



GOI ESKOLA  
POLITEKNIKOA  
ESCUELA  
POLITÉCNICA  
SUPERIOR

Tesis

**Desarrollo de modelos y herramientas de  
simulación para FMLs con capacidad de morphing**

JON ANDER ARAKAMA

Supervisor:  
Dr. Jon Aurrekoetxea

Marzo de 2016



Me gustaría dedicar.



# Eskerrak

Lehenik eta behin, Jon Aurrekoetxeari eta Mondragon Unibertsitateari eskerrak eman nahi dizkiot tesi hau egitea ahalbidetzeagatik.

Jende askorekin egon naiz lau urte hauetan, horregatik, norbait ahazten badut barka diezadala. Hasteko, nere taldetxoa osatu dutenei eskertu nahi diet pasa ditugun momentu onak eta neri entzuteko eta laguntzeko izan duten gaitasuna. Arka, Ondiz, Mac, Haritz, Ariane. Eskerrik asko bihotzez. Baita ere, departamenduan egin ditudan lagunei: Imanol, Unai, Iker, Estela, Leire, Oangu, Izquierdo, Espinosa, Irantzu... zuen alaitasuna eta humore ona asko eskertzen da beti. Mainerri, tesia beste era batea ikusten lagundu didalako. Jon Lopez eta Aitorri, zuen laguntza eta laguntasunagatik. Mendibil, siempre has sido un poco de tocar lo que ya sabes, pero no se por qué nos hemos entendido. Gracias por todo. Llavori, lagun bat haiz netzako. Ganix, eskerrik asko nerekin pasa dezun denboragatik eta neretzako beti ateak irekita eukitzeagatik. Pixuan eon nintzaneko Liza eta Mazuri. Modesto, modeloekin euki dezun pazientzaz aparte, neretzako euki duzun denboragatik.

Karmele, Jesus Mari eta Iñaki, eskerrik asko eman diazuen laguntza eta preokupau zeatenagatik. A los otros tres hijos de MU, que han estado ahí siempre. Axi, Xabi, Kepa. He necesitado vuestra ayuda muchas veces, y he tenido la suerte de teneros a mi lado. A Maria, a Maxi e Iker por apoyarme y por estar siempre de buen humor y transmitirme vuestra alegría.

Ama, Aita, Asier... ¿qué os voy a contar a vosotros que no sepáis? Sin vosotros no habría llegado este momento. No a ser doctor, sino a ser capaz de salir adelante otra vez. Os quiero.

Ta bukatzeko zu Jiri, lau urte gogor izan dialako, baino egunero hor eon zealako. Ezingo dizut sekula nahikoa eskertu nere ondoan eon zean denbora dana. Garai berri bat hasi da.



# Laburpena

Forma Memoria duten Aleazioak (SMA Shape Memory Alloy ingelesez), ohiko aleazioekin (burdinazko edo aluminiozko aleazioak) alderatuta propietate termomekaniko desberdinak dituzte. SMAk bi portaera mota desberdin ditu temperaturaren arabera. Temperatura altua denean, elastikoki deformazioa handiak jasateko (%10 arte) eta berreskuratzeko gaitasuna du materialak, energia asko disipatuz jasaten duen histeresi prozesuaren bitartez. Efektu hau, efektu superelastikoa bezala ezagutzen da. Bestalde, temperatura baxuetako portaera dago, non itxuraz deformazio plastikoa jasan arren, materiala bere hasierako forma berreskuratzeko gai da temperatura handitzerakoan. Ezaugarri hauek kontutan edukita, eragingailu mekaniko bezala erabiltzeko gaitasuna du SMAk. Efektu honi, forma memoria efektua bezala ezagutzen da.

Azken urteotan, aleazio mota hau ikertzeaz gain, besteak beste, medikuntzan, automobilgintzan eta aeronautikan bezalako hainbat industrietan erabili da. Eragingailu mota hauen bitartez, SMAk dituzten konponenteen forma eta zurruntasuna aldatzea ahalbidetzen da, eta baldintza ezberdinen aurrean portaera ezberdina izan, beharrezkoak diren baldintzen arabera.

SMAzko eragingailuak dituzten konponenteak garatzeko, modelo matematikoak garatzea beharrezkoa izan da denboran zehar. Garatu diren modeloen artean, ikusi da gutxi batzuk saiatu direla SMAtan ikusten den barne portaera modelizatzen. Hori horrela izanda, lan honetan modelo frakzionario bat proposatu da, SMAk duen barne portaera modelizatzeko gai delarik.

Bestalde, operadore frakzionarrietan oinarritutako modeloen simulazio azkarragoak lortzeko teknika berri bat garatu da. Horretarako, Proper Orthogonal Decomposition teknikan (POD) oinarritu da. Estrategia horretan, lehenik emaitzak aurrekalkulatu dira eta ondoren emaitza horien interpolazioa erabiliz, emaitza berriak azkarrago kalkulatu lortuz.

Azkenik, karbono zuntzez indartutako epoxi erretxina plaka bati, SMAzko eragingailu bat itsatsi zaio. Konponente honek duen portaera aztertzekeo intentzioz. Esperimentu honen bidez, SMAk egitura zurrun bat deformatzeko duen gaitasuna aztertu da.



# Resumen

Las Aleaciones con Memoria de Forma (SMA-de Shape Memory Alloy en inglés) son aleaciones metálicas con propiedades termomecánicas diferentes a las aleaciones convencionales como pueden ser las de hierro o aluminio. Este tipo de aleaciones tienen dos tipos de comportamiento dependiendo de la temperatura a la que se encuentren. A alta temperatura, son capaces de alcanzar una gran deformación (hasta un 10 %) y recuperarla de manera elástica, disipando una gran cantidad de energía gracias a la histéresis que se da en dicho proceso, lo cual se conoce como efecto superelástico. Por otro lado, se encuentra el comportamiento a bajas temperaturas, en el cual, el material es capaz de recuperar una deformación aparentemente plástica al incrementar su temperatura, de manera que tiene la capacidad de comportarse como un actuador mecánico. Este comportamiento es conocido como efecto de memoria de forma.

Durante los últimos años, este tipo de aleaciones han sido investigadas y utilizadas en aplicaciones para diferentes industrias como pueden ser la médica, la del automóvil o la aeronáutica. Utilizando este tipo de actuadores, se han desarrollado componentes que son capaces de variar de forma y rigidez, lo que permite la adaptación de las piezas a las diferentes condiciones.

Para poder diseñar este tipo de componentes, se han desarrollado una gran cantidad de modelos numéricos que permiten la simulación de los SMAs. En cambio se ha observado que pocos modelos tienen en cuenta el comportamiento no lineal de los bucles internos del material. Por otra parte, se ha observado que los modelos fraccionarios tienen una gran capacidad de representar comportamientos no lineales utilizando muy pocos parámetros para ello. De esta manera, en la presente tesis se plantea un modelo fraccionario que permite representar el comportamiento no lineal de los bucles internos del SMA.

También se han estudiado nuevas vías que permiten simular de manera más rápida aquellos modelos que cuenten con operadores fraccionarios. Para ello, se ha utilizado una metodología mediante la cual, utilizando el Proper Orthogonal Decomposition (POD), se plantea una estrategia en la cual se precalculan varios resultados representativos del

modelo, y mediante la interpolación de estos resultados se obtienen soluciones de forma más rápida.

Finalmente se ha fabricado un compuesto de resina epoxy reforzado con fibra de carbono, al cual se le ha adherido un SMA con capacidad de actuación. Mediante este experimento se ha analizado la capacidad que tienen los SMAs para cambiar de forma estructuras rígidas tanto en vacío, como para casos en los que se le aplican cargas externas.

# Abstract

Shape Memory Alloys (SMA) are metallic alloys with different thermomechanical properties compared to more conventional ones such as iron or aluminum alloys. This kind of alloys have two types of behaviours depending on the temperature. In a high temperature state, they are able to achieve large deformations (until 10%) and recover them elastically, dissipating a lot of energy due to hysteresis that takes part in this process. This behaviour is known as superelastic effect. On the other hand there is the behaviour at low temperatures, due to a load application, apparently it produces a plastic deformation. But when increasing material temperature, it is able to recover its initial shape, behaving like a mechanical actuator. This behaviour is known as shape memory effect.

In recent years, this type of alloys have been investigated and used in applications of different industries such as medical, automotive and aeronautics. The components developed using this type of actuators are able to vary their shape and stiffness, allowing the adaptation of the parts to different boundary conditions.

To design such components have been developed a lot of numerical models to simulate the SMAs. It has been observed that few models take into account the nonlinear behaviour of the inner loops of material. Moreover, it has been found that fractional models have great ability to represent nonlinear behaviour using few parameters. In this thesis a fractional model to represent the nonlinear behaviour of the inner loops of the SMA have been developed.

It has been also studied new ways to enable quicker simulations containing fractional operators. To do this, we have developed a methodology, where using the Proper Orthogonal Decomposition (POD), it is possible to precalculate some representative results and through interpolation of these results having faster solutions during simulations

Finally it has been manufactured a carbon fibre reinforced composite, which has one SMA adhered to it. Through this experiment has analysed the ability of SMAs to reshape rigid structures both unloaded and loaded cases.



