (10). Los términos de las derivadas parciales se calculan siguiendo el esquema de la diferencia central [44].

$$\begin{bmatrix} r'_i \\ r'_o \\ \beta \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} r'_i \\ r'_o \\ \beta \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial r'_i} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r'^2_i} \right)^{-1} \\ \frac{\partial P}{\partial r'_o} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r'^2_o} \right)^{-1} \\ \frac{\partial P}{\partial \beta} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} \right)^{-1} \end{bmatrix}_k \quad (10)$$

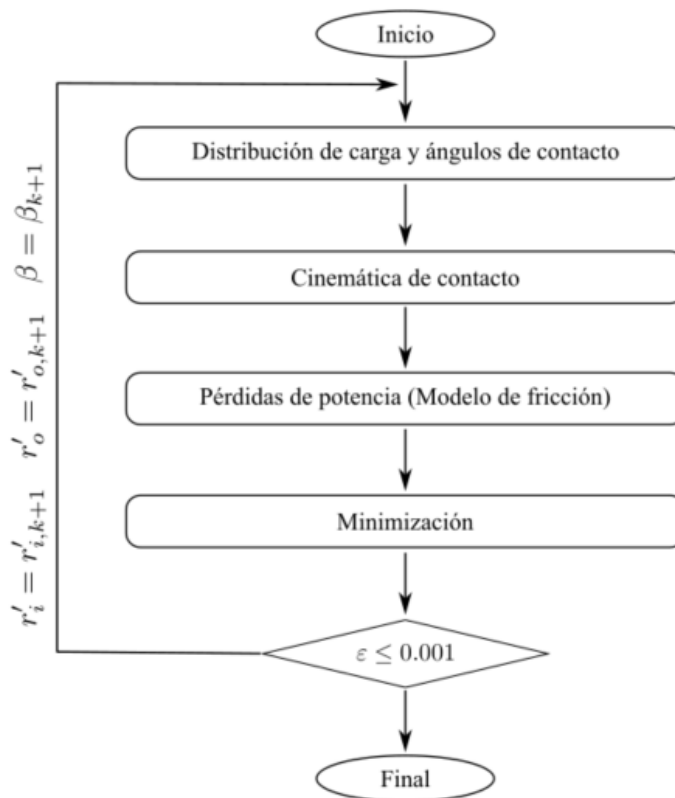


Figura 3: Diagrama de flujo del método de la mínima energía.

### 3. Definición del caso de estudio

En el presente estudio se analiza la influencia del ángulo de contacto en el rendimiento de los rodamientos. Los principales parámetros geométricos y de material del rodamiento se enumeran en la Tabla 1. Estos parámetros corresponden a los rodamientos de la referencia 7205 [45]. Las simulaciones se han realizado variando el ángulo de contacto entre  $10^\circ$  y  $90^\circ$ . El caso límite de  $10^\circ$  se refiere a un rodamiento rígido de bolas, mientras que el de  $90^\circ$  representa un rodamiento axial. Todos los demás ángulos están relacionados con rodamientos de contacto angular.

La capacidad de carga estática básica de este tipo de rodamiento es de aproximadamente 11 kN y la velocidad límite es de 26.000 rpm [45]. Estos parámetros se utilizaron como referencia para seleccionar las condiciones de operación en el caso de estudio. Las simulaciones se han realizado en una única condición de trabajo, ya que el objetivo es analizar exclusivamente la influencia del ángulo de contacto.

El lubricante seleccionado para el estudio fue el escualeno, que es representativo del comportamiento reológico de los aceites minerales parafínicos de baja viscosidad o de los polialfaolefinas (PAO) utilizados en aplicaciones de rodamientos [46]. Este lubricante se utiliza frecuentemente en estudios teóricos y experimentales de EHL [47, 48]. Sus propiedades reológicas y termofísicas están bien caracterizadas en la literatura a partir de mediciones con reómetros de alta presión y simulaciones moleculares dinámicas [43, 49, 50].

Tabla 1: Parámetros de diseño, propiedades del material y condiciones de trabajo del caso de estudio.

Parámetro	Caso de estudio
Diámetro de la bola, $D$ [mm]	7.94
Diámetro primitivo, $d_m$ [mm]	38.5
Radio de la pista, $r_{i/o}$ [mm]	4.2
Ángulo de contacto nominal, $\alpha^0$ [°]	10-90
Número de bolas, $Z$ [-]	13
Material	AISI 52100
Módulo de Young, $E$ [GPa]	210
Ratio de Poisson, $\nu$ [-]	0.3
Densidad, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Carga axial, $F_a$ [N]	1500 N
Velocidad de rotación, $\omega$ [rpm]	5000 rpm
Lubricante	Escualeno

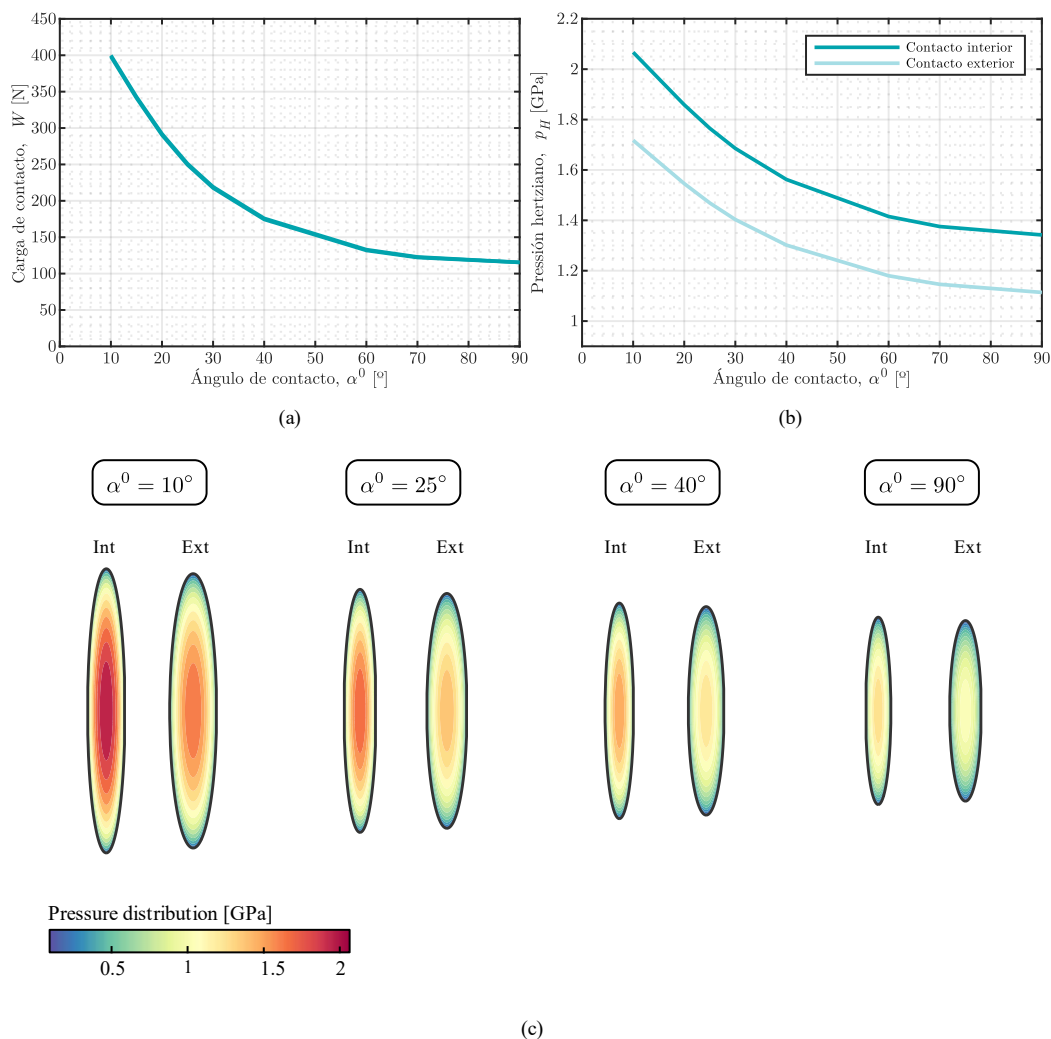
## 4. Resultados

### 4.1. Efecto del ángulo de contacto en la carga y la presión de contacto

La Figura 4(a) muestra la evolución de la carga de contacto en relación con el ángulo de contacto. Bajo las condiciones operativas simuladas, las cargas de contacto en la pista interna y externa son iguales. Es cierto que, según la literatura, a altas velocidades de rotación, la fuerza de contacto interior tiende a disminuir, mientras que la del contacto exterior aumenta debido a las fuerzas centrífugas. Sin embargo, el objetivo de este análisis es aislar el efecto del ángulo de contacto. Para no desvirtuar el análisis, no se ha considerado la influencia de la velocidad de rotación. En este sentido, se observa que la carga de contacto disminuye a medida que aumenta el ángulo de contacto. Esto se debe a que la proyección de las cargas de contacto en la dirección axial aumenta con el ángulo de contacto. Como resultado, se requieren menores cargas de contacto para lograr la misma carga axial.