# Índice general

Eskerrak . . . . .	III
Laburpena . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
<b>Índice general</b>	<b>XI</b>
Nomenclatura . . . . .	XV
<b>Índice de figuras</b>	<b>XVII</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XXI</b>
<b>1. Introducción General</b>	<b>1</b>
1.1. Enmarque de la tesis . . . . .	1
1.2. Organización de la memoria de tesis . . . . .	2
<b>2. Revisión Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1. Materiales Actuadores . . . . .	5
2.1.1. Deformación de actuación . . . . .	7
2.1.2. Tensión de actuación . . . . .	8
2.1.3. Frecuencia de actuación . . . . .	8
2.1.4. Conclusión . . . . .	8
2.2. Shape Memory Alloys (SMA) . . . . .	9
2.2.1. Efecto de memoria de forma . . . . .	10
2.2.2. Superelasticidad . . . . .	11
2.2.3. Efecto de doble memoria de forma . . . . .	12
2.2.4. Comportamiento cíclico y TRIP . . . . .	13
2.2.5. Morphing con SMAs . . . . .	13
2.3. Modelado de los SMAs . . . . .	16
2.3.1. Tipos de modelos . . . . .	16

2.3.2.	Conclusión . . . . .	17
2.3.3.	Modelos Fenomenológicos . . . . .	17
2.4.	Modelos Fraccionarios . . . . .	21
2.4.1.	Aplicación del cálculo fraccionario en el modelado de diferentes comportamientos físicos y mecánicos . . . . .	22
2.4.2.	Coste computacional de los operadores fraccionarios . . . . .	23
2.5.	Proper Orthogonal Decomposition . . . . .	24
2.6.	Revisión crítica del estado del arte . . . . .	24
<b>3.</b>	<b>Objetivos</b>	<b>27</b>
<b>4.</b>	<b>Caracterización del SMA</b>	<b>29</b>
4.1.	Determinación de las temperaturas de transformación . . . . .	30
4.2.	Estabilización del material . . . . .	31
4.3.	Análisis de los bucles internos . . . . .	34
4.4.	Conclusiones . . . . .	39
<b>5.</b>	<b>Simulación de bucles con modelos tradicionales</b>	<b>41</b>
5.1.	Mecánica de medios continuos . . . . .	41
5.1.1.	Cinemática de los SMAs . . . . .	42
5.1.2.	Leyes de Conservación (Balance) . . . . .	42
5.2.	Modelo constitutivo de Auricchio . . . . .	45
5.3.	Modelo constitutivo de Lagoudas . . . . .	46
5.4.	Resultados . . . . .	48
5.4.1.	Modelado del ciclo completo . . . . .	48
5.4.2.	Modelado de los bucles internos . . . . .	50
5.5.	Conclusiones . . . . .	53
<b>6.</b>	<b>Modelo Fraccionario</b>	<b>55</b>
6.1.	Introducción . . . . .	55
6.2.	Función Gamma . . . . .	55
6.3.	Definición de los operadores fraccionarios . . . . .	56
6.3.1.	Integro-derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov . . . . .	57
6.3.2.	Integro-derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville . . . . .	59
6.4.	Métodos numéricos para operadores fraccionarios integro-diferenciales . . . . .	59
6.4.1.	Algoritmos R-L . . . . .	61
6.5.	Selección del método numérico a utilizar . . . . .	62
6.6.	Modelo . . . . .	63

6.7. Resultados . . . . .	65
6.7.1. Modelado de la parte exterior del SMA . . . . .	65
6.7.2. Modelado de los bucles internos del SMA . . . . .	66
6.7.3. Error de aproximación del modelo . . . . .	68
6.7.4. Constantes del modelo . . . . .	70
6.8. Conclusiones . . . . .	71
<b>7. Reducción del coste computacional de derivadas fraccionarias utilizando la POD</b>	<b>73</b>
7.1. Definición de la problemática . . . . .	73
7.2. Discretización del operador fraccionario . . . . .	75
7.3. Aplicación de la POD . . . . .	76
7.4. Resultados y discusión . . . . .	79
7.4.1. Influencia de la cantidad de valores de $\alpha$ en la exactitud de la solución de la POD . . . . .	80
7.4.2. Reducción del coste computacional . . . . .	82
7.5. Conclusiones . . . . .	84
<b>8. Morphing de estructuras de material compuesto</b>	<b>85</b>
8.1. Determinación de las temperaturas de transformación . . . . .	85
8.2. Desarrollo del TWSME . . . . .	86
8.3. Metodología experimental . . . . .	87
8.3.1. Probetas . . . . .	87
8.4. Ensayos . . . . .	92
8.5. Resultados . . . . .	93
8.5.1. Comparación entre tirar y empujar . . . . .	93
8.6. Comportamiento en vacío . . . . .	93
8.6.1. Comportamiento bajo carga . . . . .	93
8.7. Conclusiones . . . . .	95
<b>9. Conclusiones y Líneas Futuras</b>	<b>97</b>
9.1. Conclusiones . . . . .	97
9.2. Líneas Futuras . . . . .	98
9.3. Divulgación . . . . .	99
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>



# Nomenclatura

- $\alpha$  - Coeficiente de dilatación
- $\rho$  - Densidad
- $\varepsilon$  - Deformación total
- $\varepsilon^{tr}$  - Deformación de transformación
- $\varepsilon_{lim}$  - Deformación de transformación límite
- $H^{cur}$  - Deformación de transformación máxima
- $\Psi$  - Energía libre de Helmholtz
- $G$  - Energía libre de Gibbs
- $X$  - Fuerza termodinámica asociada a la deformación de transformación
- $g^{tr}$  - Funciones de endurecimiento
- $F(X)$  - Límite de transformación
- $\mathcal{S}$  - Matriz de rigidez inversa
- $\mathcal{C}$  - Matriz de rigidez
- $E_A$  - Módulo elástico de la fase austenítica
- $E_M$  - Módulo elástico de la fase martensítica
- $h$  - Pendiente tensión/deformación durante la transformación
- $\xi$  - Porcentaje de la transformación martensítica
- $R(T)$  - Radio de transformación
- $\mathbf{F}$  - Tensor gradiente de deformación
- $\mathbf{E}$  - Tensor de deformación de Green-Lagrange
- $\mathbf{u}$  - Vector de desplazamientos
- $\mathbf{v}$  - Vector de velocidades
- $T$  - Temperature
- $\boldsymbol{\sigma}$  - Tensor de tensiones
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  - Tensor de deformaciones
- $T_0$  - Temperatura de referencia
- $\boldsymbol{\sigma}'$  - Tensor desviador de tensiones
- $\bar{\sigma}$  - Tensión efectiva

ma

# Índice de figuras

2.1. Diagrama de la densidad de energía de actuación que indica los rangos típicos de las tensiones de actuación, deformaciones de actuación, y de densidades de energía de actuación de diferentes materiales actuadores que exhiben acoplamiento directo (1). . . . .	6
2.2. Comparación de los rangos de frecuencia de actuación de diferentes materiales actuadores que exhiben acoplamiento directo (1). . . . .	7
2.3. Diagrama de transformación de los SMAs. . . . .	9
2.4. Comportamientos del SMA dependiendo de la temperatura. . . . .	10
2.5. Efecto de Memoria de Forma. . . . .	11
2.6. Comportamientos del SMA dependiendo de la temperatura. . . . .	12
2.7. Efecto del TRIP tanto a temperatura, como a tensión constantes (1). . . . .	13
2.8. Cambio de forma de una maqueta de la sección del ala de un avión. . . . .	14
2.9. Utilización de SMAs para la disminución del ruido en los motores de los aviones. . . . .	15
4.1. Análisis calorimétrico del SMA. . . . .	31
4.2. Carga cíclica inducida para la estabilización del hilo de SMA. . . . .	33
4.3. Deformación plástica inducida por la transformación martensítica del material. . . . .	33
4.4. Comportamiento del SMA tras la estabilización. . . . .	34
4.5. Bucles internos con una descarga hasta 300 MPa. . . . .	35
4.6. Bucles internos con una descarga hasta 250 MPa. . . . .	36
4.7. Bucles internos con una descarga hasta 200 MPa. . . . .	37
4.8. Bucles internos con una descarga hasta 190 MPa. . . . .	37
4.9. Módulos de carga dependiente de la tensión de inicio de carga. . . . .	38
4.10. Módulos de descarga. . . . .	39

5.1. Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Transformación completa). . . . .	49
5.2. Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Descarga a 250 MPa). . . . .	51
5.3. Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Descarga a 200 MPa). . . . .	52
6.1. Modelo de Maxwell. . . . .	63
6.2. Comparación entre el resultado experimental y el modelo fraccionario propuesto. . . . .	65
6.3. Modelado de los bucles para una descarga hasta 300 MPa. . . . .	67
6.4. Modelado de los bucles para una descarga hasta 250 MPa. . . . .	67
6.5. Modelado de los bucles para una descarga hasta 200 MPa. . . . .	68
6.6. Modelado de los bucles para una descarga hasta 190 MPa. . . . .	68
6.7. Valores de las constantes obtenidas mediante los ajustes para diferentes bucles. . . . .	70
7.1. Derivada fraccionaria de la función $t$ . . . . .	74
7.2. Esquema de la evaluación numérica de un operador fraccionario en un instante de tiempo $t$ . . . . .	75
7.3. Error relativo dependiendo del número de incrementos utilizados en la evaluación numérica del operador fraccionario. . . . .	76
7.4. Error relativo dependiendo del número de alfas seleccionado. . . . .	81
7.5. Comparación de los resultados entre la POD y la respuesta numérica. . . . .	82
7.6. Errores máximo y relativo dependientes del orden de la derivada. . . . .	83
7.7. Coste computacional dependiente del número de puntos evaluados. . . . .	84
8.1. Diagrama esquemático del proceso de infusión. . . . .	88
8.2. Vidrio templado sobre el que se realiza la infusión (perímetro exterior) y molde inferior delimitado por cinta adhesiva (perímetro interior). . . . .	88
8.3. Capas de refuerzo sobre el molde inferior (delimitado por la cinta adhesiva). . . . .	89
8.4. Colocación del peel-ply sobre el refuerzo. . . . .	89
8.5. Colocación de los conductos de entrada (superior) y salida (inferior) de la resina. . . . .	90
8.6. Molde cerrado y listo para el proceso de infusión. . . . .	90
8.7. Imagen general del proceso de infusión. . . . .	91
8.8. Placa obtenida a través del proceso de infusión. . . . .	91

8.9. a) SMA deformado y molde. b) Viga de SMA adherida a la placa de compuesto. . . . . 92

8.10. *Set-up* del ensayo de *morphing*. . . . . 92

8.11. Comparación teórico experimental del comportamiento superelastico de un SMA (modelo basado en la cinética de transformación asumida). . . . 94

8.12. Comportamiento del compuesto activo bajo cargas de 5 y 10 N. . . . . 94



# Índice de Tablas

4.1. Propiedades mecánicas del SMA (23°C). . . . .	29
4.2. Propiedades térmicas del SMA. . . . .	30
4.3. Temperaturas de transformación de SMA. . . . .	30
4.4. Parámetros del material. . . . .	34
6.1. Parámetros del modelo fraccionario. . . . .	65
6.2. Error máximo de aproximación del modelo en los bucles. . . . .	69
6.3. Error medio de aproximación del modelo en los bucles. . . . .	69
7.1. Lista de autovalores. . . . .	80
8.1. Temperaturas de transformación. . . . .	86



# Capítulo 1

## Introducción General

La tesis *Desarrollo de modelos y herramientas de simulación para FMLs con capacidad de morphing*, se ha desarrollado dentro del programa de doctorado *Comportamiento Mecánico y Materiales* en la línea de Tecnología de Plásticos y Compuestos del Departamento de Mecánica y Producción Industrial de la Escuela Politécnica Superior de Mondragon Unibertsitatea.

### 1.1. Enmarque de la tesis

La reducción del consumo energético y de la contaminación se presentan como cuestiones indispensable a la hora de ser competitivo en industrias como la aeronáutica, la automovilística o la ferroviaria. Las energías renovables presentan soluciones atractivas, en cambio, no hay visos de que estas puedan sustituir el 100 % de los combustibles fósiles en un futuro a corto/medio plazo. Es por ello, que una de las alternativas que se plantean hoy en día es el de desarrollar nuevos materiales que posean unas propiedades específicas superiores a los que se han empleado tradicionalmente.

En estos últimos años, ha aumentado la utilización de materiales compuestos utilizados en la industria debido a que presentan propiedades específicas excelentes, como pueden ser la relación resistencia/peso y rigidez/peso. Sin embargo, esta reducción de peso se ve afectada en el computo global del componente, cuando es necesaria la utilización de actuadores mecánicos externos, como pueden ser por ejemplo los pistones que mueven los *flaps* de un avión o el alerón de un coche. Con el objetivo de eliminar este tipo de actuadores mecánicos externos y de esta manera aligerar las estructuras, se han desarrollado diferentes componentes que contienen Aleaciones con Memoria de Forma (SMA - *Shape Memory Alloys* del inglés) embebidos dentro del material (1). Los SMAs, permiten modificar la forma geométrica del material al que se encuentran adheridos, así

como su comportamiento mecánico cuando son expuestos a sollicitaciones como puede ser la temperatura o un campo magnético.

Uno de los objetivos de la presente tesis es analizar la capacidad de *morphing* que tiene el conjunto formado por un material pasivo y un actuador cuando forman un único material compuesto. Hasta el momento, hay diversos trabajos en los cuales se utilizan SMAs para alcanzar el cambio de forma de estructuras pasivas, pero prácticamente en el 100% de los casos, utilizan los SMAs en forma de hilo (2). El desarrollo de este tipo de componentes permitiría reducir el peso y el tamaño de una manera considerable.

Por otra parte, la principal desventaja de los SMAs es su comportamiento complejo. La falta de linealidad, hace que los modelos actuales no sean capaces de modelar de manera adecuada el comportamiento de los bucles internos del material. Para poder solucionar esta problemática, se ha recurrido a los modelos fraccionarios, que entre otras cosas, han sido utilizados anteriormente en el modelado del comportamiento de materiales compuestos con resultados prometedores.

Al utilizar modelos fraccionarios, el coste computacional aumenta considerablemente respecto a los modelos clásicos de SMA debido al carácter no local de los operadores fraccionarios. Con el objetivo de solucionar este problema, se ha planteado la utilización del *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) para poder reducir el peso de este tipo cálculos.

Finalmente, y resumiendo lo comentado hasta este instante, mediante este trabajo, se desea analizar y comprender el comportamiento de estructuras que combinan materiales pasivos con SMAs, así como el desarrollo de herramientas de simulación que permitan obtener resultados más ajustados a la hora de diseñar diferentes componentes que contengan este tipo de materiales.

## 1.2. Organización de la memoria de tesis

El trabajo realizado durante la tesis doctoral se presenta mediante este documento y consta de 9 capítulos. En este primer capítulo se realiza un enmarque del tema y se presenta la organización del documento.

En el capítulo 2, se realiza una revisión bibliográfica tanto de los materiales, como estructuras que contienen materiales actuadores, así como de los modelos de material existentes.

En el capítulo 3, se plantean los objetivos del presente trabajo y se plantea el desarrollo de los mismos.

La caracterización del material se presenta en el capítulo 4, donde se muestran los diferentes pasos que se han llevado a cabo para obtener las propiedades del SMA.

El capítulo 5, consiste en el análisis y presentación de dos modelos clásicos existentes y su comparación con los resultados experimentales obtenidos.

En el capítulo 6 se realizará una introducción general al cálculo fraccionario, de manera que se sienten las bases para el análisis del modelo que será presentado a continuación.

El capítulo 7 presenta la teoría de la POD y analiza la reducción de tiempo cálculo de los modelos que cuentan con operadores fraccionarios, así como su implantación.

El capítulo 8 presenta los resultados experimentales que muestran la capacidad de *morphing* de un híbrido de material compuesto y SMA.

Para finalizar, en el capítulo 9, se presentarán las conclusiones y las líneas futuras en las que se plantea trabajar en un futuro.



## Capítulo 2

# Revisión Bibliográfica

### 2.1. Materiales Actuadores

Gracias a los avances que se han producido estos últimos años, se ha podido alcanzar una mejor comprensión de los efectos de la microestructura de los materiales y de los procesos de fabricación, lo cual ha hecho que el campo de la ciencia de los materiales haya podido experimentar un gran salto. Estos avances han venido de la mano de las diferentes industrias que demandaban materiales más ligeros, resistentes y de propiedades específicas más elevadas, de manera que puedan llevar a cabo la fabricación de componentes más ligeros y por consiguiente que tengan un menor consumo energético e impacto en el medio ambiente.

Una vez desarrollados diferentes materiales con mayores propiedades específicas, la industria se ha propuesto un nuevo reto, que consiste en desarrollar materiales, que cuenten con funcionalidades adicionales como puede ser el monitorizado, la capacidad de actuación o el blindaje electromagnético, entre otras características. Estas necesidades han tenido como consecuencia el desarrollo de los denominados *materiales multifuncionales* (1). El subgrupo perteneciente a los materiales multifuncionales que tienen la capacidad tanto de monitorizar como de actuar se denominan *materiales activos*.

En el caso de materiales con capacidad de monitorizado, las señales mecánicas se convierten en señales eléctricas (voltaje), mientras que los materiales actuadores son capaces de transformar las señales no mecánicas (p.e. potencia eléctrica) en señales mecánicas (3). En general, los materiales activos presentan una respuesta mecánica cuando son estimulados mediante un campo no mecánico (térmico, eléctrico, magnético, etc.) (4). La deformación mecánica de este tipo de materiales suele ser elevada si se compara con las respuestas observadas debido a la dilatación térmica de diferentes materiales convencionales, encontrándose normalmente varios ordenes de magnitud por encima. Entre los

ejemplos más conocidos de los diferentes tipos de materiales actuadores se encuentran los materiales piezoeléctricos (acoplamiento entre los campos mecánico y eléctrico) o los materiales con memoria de forma (acoplamiento entre los campos mecánico y térmico). Los materiales activos a su vez pueden subdividirse en materiales que exhiben acoplamiento directo e indirecto. Los materiales piezocerámicos, polímeros piezoeléctricos y aleaciones con memoria de forma son algunos de los ejemplos de materiales con acoplamiento directo. Esto implica que tanto el campo mecánico como el no mecánico pueden servir como señales de entrada y salida indistintamente. En cambio, para el caso de los fluidos electro-reológicos y magneto-reológicos por ejemplo, un cambio en el campo eléctrico o magnético supone un cambio en la viscosidad, pero no al revés (5).