La Figura 4(b) presenta la presión hertziana en los contactos interno y externo. A pesar de que la carga de contacto es idéntica en ambos contactos, la presión hertziana en el contacto interno es mayor que en el externo. Esta diferencia está relacionada con la teoría de contacto de Hertz y se debe a la diferencia de la convexidad de las pistas interna y externa. El contacto entre la pista interna y la bola es cóncavo mientras que el contacto entre la pista externa y la bola es convexo. Esto da lugar a diferentes relaciones de elipticidad, lo que afecta al área de la superficie de contacto. En consecuencia, en cada contacto la misma carga se distribuye sobre un área de contacto diferente, lo que genera una distinta presión.

Este fenómeno, se observa en la Figura 4(c), donde se muestran la huella de contacto y la distribución de la presión para el caso de cuatro geometrías, cada uno con un ángulo de contacto distinto. Se puede ver que, para todas las geometrías, la superficie de contacto es mayor en el contacto externo. Además, la figura muestra la evolución de la presión de contacto con respecto al ángulo de contacto. La huella de contacto, junto con la presión de contacto, se reduce sustancialmente a medida que aumenta el ángulo.



**Figura 4:** Influencia del ángulo de contacto en la (a) carga normal, (b) la presión de contacto y (c) distribución de la presión sobre la superficie de contacto.

#### 4.2. Efecto del ángulo de contacto en la cinemática de contacto

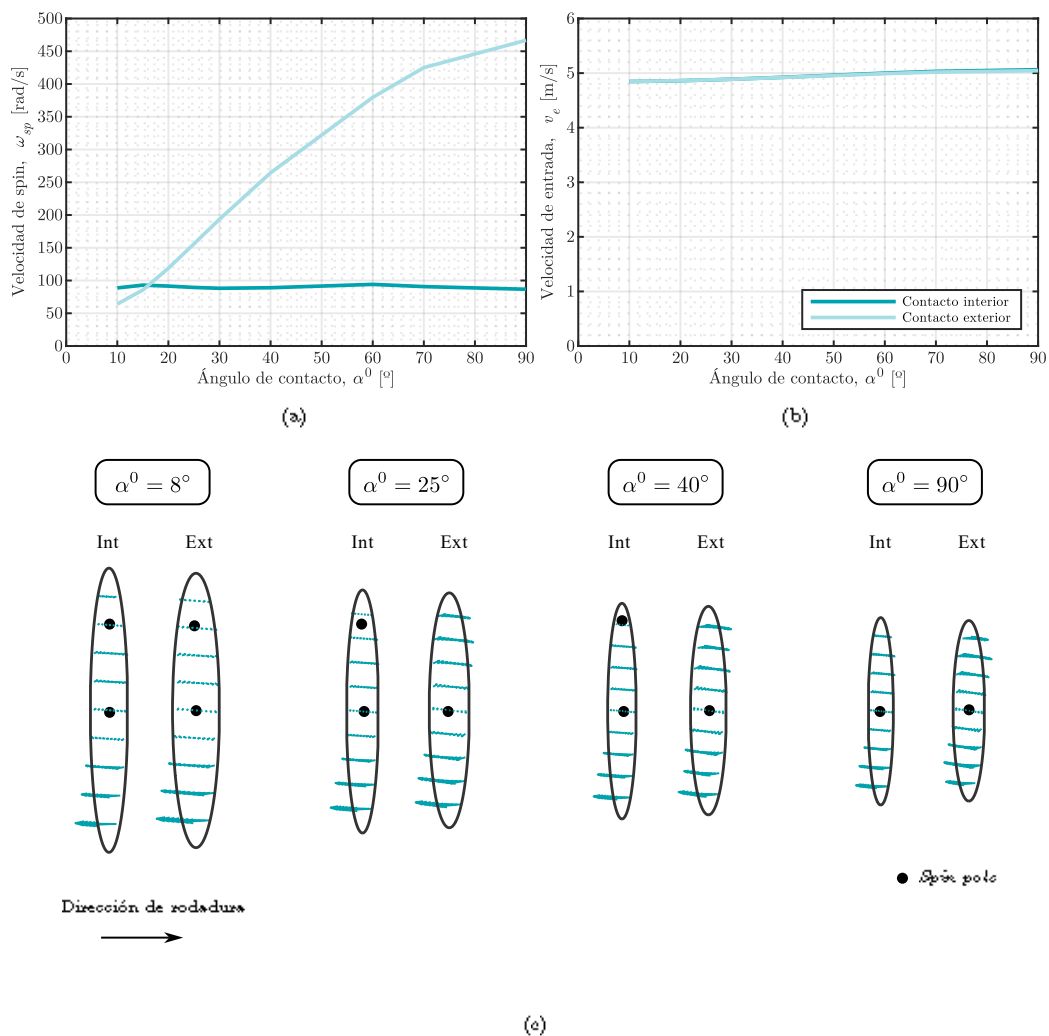
Enfocándose en los parámetros cinemáticos, la Figura 5(a) muestra la velocidad de *spin* del contacto interno y externo en función del ángulo de contacto. A ángulos de contacto bajos, las velocidades de *spin* del contacto interno y externo son similares y relativamente bajas. A medida que el ángulo de contacto aumenta, la velocidad de *spin* del contacto exterior aumenta considerablemente, mientras que la velocidad de *spin* del contacto interno se mantiene constante.

La Figura 5(b) ilustra la velocidad de entrada del contacto en función del ángulo de contacto. Se observa que la velocidad de entrada aumenta ligeramente con el ángulo de contacto, aunque este incremento es menor en comparación con la velocidad de *spin*.

El efecto de estas dos variables se refleja en la distribución de la velocidad de deslizamiento de las huellas de contacto en la Figura 5(c). Se puede observar que la distribución del deslizamiento varía según el ángulo de contacto.

En el contacto exterior, la huella del rodamiento radial, se compone de dos *spin poles*, ya que, la velocidad de *spin* es relativamente baja. A medida que el ángulo de contacto aumenta, el *spin* en el contacto exterior también aumenta y, como resultado, la huella se compone únicamente de un único *spin pole*. Además, la combinación de los componentes de velocidad de rodadura y rotación genera una distribución de deslizamiento no uniforme a lo largo del semieje mayor, lo que provoca velocidades de deslizamiento más altas en un lado de la elipse.

En el contacto interior, la evolución de la posición del *spin pole* es diferente. El *spin* del contacto interior no varía con el ángulo de contacto. Como consecuencia, el patrón de deslizamiento es similar para todos los ángulos. Sin embargo, a medida que aumenta el ángulo de contacto, la huella se hace más pequeña. Por ello, a medida que el ángulo de contacto aumenta, el *spin pole* se desplaza fuera de la superficie de contacto, hasta salir de ella. Este fenómeno no ocurre debido a un cambio en la cinemática, sino por el cambio en el tamaño de la huella de contacto.



**Figura 5:** Influencia del ángulo de contacto en el (a) *spin* del contacto y (b) velocidad de entrada (c) patrones de deslizamiento sobre la superficie de contacto.