Los materiales multifuncionales tienen diferentes capacidades que los diferencian unos de los otros. Por ello, es necesario conocer los requisitos que exige la aplicación en las que van a ser utilizados. La densidad de energía de actuación (cantidad de trabajo por unidad de volumen) y la frecuencia de actuación de material son dos de los parámetros clave que se deben tener en cuenta. El material activo ideal debería contar con ambas, pero esto, como se puede apreciar en la figura 2.1 no siempre es así (1). La densidad de energía de actuación se representa mediante líneas discontinuas y se define como el producto entre la deformación de actuación y la tensión de actuación, asumiendo que el material activo opera bajo la aplicación de una tensión constante (Figura 2.1).

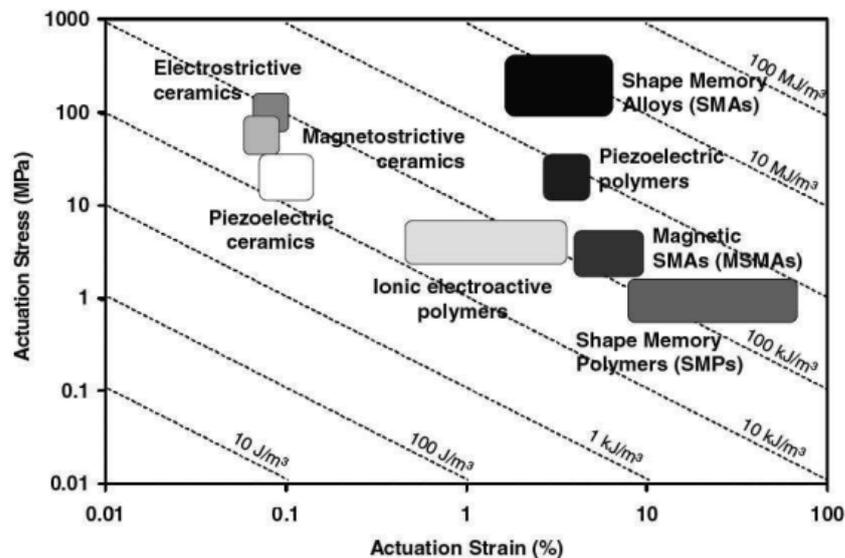


Figura 2.1. Diagrama de la densidad de energía de actuación que indica los rangos típicos de las tensiones de actuación, deformaciones de actuación, y de densidades de energía de actuación de diferentes materiales actuadores que exhiben acoplamiento directo (1).

Por otra parte, la densidad de energía de actuación específica (trabajo por unidad de masa) se puede calcular dividiendo la energía de actuación por la densidad del material correspondiente (1). Los valores obtenidos se muestran en la Figura 2.2.

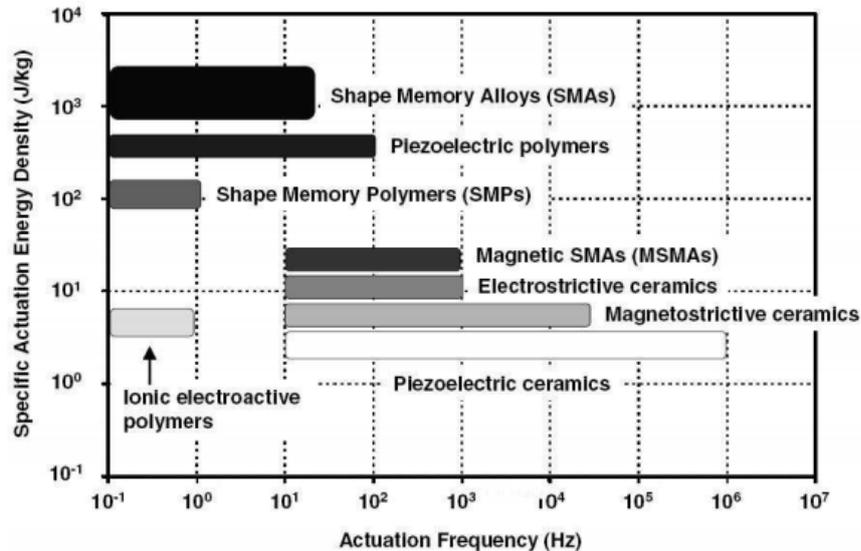


Figura 2.2. Comparación de los rangos de frecuencia de actuación de diferentes materiales actuadores que exhiben acoplamiento directo (1).

En esta última figura se muestra la densidad de energía de actuación específica en función de la frecuencia de actuación. Se puede ver como los SMAs son los que más energía de actuación albergan, pero por el contrario, su frecuencia de actuación es muy baja. En el otro extremo se encuentran los materiales piezoeléctricos.

A continuación se definirán de manera precisa cada una de las características con las que cuentan este tipo de materiales. Por otra parte, se determinarán las propiedades que debe tener un material actuador que quiera unirse a un material compuesto con el objetivo de fabricar una estructura con capacidad de *morphing*.

El *morphing* consiste en la capacidad de un material para cambiar de forma en función de las condiciones de contorno a las que esté sometido. Por lo tanto, es posible variar las propiedades de un componente de manera que se adecuen a las necesidades de cada instante, logrando obtener productos más ligeros y optimizados.

### 2.1.1. Deformación de actuación

La deformación de actuación, se refiere a la capacidad que tiene un material para recuperar una deformación impuesta, sometida a una carga externa constante. Para el caso de un actuador, es imprescindible que este cuente con la capacidad de alcanzar grandes

deformaciones, ya que de otro modo no se producirían cambios geométricos sustanciales en el conjunto. Como se puede observar en la Figura 2.1, el material actuador utilizado debe encontrarse la parte derecha, lo que indica capacidad para lograr grandes deformaciones, y de esta forma no obstaculizar el cambio de forma del conjunto.

### 2.1.2. Tensión de actuación

La capacidad de deformar materiales pasivos viene ligada a la tensión de actuación. Para aplicaciones estructurales, como por ejemplo un alerón, el material pasivo utilizado debe de contar con unas propiedades estructurales mínimas que aseguren su correcto funcionamiento. Por lo tanto, interesa que la tensión de actuación sea lo más elevada posible. Los materiales que cuentan con esta propiedad se encuentran colocadas en la parte superior de la Figura 2.1.

### 2.1.3. Frecuencia de actuación

Aunque no es despreciable, en este caso cuenta con menor importancia, ya que el principal objetivo es el de alcanzar cambios geométricos estructurales, quedando el tiempo de actuación relegado a un segundo plano. Un ejemplo de ello son los materiales piezoeléctricos, que a pesar de tener una tensión de actuación aceptable y una gran frecuencia de actuación, no son capaces de alcanzar grandes deformaciones, por lo que queda descartado para el tipo de aplicación que se desea desarrollar. Por lo tanto, es preferible que el material seleccionado se encuentre en la parte derecha de la Figura 2.1.

### 2.1.4. Conclusión

Teniendo en cuenta las propiedades principales con las que debe de contar el material actuador que se utilizará para la fabricación de la estructura compuesta, se puede decir que el candidato ideal son las aleaciones con memoria de forma o *Shape Memory Alloys* (SMA) en inglés. Se aprecia en las Figuras 2.2 y 2.1 que cuentan, tanto con una mayor tensión de actuación, así como deformación de actuación, siendo capaces siempre de responder en periodos de tiempo relativamente cortos.

Además de las características que se citan en el párrafo anterior, bajo condiciones de temperatura específicas, los SMAs también son capaces de absorber y disipar grandes cantidades de energía mecánica gracias a la histéresis reversible que se observa en su comportamiento. Estas características únicas, han extendido su uso a aplicaciones tanto de monitorización, actuación, absorción de impactos o amortiguación de vibraciones en las que no se centra en trabajo.

## 2.2. Shape Memory Alloys (SMA)

Los Shape Memory Alloys (SMAs) son aleaciones metálicas que cuentan con propiedades termo-mecánicas diferentes a aleaciones metálicas más conocidas, como pueden ser las de hierro, aluminio, etc. En condiciones de altas temperaturas y bajas tensiones, la estructura del material es austenítica altamente simétrica (cúbica), mientras que a bajas temperaturas y tensiones elevadas se observa una estructura martensítica de menor simetría (principalmente ortorrómbica).

La principal característica de los SMAs se produce gracias a la transformación martensítica. La transformación martensítica (TM) es una transformación de fase no difusiva que se da en estado sólido, en la que los átomos se mueven de manera ordenada, y habitualmente mediante un mecanismo de cizalladura. Las transiciones entre la estructura martensítica y austenítica, hacen variar las propiedades mecánicas de los SMAs y son la base en la que se fundamenta la capacidad de desarrollar estructuras inteligentes. Estas transiciones, observadas en la gráfica tensión-deformación de la Figura 2.3, quedan definidas por una serie de tensiones y temperaturas características del material, que son función principalmente de la composición química y del tratamiento termomecánico recibido (6). La transformación martensítica puede definirse como una transformación de fase cristalográficamente reversible e instantánea, es decir sin difusión, en la que los átomos se mueven de forma coordinada como en los mecanismos de cizalladura (6). Se trata de una transformación de primer orden en la que el cambio de fase austenita-martensita es exotérmico, mientras que la transformación contraria, martensita-austenita, es endotérmica (6).