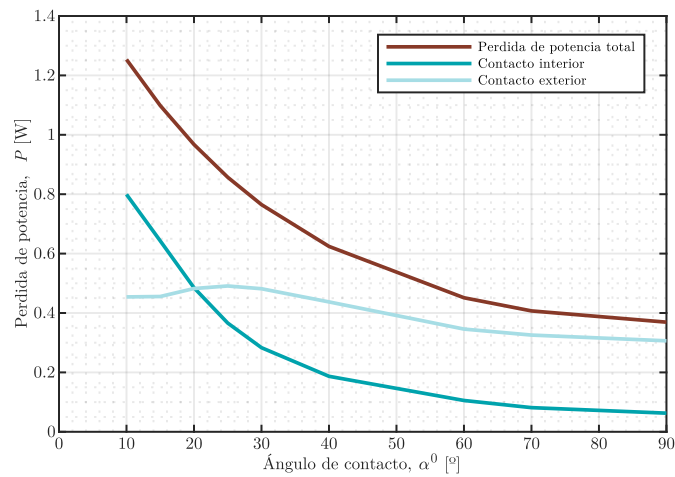


### 4.3. Efecto del ángulo de contacto en la pérdida de potencia

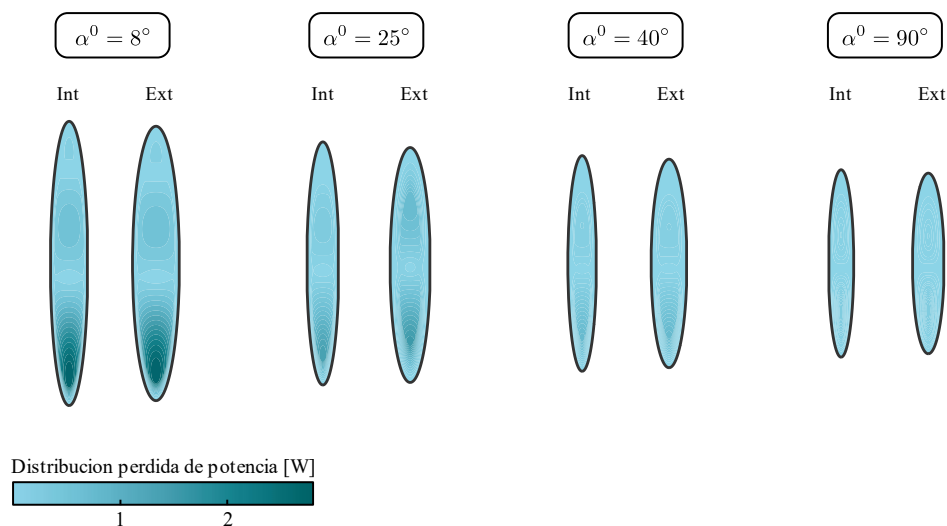
La Figura 6(a) ilustra la pérdida de potencia de la bola en función del ángulo de contacto nominal del rodamiento. Se observa que la pérdida de potencia total de la bola disminuye a medida que el ángulo de contacto aumenta. Al analizar la pérdida de potencia en los contactos interno y externo por separado, emergen tendencias distintas. Estas diferencias en el comportamiento están estrechamente relacionadas con la carga de contacto y la cinemática del contacto, ya que la pérdida de potencia está influenciada por la combinación de la carga normal y la distribución de la velocidad de deslizamiento en el contacto.

En el caso del contacto interno, la pérdida de potencia presenta una tendencia decreciente a medida que el ángulo de contacto aumenta. La velocidad de *spin* y la velocidad de entrada en el contacto interno permanecen constantes para todos los ángulos de contacto (Figura 5), lo que mantiene inalterada la cinemática. Sin embargo, la carga de contacto disminuye cuando el ángulo de contacto nominal aumenta. En consecuencia, la tendencia de la pérdida de potencia en el contacto interno está completamente determinada por la reducción de la carga de contacto.

Centrándonos en pérdida de potencia en el contacto externo, se observa un ligero aumento hasta un ángulo de contacto de  $25^\circ$ , seguido de una disminución más allá de este valor. Este comportamiento se debe a los efectos combinados de la carga y el *spin*. A medida que el ángulo de contacto aumenta, el *spin* del contacto externo se incrementa, mientras que la carga de contacto disminuye. A cargas de contacto más altas, el giro tiene un efecto más significativo en la pérdida de potencia. Sin embargo, a cargas más bajas, la cinemática del contacto juega un papel menos relevante, y la pérdida de potencia está predominantemente influenciada por la cinemática del contacto.



(a)



(b)

**Figura 6:** Influencia del ángulo de contacto en la pérdida de energía. sobre la superficie de contacto. (a) Pérdida de potencia total y (b) distribución de la pérdida sobre la superficie de contacto.

El efecto combinado del deslizamiento y presión de contacto en la pérdida de potencia también se refleja en la distribución de la pérdida de la superficie (Figura 6(c)). En todas las geometrías, la distribución de carga sigue el mismo patrón, el cual se puede dividir en tres regiones:

- En la periferia de la superficie de contacto, la presión hertziana tiende a disminuir. En consecuencia, el esfuerzo cortante en esta región de contacto se reduce, lo que provoca una pérdida de potencia que se aproxima a cero.
- En la ubicación del *spin pole*, la velocidad de deslizamiento es nula por lo que no en esta zona no existe pérdida de potencia. Esta es la razón por la que, en la mitad de la huella de contacto, lugar dónde la presión de contacto es máxima, la pérdida de potencia local es cero.
- En el resto del área de contacto, la pérdida de potencia está determinada por la cinemática del contacto. Se puede observar que los valores máximos se obtienen en los laterales de la huella de contacto. Esta se debe a que esta región la combinación de la presión local y los deslizamientos son mayores. la velocidad de deslizamiento es, la pérdida de potencia local del contacto también es baja. Cabe señalar que la distribución de estos picos no es simétrica con respecto al semieje menor de la elipse. En un lado de la elipse, su magnitud es ligeramente mayor que en el otro. La combinación de los componentes de velocidad de rodadura y *spin* genera una distribución de deslizamiento no uniforme a lo largo del semieje mayor, lo que provoca velocidades de deslizamiento más altas en un lado de la elipse. Como resultado, los picos en ese lado también son más altos.