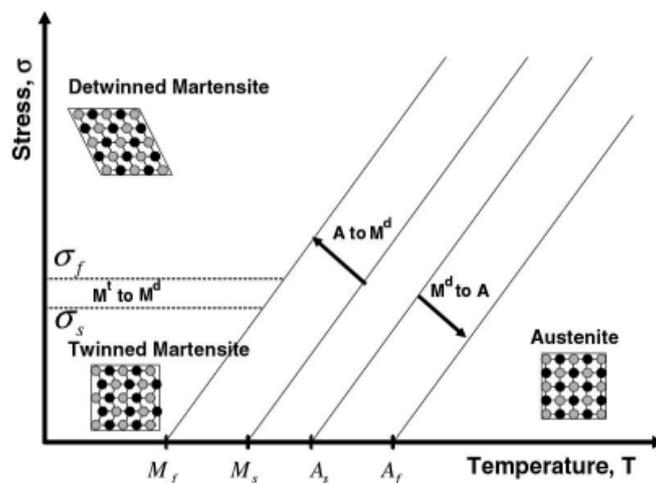


Figura 2.3. Diagrama de transformación de los SMAs.

Los comportamientos principales observados debidos a esta transformación son el efecto de memoria de forma (SME) y la superelasticidad (SE) 2.4. La primera de las dos, se refiere a la capacidad que tiene el material mediante el incremento de temperatura, para recuperar las grandes deformaciones aparentemente permanentes de la fase martensítica a una fase austenítica. La segunda consiste en que el material es capaz de alcanzar deformaciones reversibles de hasta un 10%. El atractivo de los SMAs para los ingenieros, se debe a las posibilidades de diseño que ofrece en el desarrollo de nuevos dispositivos, pudiendo ser utilizados como actuadores (SME) o para casos de almacenaje o absorción de energía (SE).

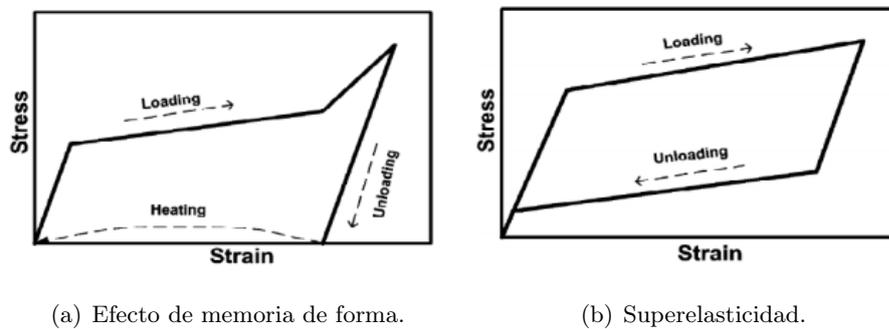


Figura 2.4: Comportamientos del SMA dependiendo de la temperatura.

A continuación se analizarán detalladamente los comportamientos que se producen en los SMAs y se describirán gráficamente las dos propiedades principales.

### 2.2.1. Efecto de memoria de forma

Los SMAs exhiben el Efecto de Memoria de Forma (Shape Memory Effect - SME) cuando se deforman partiendo de la fase martensítica maclada y la descarga se produce a una temperatura inferior a  $A_s$ . Como se puede ver en la Figura 2.5, una vez realizada la descarga, al calentar el material por encima de  $A_f$ , el SMA recupera su forma original gracias a la transformación que se produce de la fase martensítica hacia la fase austenítica.

Comenzando por el punto A de la Figura 2.5, se enfría la austenita por debajo de las temperaturas de transformación directas ( $M_s$  y  $M_f$ ), obteniendo en el punto B martensita maclada como resultado. Al aplicarle una carga mayor a la tensión de transformación ( $\sigma_s$ ), comienza el proceso de orientación, produciendose el crecimiento de variantes martensíticas orientadas preferencialmente para el crecimiento en detrimento de las demás. El límite de la tensión de reorientación de las variantes de martensita se encuentra por debajo del límite elástico permanente de la martensita. El proceso de demaclado finaliza

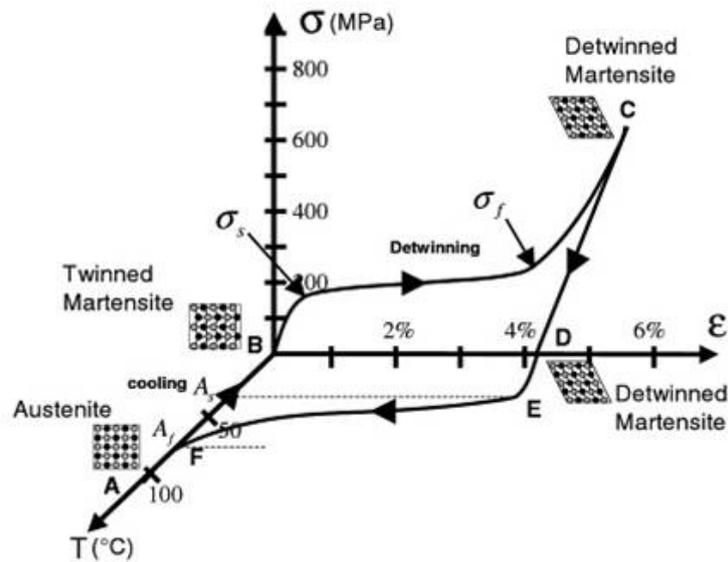


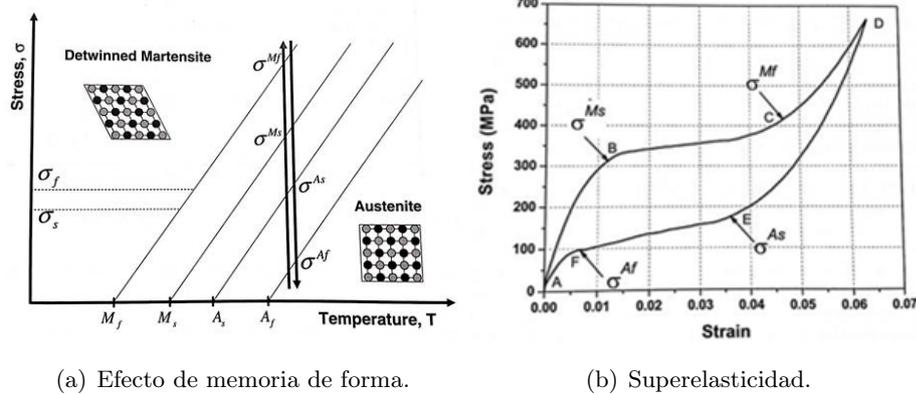
Figura 2.5. Efecto de Memoria de Forma.

en  $\sigma_f$ , que se caracteriza por ser el final del *plateau* en el diagrama  $\sigma - \epsilon$  de la Figura 2.5. A continuación el material es descargado de C a D manteniéndose la martensita demaclinada. Al calentar el material sin cargas externas, comienza la transformación reversa a la temperatura  $A_s$ , y finaliza en  $A_f$ , sobre la que únicamente existe la fase austenítica. El material recobrará su forma inicial en caso de ausencia de deformación plástica. La deformación recuperada debido a la transformación de fase de martensita demaclinada a austenita se denomina deformación de transformación ( $\epsilon_{trans}$ ). En el enfriamiento hacia la martensita, se produce el maclado de las variantes martensíticas sin producirse cambio de forma asociado a ello alguno. El fenómeno descrito aquí encima se denomina *efecto de memoria de forma en una dirección*.

### 2.2.2. Superelasticidad

El SE está asociado con la transformación inducida por tensión. Los casos de carga superelásticos, comienzan generalmente a temperaturas suficientemente altas como para que exista austenita estable, luego se propaga bajo una carga aplicada hasta el estado en el que la martensita demaclinada es estable, y finalmente vuelve a la fase austenítica a tensión cero. En la Figura 2.6 se presenta un caso de carga superelástico.

Para ilustrar el comportamiento superelástico detalladamente se considera el ciclo de carga ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ ) de la Figura 2.6, que comienza a tensión cero y una temperatura superior a  $A_f$ . Al aplicarse una carga mecánica, la fase austenítica



(a) Efecto de memoria de forma.

(b) Superelasticidad.