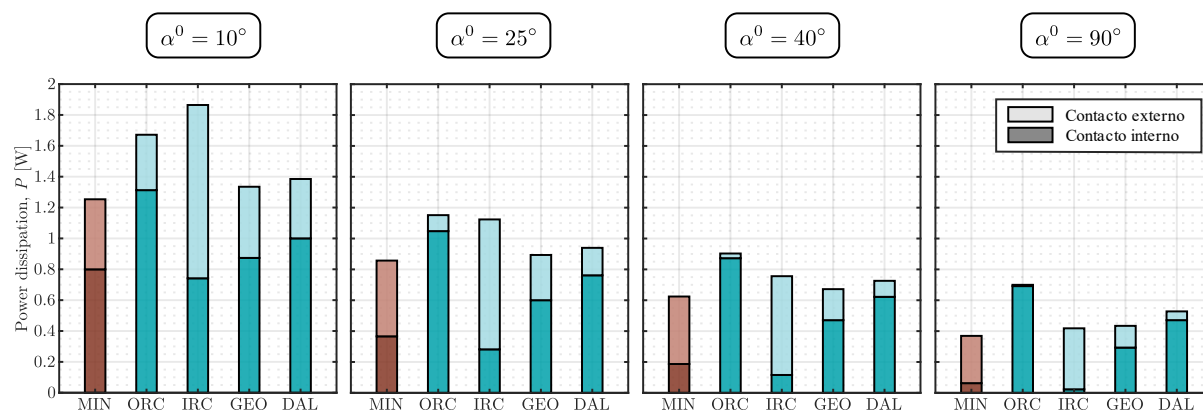
#### 4.4. Comparación con otros modelos empleados en la literatura

En última instancia, la Figura 7 muestra la influencia de las diferentes hipótesis empleadas en la literatura en la predicción de la pérdida de potencia de la bola. La comparación se ha realizado considerando las hipótesis de control de la pista interna (IRC), hipótesis de la pista externa (ORC), el principio de d'Alembert (DAL) y la relación geométrica (GEO).

Es importante destacar que la distribución de carga es la misma en todas las hipótesis, por lo que las diferencias en los resultados se deben únicamente a la cinemática de contacto. La figura demuestra que los resultados varían significativamente según la hipótesis utilizada.

En términos generales, todas las predicción se siguen el mismo patrón. A medida que aumenta el ángulo de contacto, la pérdida de potencia disminuye. Se puede observar que todas las hipótesis tienden a sobrestimar la pérdida de potencia de la bola, siendo esta sobrestimación más pronunciada en la hipótesis de control de la pista.

Las diferencias son substancialmente notables al comparar las pérdidas en los contactos interno y externo por separado. En los rodamientos con ángulos de contacto bajos, como los radiales, la predicción de la pérdida es más precisa siguiendo la hipótesis de d'Alembert o la relación geométrica. Sin embargo, a medida que el ángulo de contacto aumenta, la distribución de la pérdida se asemeja más a la predicción de la hipótesis de la pista interna. En el caso extremo de un rodamiento axial, la predicción de la pérdida coincide casi por completo con esta última hipótesis.



**Figura 7:** Influencia de la hipótesis cinemática en la pérdida de potencia de la bola y para diferentes ángulos de contacto.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo cuasi-estático basado en la hipótesis de la pérdida mínima de energía. El modelo calcula la pérdida de potencia del contacto mediante la introducción de un modelo teórico de lubricación elastohidrodinámica (EHL) que considera los efectos locales producidos por el *spin*. Siguiendo este modelo la cinemática del contacto se resuelve con interacciones de fricción, en lugar de basarse en hipótesis simplificadas que no consideran estos fenómenos.

Se puede observar que el ángulo de contacto influye en el rendimiento del rodamiento de dos maneras: primero, al modificar la distribución de carga y el valor de la presión de contacto. Segundo, al alterar las velocidades de deslizamiento en la huella de contacto, lo que influye en la pérdida de potencia.

Además, se ha demostrado que las diferentes hipótesis cinemáticas dan predicciones similares en la distribución de carga, pero muy distintas en la cinemática. Esto afecta considerablemente la pérdida de potencia. Por ello, la correcta predicción de la cinemática es fundamental para entender los mecanismos relacionados con el comportamiento mecánico del componente.

El ángulo de contacto suele seleccionarse en función de la capacidad de carga, sin considerar la cinemática de contacto. Sin embargo, se ha demostrado que la cinemática también juega un papel relevante en el en el rendimiento de los rodamientos. Por lo tanto, el ángulo de contacto debe determinarse considerando no solo la distribución de carga, sino también el efecto del deslizamiento durante la etapa de diseño de los rodamientos de bolas.

## 6. Referencias

- [1] T. Harris, M. Kotzalas, Essential Concepts of Bearing Technology. Rolling Bearing Analysis, CRC Press, 2006.
- [2] T. Harris, M. Kotzalas, Advanced Concepts of Bearing Technology. Rolling Bearing Analysis, CRC Press, 2006.
- [3] B. Hamrock, D. Dowson, Ball Bearing Lubrication: The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts, Wiley, 1981.
- [4] S. Bair, High pressure rheology for quantitative elastohydrodynamics, Elsevier, 2019.
- [5] P. Gupta, Current status of and future innovations in rolling bearing modeling, Tribology Transactions 54 (2011) 394–403.
- [6] P. Gupta, Advanced dynamics of rolling elements, Springer, 2012.
- [7] A. Jones, Ball motion and sliding friction in ball bearings, Journal of Basic Engineering 81 (1959) 1–12.
- [8] A. Jones, A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions, Journal of Basic Engineering 91 (1960).
- [9] J. Dominy, The nature of slip in high-speed axially loaded ball bearings, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 200 (1986) 359–365.
- [10] J. Antoine, G. Abba, A. Molinari, A new proposal for explicit angle calculation in angular contact ball bearing, Journal of Mechanical Design 128 (2006) 468–478.
- [11] T. Xu, G. Xu, Q. Zhang, C. Hua, H. Tan, S. Zhang, A. Luo, A preload analytical method for ball bearings utilising bearing skidding criterion, Tribology International 67 (2013) 44–50.
- [12] Z. Chunjiang, Y. Xiaokai, H. Qingxue, G. Shidong, G. Xin, Analysis on the load characteristics and coefficient of friction of angular contact ball bearing at high speed, Tribology International 87 (2015)
- [13] J. Zhang, B. Fang, J. Hong, Y. Zhu, Effect of preload on ball-raceway contact state and fatigue life of angular contact ball bearing, Tribology International 114 (2017) 365–372.
- [14] W. Wang, L. Hu, S. Zhang, L. Kong, Modeling high-speed angular contact ball bearing under the combined radial, axial and moment loads, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 228 (2014).
- [15] S. Ma, K. Yan, M. Li, Y. Zhu, J. Hong, Research on the bearing sliding loss based on time-varying contact angle between ball and raceway, Lubricants 10 (2022) 185.
- [16] C. Ding, F. Zhou, J. Zhu, L. Zhang, Raceway control assumption and the determination of rolling element attitude angle, Chinese Journal of Mechanical Engineering 37 (2001) 58–61.
- [17] W. Wang, L. Hu, S. Zhang, Z. Zhao, S. Ai, Modeling angular contact ball bearing without raceway control hypothesis, Mechanism and Machine Theory 82 (2014) 154–172.
- [18] S. Gao, L. Wang, Y. Zhang, Modeling and dynamic characteristic analysis of high speed angular contact ball bearing with variable clearance, Tribology International 182 (2023) 108330.
- [19] J. Zhang, B. Fang, Y. Zhu, J. Hong, A comparative study and stiffness analysis of angular contact ball bearings under different preload mechanisms, Mechanism and Machine Theory 115 (2017) 1–17.
- [20] J. Zhang, B. Fang, K. Yan, J. Hong, A novel model for high-speed angular contact ball bearing by considering variable contact angles, Journal of Mechanical Science and Technology 34 (2020) 809–816.