Figura 2.6: Comportamientos del SMA dependiendo de la temperatura.

se deforma elásticamente ( $A \rightarrow B$ ). Al alcanzarse un nivel de tensión específico, la carga interseca con la curva de inicio de transformación martensítica del diagrama de fases. Esto marca la tensión ( $\sigma_{M_s}$ ) de inicio de la transformación martensítica. En la Figura 2.6 se aprecia la generación de una gran deformación inelástica durante la transformación de austenita a martensita. La transformación continúa ( $B \rightarrow C$ ), hasta que la tensión interseca con la recta de final de la transformación ( $M_f$ ). El final de la transformación martensítica viene acompañado de un cambio en la pendiente de la curva  $\sigma - \epsilon$ , asociada a la carga elástica de la fase martensítica. El incremento de la tensión únicamente producirá la deformación elástica de la fase martensítica ( $C \rightarrow D$ ). Al comenzar a retirarse la carga, la martensita es descargada a lo largo de la trayectoria ( $D \rightarrow E$ ). En el punto E comenzará la transformación reversa ( $\sigma_{A_s}$ ), que provoca la transformación de martensita a austenita. El proceso está acompañado de una recuperación de la deformación de transformación debido a la descarga. El final de la transformación, corresponde al punto F ( $\sigma_{A_f}$ ). A partir de este punto recupera la deformación elástica hasta llegar a A. La histeresis es observable para la transformación directa e inversa en un ciclo superelástico completo, y representa la energía disipada a lo largo del ciclo. Los niveles de tensión y transformación, así como en tamaño de la histeresis dependen del material y de las condiciones de ensayo.

### 2.2.3. Efecto de doble memoria de forma

El Efecto de doble memoria de forma (TWSME - *Two Way Shape Memory Effect* del inglés) se refiere a la capacidad que tiene la aleación NiTi, de recordar la forma tanto a altas (austenita), como a bajas temperaturas (martensita), tras haber sufrido un tratamiento termodinámico específico conocido como entrenamiento. Esto supone que

cuando la aleación se calienta, tiende a deformarse hasta alcanzar la forma que ha sido definida mediante el entrenamiento, y al enfriarse se logrará el efecto contrario, volviendo a recuperarse la forma inicial sin necesidad de aplicar carga externa ninguna (7).

#### 2.2.4. Comportamiento cíclico y TRIP

La plasticidad inducida por transformación de fase es un comportamiento apreciable para el caso de los SMAs que no hayan sido estabilizados. Como se puede apreciar en la Figura 2.7, a medida que el material es cargado y descargado cíclicamente, la deformación plástica aumenta, para posteriormente estabilizarse al transcurrir una cantidad de ciclos determinado, siendo esta propiedad diferente en función de la aleación que se estudie.

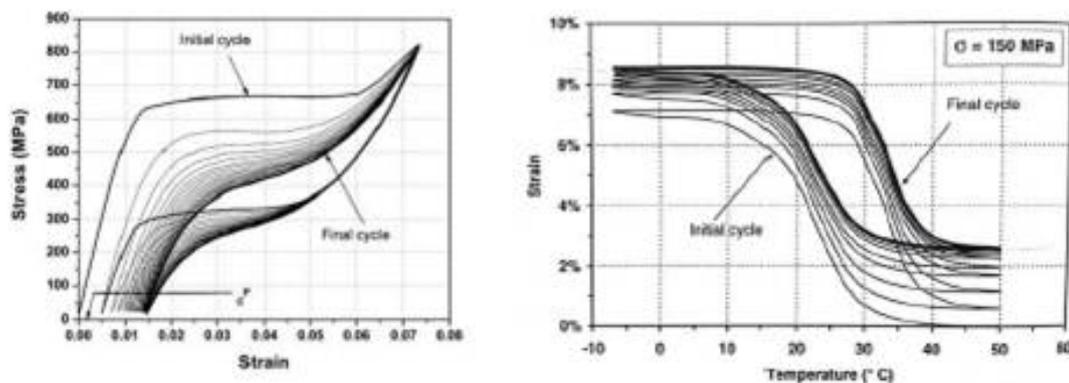


Figura 2.7. Efecto del TRIP tanto a temperatura, como a tensión constantes (1).

#### 2.2.5. Morphing con SMAs

Durante las pasadas décadas, los ingenieros han aprovechado las propiedades multifuncionales de los SMAs y han desarrollado maneras de convertir la energía térmica en mecánica utilizándolos en aplicaciones reales, siendo utilizados en campos tan diferentes como el aeroespacial (8), el de la instrumentación quirúrgica o el de los implantes médicos (9).

Un ejemplo de lo citado anteriormente es el proyecto que están llevando a cabo NASA y Boeing (10), en el que han diseñado un sistema de *flaps* variable que se puede observar en la Figura 2.8. La sustitución de los diferentes mecanismos actuadores por componentes o estructuras que cuenten con capacidad de morphing, conlleva una reducción de consumo debido tanto a la disminución en el peso de la pieza en sí, así como en el caso de aplicaciones aerodinámicas.

El principal problema que supone la sustitución de piezas completas fabricadas de

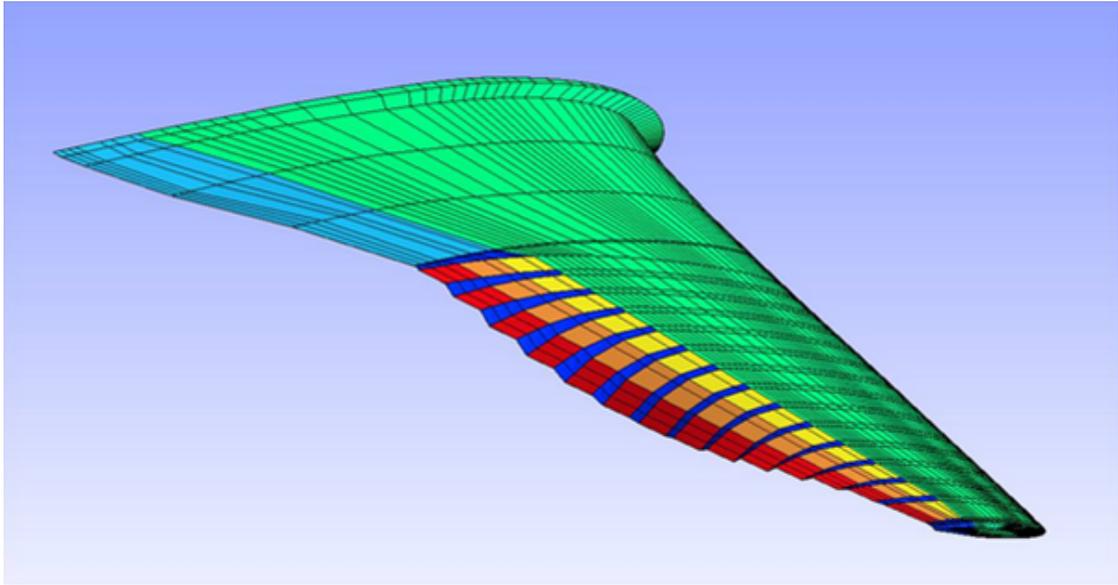


Figura 2.8. Cambio de forma de una maqueta de la sección del ala de un avión.

materiales pasivos por piezas que se componen de materiales actuadores es su coste. Los materiales actuadores tienen un precio elevado en comparación con los materiales pasivos, por lo que su utilización encarece los precios finales de los productos haciendo inviable su uso. Una de las soluciones planeadas a este problema puede ser el de la hibridación entre materiales actuadores y pasivos, obteniendo de este modo compuestos que cuenten con propiedades de ambos materiales.

Las estructuras con capacidad de morphing han sido estudiadas por diferentes autores, cuyos trabajos generalmente se enmarcan dentro del desarrollo de estructuras aeronáuticas y aeroespaciales. Hay estudios en los que el cambio geométrico del componente o estructura se produce sin la utilización de materiales actuadores (11; 12). En estos trabajos se desarrollan técnicas de diseño basadas en la falta de simetría de los laminados de compuesto, pero cuyos cambios geométricos apenas son substanciales. Por el contrario, en el caso de las investigaciones que incorporan materiales actuadores, hay dos aplicaciones principales. Por un lado se encuentran aquellas en las que el objetivo es el de contrarrestar los efectos dinámicos (13), que consiste en el cambio de rigidez de material de esta manera modificar y evitar en la medida de lo posible las frecuencias naturales, y otra es, el cambio de forma de diferentes componentes gracias a la actuación de estos materiales (14; 2; 13; 15; 16; 17; 18). Estos últimos trabajos se centran en la influencia del cambio de geometría para diferentes condiciones aerodinámicas.

Una de las primera soluciones en las que se combinaron SMAs con materiales compuestos, consistía en el control activo de las propiedades mecánicas del hilo de SMA, el

cual, al transformarse de un estado martensítico a uno austenítico, aumenta su módulo elástico variando el comportamiento del material a su vez gracias al incremento de temperatura, lo cual puede ser muy interesante para resolver problemas derivados de las vibraciones mecánicas, así como variar el amortiguamiento y poder tener un control de las vibraciones en la estructura. La segunda manera de utilizar el SME consiste en deformar el SMA inicialmente y a continuación embeberlo en la estructura, de esta forma, cuando el SMA es calentado, trata de volver a su forma original contrayendo todo el conjunto a su vez. La contracción inducida conlleva grandes tensiones internas, y sumándolo a la variación del módulo elástico del material, conduce si cabe a un mejor control sobre las vibraciones, el amortiguamiento y otras características estructurales.