- [21] J. Liu, C. Tang, H. Wu, Z. Xu, L. Wang, An analytical calculation method of the load distribution and stiffness of an angular contact ball bearing, *Mechanism and Machine Theory* 142 (2019) 103597.
- [22] C. Foord, High-speed ball bearing analysis, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 220 (2006) 537–544.
- [23] D. Noel, M. Ritou, B. Furet, S. Le Loch, Complete analytical expression of the stiffness matrix of angular contact ball bearings, *Journal of Tribology* 135 (2013) 041101.
- [24] V. Tong, S. Hong, Improved formulation for running torque in angular contact ball bearings, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 19 (2018) 47–56.
- [25] V. Tong, S. Hong, Study on the running torque of angular contact ball bearings subjected to angular misalignment, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 232 (2018) 890–909.
- [26] G. Rivera, V. Tong, S. Hong, A study on ball-race contact in angular contact ball bearing during rotation, *Journal of the Korean Society for Precision Engineering* (2021).
- [27] Y. Liu, W. Wang, T. Qing, Y. Zhang, H. Liang, S. Zhang, The effect of lubricant temperature on dynamic behavior in angular contact ball bearings, *Mechanism and Machine Theory* 149 (2020) 103832.
- [28] C. Wen, X. Meng, J. Gu, L. Xiao, S. Jiang, H. Bi, Starved lubrication analysis of angular contact ball bearing based on a multi-degree-of-freedom tribo-dynamic model, *Friction* 11 (2023) 1395–1418.
- [29] J. Hailing, Second paper: Analysis of spin/roll conditions and the frictional-energy dissipation in angular-contact thrust ball bearings, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 181 (1966) 349–362.
- [30] A. Popescu, M. Nazare, V. Carlescu, D. Olaru, An energetic method to determine existence of the raceway control in an angular contact ball bearing operating at low axial load, *International conference COMEC 1* (2017) 34–39.
- [31] A. Popescu, L. Houpert, D. Olaru, Four approaches for calculating power losses in an angular contact ball bearing, *Mechanism and Machine Theory* 144 (2020) 103669.
- [32] P. Riera, L. M. Macareno, J. Aguirrebeitia, I. Heras, Ball bearing friction assessment through power minimization, *Mechanism and Machine Theory* 200 (2024) 105714.
- [33] J. J. Kalker, A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact, *Vehicle system dynamics* 11 (1) (1982) 1–13.
- [34] D. Cubillas, M. Olave, I. Llavori, I. Ulacia, J. Larrañaga, A. Zurutuza, A. Lopez, An analytical formulation for rotational fretting based on the minimum rolling energy, *Wear* 508-509 (2022) 204484.
- [35] P. Gupta, J. I. Taketa, C. Price, Thermal interactions in rolling bearings, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 234 (2020) 1233–1253.
- [36] P. Gupta, Minimum energy hypothesis in quasi-static equilibrium solutions for angular contact ball bearings, *Tribology Transactions* 63(2020) 1051–1066.
- [37] P. Alberdi, A. Arana, A. Oyanguren, J. Larrañaga, I. Ulacia, A general kinematic model for lubricated ball bearings based on the minimum energy hypothesis, *Tribology International* 196 (2024) 109698.
- [38] Y. Wang, W. Wang, Z. Zhao, Effect of race conformities in angular contact ball bearing, *Tribology International* 104 (2016) 109–120.
- [39] P. Gloeckner, The influence of the raceway curvature ratio on power loss and temperature of a high-speed jet engine ball bearing, *Tribology transactions* 56 (1) (2013) 27–32.
- [40] E. V. Zaretsky, W. J. Anderson, R. J. Parker, The effect of contact angle on rolling-contact fatigue and bearing load capacity, *ASLE TRANSACTIONS* 5 (1) (1962) 210–219.
- [41] F. Wang, M. Jing, H. Fan, Y. Wei, Y. Zhao, H. Liu, Investigation on contact angle of ball bearings, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics* 231 (1) (2017) 230–251.
- [42] M. Iribecampos, I. Ulacia, A. Arana, J. Larrañaga, The combined effect of contact interface size and spin on lubricated traction in rolling-sliding point contacts, *Tribology International* 188 (2023) 108822.
- [43] S. Bair, C. McCabe, P. T. Cummings, Calculation of viscous ehl traction for squalane using molecular simulation and rheometry, *Tribology Letters* 13 (2002) 251–254.
- [44] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization*, Springer, 1999.
- [45] SKF, *Rolling bearings, Catalogue* (2018).
- [46] S. Bair, Reference liquids for quantitative elastohydrodynamics: selection and rheological characterization, *Tribology Letters* 22 (2006) 197–206.
- [47] M. Björling, *Friction in elastohydrodynamic lubrication*, Ph.D. thesis, Lulea Tekniska Universitet (2014).
- [48] H. Liu, B. Zhang, N. Bader, C. Venner, G. Poll, Scale and contact geometry effects on friction in thermal EHL: twin-disc versus ball-on disc, *Tribology international* 154 (2021) 106694.
- [49] S. Bair, O. Andersson, F. Qureshi, M. Schirru, New ehl modeling data for the reference liquids squalane and squalane plus polyisoprene, *Tribology Transactions* 61 (2018) 247–255.
- [50] V. Jadhao, M. Robbins, Rheological properties of liquids under conditions of elastohydrodynamic lubrication, *Tribology Letters* 67 (2019).