Centrando el tema en la utilización de SMAs para alcanzar cambios geométricos en estructuras anteriormente pasivas, se encuentran trabajos como el de Balta *et al.* (13). Estos autores introducen hilos de SMA para realizar cambios en la geometría de la superficie que se encuentra en contacto con el aire y de esta manera estudian la influencia del cambio geométrico en el comportamiento aerodinámico de diferentes estructuras.

Cortes y Cantwell (19) fabrican un FML con memoria de forma en forma de viga, en la que se combinan un laminado de resina epoxy reforzado con fibra de carbono, junto con una aleación NiTi con memoria de forma. Al adherir el SMA al compuesto y calentarlo, se producen cambios en la forma de la viga al debido a su cambio de forma y consiguiente actuación. Su trabajo es únicamente experimental.

Finalmente, una de las aplicaciones más recientes e importantes es la que han propuesto Hartl *et al.* (20), en la que añaden flejes de SMA a la parte posterior de los motores de un avión con el objetivo de variar la geometría de salida y mejorar la acústica durante el despegue y el aterrizaje. El resultado de este trabajo se puede ver en la Figura 2.9.

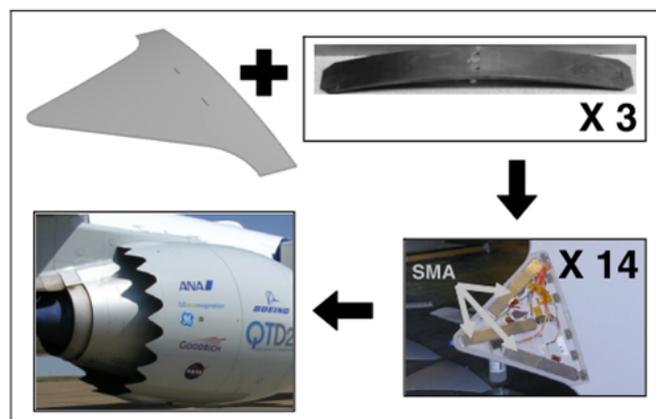


Figura 2.9. Utilización de SMAs para la disminución del ruido en los motores de los aviones.

## 2.3. Modelado de los SMAs

Desde la década de los 80 hasta hoy en día, el modelado del comportamiento de los SMAs ha sido un tema de investigación que ha recibido mucha atención. El aumento del interés hacia aquellas aplicaciones en las que se utilizan SMAs, ha hecho necesario el desarrollo de herramientas de análisis y diseño más potentes, por lo que ha aumentado el interés acerca del desarrollo de modelos constitutivos más precisos. En las dos décadas anteriores, se han tratado de desarrollar e implementar diferentes modelos para facilitar el diseño y el análisis de aplicaciones ingenieriles que incorporaran SMAs. Estos modelos, se puede separar principalmente en dos categorías: modelos micro-mecánicos y modelos fenomenológicos. En las últimas tres décadas los SMAs han sido ampliamente investigados desde el punto de vista del modelado y el coste computacional. Estos estudios se han centrado sobre todo en aspectos como las transformaciones inducidas por tensión y temperatura, la reorientación martensítica o los efectos de las cargas cíclicas sobre el comportamiento del material. En lo referido al modelado, se pueden distinguir diferentes categorías, entre las cuales se encuentran los modelos de escala micro, de escala micro-macro y finalmente de escala macro. Para analizarlos en profundidad, se puede acudir a los trabajos realizados por Khandelwal y Buravalla (21), Lagoudas et al. (22) y Patoor et al. (23).

### 2.3.1. Tipos de modelos

**Modelos termodinámicos microscópicos (modelos micro):** Los modelos micro se enfocan en la descripción de los comportamiento de la micro-escala, como son la nucleación, movimiento de intercaras o demaclado (24). Son especialmente útiles a la hora de entender los fenómenos fundamentales, pero normalmente es muy complejo utilizarlos para aplicaciones ingenieriles. No tienen en cuenta las fracciones de volumen de cada fase como variables internas *a priori*, sino como una consecuencia de los movimientos de las intercaras. Se pueden obtener más detalles en los trabajos de (25; 26).

**Modelos macroscópicos basados en la micromecánica (modelos micro-macro):** La esencia de los modelos basados en la micromecánica es el de modelar un único grano y mediante métodos estadísticos obtener la respuesta de un SMA policristalino. Estos modelos han sido presentados por diferentes autores. Por ejemplo, Patoor et al. (23) modela el comportamiento de un SMA policristalino utilizando para ello el mismo modelo que se utiliza para los que son unicristalinos y a continuación utiliza el método de promedio autoconsistente para tener en cuenta la interacción entre granos. Un modelo capaz de representar diferentes comportamientos del SMA como son el efecto de memoria de forma y la superelasticidad es el presentado por Sun y Hwang (27). En otras palabras,

este tipo de modelos utilizan leyes termodinámicas para describir la transformación y utiliza la micromecánica para para estimar la energía de interacción que se genera debido a la transformación que se da en el material, el cual es un factor determinante en el mecanismo de transformación. Utilizar una formulación apropiada es muy importante y requiere conocer cómo se produce la evolución microestructural a la hora de aproximar la energía de interacción (Fischer y Tanaka (28)). Estos modelos parecen tener una gran capacidad de predicción. En cambio, emplean una gran cantidad de variables internas lo cual hace que el tiempo de cálculo aumente en exceso, y no sea viable su aplicación en casos de ingeniería.

*Modelos fenomenológicos macroscópicos (modelos macro)*: Los modelos fenomenológicos macroscópicos se basan en la termodinámica fenomenológica y/o del ajuste directo de curvas experimentales. Muchos de estos modelos se basan en las curvas de transformación de fase de los SMAs, donde las regiones de transformación en las que se producen el cambio de austenita a martensita o martensita a austenita se determinan experimentalmente y se grafican en función de la temperatura y la tensión. Los autores (29; 9; 30) normalmente utilizan la fracción de volumen de martensita como variable interna y también diferentes funciones matemáticas para describir las transiciones de una manera fluida.

### 2.3.2. Conclusión

Las ventajas y desventajas de los diferentes tipos de modelos se pueden resumir de la siguiente manera. Primero, los modelos desarrollados desde un punto de vista macroscópico, son generalmente fáciles de utilizar y rápidos computacionalmente pero menos predictivos a nivel de material. En el caso de los modelos micro-macro, son mucho más predictivos, pero se necesitan una gran cantidad de variables internas. Los modelos de nivel micro, son más adecuados para realizar estudios fundamentales del material, que para la descripción de comportamientos macroscópicos. Es por esto, que los modelos utilizados para el desarrollo de aplicaciones ingenieriles son los denominados modelos macro o fenomenológicos.

### 2.3.3. Modelos Fenomenológicos

En el presente trabajo se van a utilizar modelos que tengan un punto de vista fenomenológico. Por lo tanto, a continuación se realizará un repaso de los modelos constitutivos fenomenológicos de los SMAs. Este tipo de modelos se pueden dividir en diferentes categorías:

*Modelos que parten de un potencial polinómico:*

En este tipo de modelos, la información constitutiva se proporciona mediante una función de energía libre de forma polinómica, donde mediante derivadas parciales se proporcionan las ecuaciones constitutivas de la deformación (o tensión) y la entropía (31). En 1980, Falk (25) propuso una función de energía libre basada en la teoría de Landau-Devonshire, basándose en la analogía entre la curva de tensión-deformación uniaxial del SMA y la curva de campo eléctrico-magnetización de los materiales ferromagnéticos. En su trabajo, obtuvo curvas de tensión-deformación no monótonas, y la pendiente negativa inestable fue interpretada como el proceso de transformación de fase. Por otra parte, la forma particular de la energía libre de Landau-Devonshire tiene en cuenta la dependencia sobre la temperatura que tienen las curvas de tensión-deformación a diferentes temperaturas. En este grupo también se encuentran Falk (25; 26) y Falk y Konopka (32). La principal ventaja de este tipo de modelos es su forma simple. En cambio, debido a esta simplicidad no cuentan con la capacidad de modelar comportamientos complicados del material, como tampoco lo son de describir la naturaleza evolutiva del proceso de manera adecuada.

***Modelos histeréticos:***

Los modelos histeréticos buscan reproducir las curvas experimentales que cuenten con grandes no-linealidades y bucles complejos. Principalmente hay dos tipos de algoritmos que son utilizados en el contexto de la transformación de fase de los SMAs. El primero de ellos es conocido como el algoritmo de Preisach y ha sido utilizado para describir el comportamiento isoterma uniaxial superelástico (Huo (33); Ortin (34)). El segundo tipo se basa en ecuaciones diferenciales que tiene formas diferentes para los casos de transformación directa e inversa. Se han utilizado ecuaciones de la forma Duhem-Madelung para modelar la evolución de la fracción de fase de los SMAs durante la transformación inducida por temperatura (Ivshin y Pence (35); Likhacev y Koval (36)).

***Modelos con cinética de transformación asumida:***

Por otra parte también encontramos modelos con cinética de transformación asumida. Estos modelos fueron propuestos en un comienzo por Tanaka y Nagaki (37), en el que el material es caracterizado mediante tres variables de estado internas diferentes: dos para definir la plasticidad, y uno para definir la transformación de fase. Este último trabajo motivó el estudio de este tipo de modelos por parte de otros investigadores, de los cuales, algunos de ellos presentaron una versión modificada de estas leyes cinéticas. Entre los diferentes autores se encuentran Liang y Rogers (38), Brinson (39), Ivshin y Pence (35) y Boyd y Lagoudas (40). Estos modelos son los más conocidos, por lo que cuentan con una gran cantidad de comparaciones experimentales, contando por tanto con un rol importante dentro del contexto del modelado del comportamiento de los SMAs.

***Modelos con variables internas y ecuaciones de evolución:***

Autores como Simo y Taylor (41) apuestan por basarse en los conceptos previamente establecidos por la teoría elastoplástica para describir el comportamiento de los SMAs. Bertran (42) propone un modelo tridimensional basado en los conceptos de endurecimiento cinemático e isotrópico. Souza et al. (43) también presentan un modelo capaz de representar la pseudoelasticidad y el efecto de memoria de forma utilizando conceptos de la plasticidad. Los modelos propuestos por Auricchio y colaboradores también se pueden incluir en este tipo de modelos. Presentándose en un principio para la descripción de un comportamiento unidimensional (Auricchio y Lubliner (44)), el modelo fue ampliado a un marco tridimensional ((45); Auricchio y Sacco (46)). Auricchio ha ido desarrollando diferentes modelos a lo largo del tiempo en el que podemos encontrar algunos más recientes como pueden ser el (47), en el que presenta un modelo que parte de la energía libre de Helmholtz, contando con la deformación de transformación como única variable interna.

Aparte de los modelos citados, hay más modelos basados en la teoría de la plasticidad como los propuestos por Govindjee y Kasper (48) y Leclercq et al. (49) entre otros.

***Otros modelos interesantes:***

Los modelos citados en los párrafos anteriores, únicamente diferencian entre la fase austenítica y martensítica, sin tener en cuenta a que se debe esta transformación, ni siquiera entre un tipo u otro de martensita. Brinson (39) presenta un modelo 1-D en el que separa la fracción de volumen de martensita en dos partes: inducida térmicamente o por tensión. Leclercq y Lexcellent (50) han presentado un modelo similar pero en este caso para un comportamiento tridimensional. Sin embargo, la implementación del modelo y los resultados obtenidos son para un caso unidimensional. Las comparaciones con los datos experimentales se realizan tanto para el caso de carga pseudoelástico como para el caso de transformación inducida por temperatura a tensión constante. Los resultados se acercan razonablemente, observándose una mayor discrepancia para el caso de transformación inducida por temperatura. En otro estudio, Lagoudas y Shu (51) proponen un modelo 3D con tres variables internas, pero nuevamente, los resultados obtenidos son para un caso unidimensional. Al comparar los dos últimos trabajos, se llega a la conclusión de que la diferencia principal entre ambos se encuentra en el tipo de endurecimiento empleado para la definición de la función de transformación.

La falta de simetría entre tracción y compresión no tiene influencia en aquellas aplicaciones que trabajen uniaxialmente, en cambio es de vital importancia, para aquellos casos en los que los SMAs trabajen a flexión, como será el caso del FML con capacidad de morphing. El modelado de este comportamiento ha sido investigado por Raniecki y Lexcellent (52), los cuales presentan un modelo para el comportamiento superelástico de los SMAs que tiene en cuenta la asimetría mediante la utilización de una superficie de

transformación que utilizan invariantes  $J_2 - J_3$ . Este modelo es utilizado posteriormente en un trabajo de Raniecki et al. (53), en el que se estudia la flexión de vigas de SMA bajo efecto superelástico, pero sin tener en cuenta la diferencia entre tracción y compresión. Rejzner et al. (54) extendieron el trabajo realizado acerca de las vigas pseudoelásticas incluyendo el efecto de falta de simetría entre cargas de tracción y compresión y los compararon con los datos experimentales, observándose que esta falta de simetría no tenía una influencia significativa en la respuesta macroscópica de la viga.

El exhaustivo estudio de Quidwai y Lagoudas (55) se centra en la elección de diferentes funciones de transformación y su efecto sobre la respuesta del material. En particular, la no simetría entre el comportamiento a tracción y compresión. Proponen una función de transformación basada en los invariantes de tensión  $J_2$ ,  $J_3$  e  $I_1$ , cuya utilización puede justificarse debido a la asimetría observada. Posteriormente, la forma de la función de transformación fue revisada por Lexcellent et al. (56). Más tarde, motivados por los resultados experimentales en los cuales se observan diferencias entre la carga y la descarga, Lexcellent et al. (56) propusieron una expresión analítica de la función de transformación, basándose en los invariantes de la tensión  $J_1$  y  $J_2$ . El modelo de Paiva *et al.* (57) tiene en cuenta una trayectoria diferente, añadiendo la asimetría tensión-compresión. Por último, Auricchio *et al.* (47; 58) introducen una norma modificada de la de la deformación de transformación  $\varepsilon_{tr}$  para un caso unidimensional, y cuya extensión a un caso tridimensional, puede ser por ejemplo, la norma clásica de  $J_2/J_3$  de Prager-Lode.

Las cargas cíclicas y la plasticidad inducida por tensión no tienen influencia para aquellas piezas de SMA que hayan sido estabilizadas. Ese proceso puede ser sencillo para piezas cuyo tamaño no sea muy elevado, o cuyas sollicitaciones de trabajo no sean triaxiales, en cambio, para el caso de piezas complejas o de gran tamaño es difícil estabilizar el material antes de lograr el componente final, lo cual supondrá que la estabilización se producirá una vez que la pieza se encuentre en servicio. El problema es que es imposible predecir de antemano el comportamiento total si no se tiene un buen modelo sobre este fenómeno. Son varios los investigadores que han tratado este tema, un ejemplo de ello son (Lexcellent y Baurbon (59), Fischer (28), Lexcellent et al. (60), Abeyaratne y Kim (61), Bo y Lagoudas (62), (63), (64), Lagoudas y Entchev (31), (22)). Durante las transformaciones de fase cíclicas se acumula una cantidad sustancial de deformación plástica. Con ello, el ciclo de transformación evoluciona con el número de ciclos, pudiendo generarse el TWSME. Los investigadores, basándose en los resultados experimentales, han tratado de crear modelos capaces de capturar los efectos de la carga cíclica. Tanaka et al. (65), (35), Lexcellent y Baurbon (59), Lexcellent et al. (60) y Abeyaratne y Kim (61) entre otros, han presentado modelos para el caso unidimensional de hilos de SMA sometidos a cargas cíclicas. Partiendo de un modelo original de Fremond (Savi et al. (66),

Baeta-Neves et al. (67), Paiva et al. (68), Savi y Paiva (57)), desarrollan un modelo que permite la descripción de una mayor cantidad de fenómenos como pueden ser el efecto de las deformaciones térmicas y plásticas, incluyendo un acoplamiento entre la plasticidad y la transformación de fase, la cual hace posible la descripción del TWSME. Una serie de artículos de Bo y Lagoudas (62), (63), (64) estudian el comportamiento en una dimensión de hilos de SMA. El trabajo se centra en el modelado de la transformación producida por tensión, donde tanto la deformación de transformación como la plástica se producen simultáneamente bajo la tensión aplicada durante la transformación de fase. El modelo resultante del estudio es capaz de tener en cuenta la simultaneidad de estos dos efectos. Además de la deformación plástica, también se incluye el cambio de la respuesta del material añadiendo ecuaciones de evolución para los parámetros del material. Finalmente, Bo y Lagoudas (63) modelan el comportamiento de los ciclos de histéresis que no han sido completados. Los resultados obtenidos por el modelo han sido comparados con los resultados experimentales de actuadores NiTi, y se puede observar una buena correlación entre los resultados. Fisher (28) ha presentado un modelo tridimensional para la plasticidad inducida por transformación. A diferencia del trabajo de Lagoudas y Bo (69), utiliza condiciones de transformación y límite de plasticidad diferentes. La teoría se plantea en términos generales, pero la identificación de los parámetros del material y su implementación no es discutida.

## 2.4. Modelos Fraccionarios

El cálculo fraccionario es una extensión del cálculo clásico que permite considerar integrales y derivadas de orden real, y se considera que la primera definición de una derivada fraccionaria fue propuesta por Pierre S. Laplace en el año 1812 (70). Algunos años más tarde, en 1822, Jean-Baptiste J. Fourier extendió el uso de las derivadas fraccionarias a las funciones trigonométricas (71).

Una década más tarde, Joshep Liouville llevó a cabo el primer gran estudio acerca de las definiciones de derivadas fraccionarias, publicando un gran número de resultados teóricos y prácticos entre 1832 y 1837 (72).

En 1869, Nikolay Y. Sonin (73) utilizó la fórmula de la integral de Cauchy para llevar a cabo derivadas de orden arbitrario. Y casi al mismo tiempo, los trabajos de Grünwald (74) y Letnikov (75) sentaban las bases de lo que a día de hoy es conocido como la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov.

Desde del periodo de tiempo cubierto hasta el momento hasta el siglo veinte se realizaron numerosos trabajos acerca del cálculo fraccionario y se convirtió en un campo de la matemática en sí mismo. A lo largo del siglo veinte se obtuvieron una gran cantidad

de resultados más, entre los que hay que destacar el trabajo de Michele Caputo (76), donde se obtenía la hoy conocida como derivada de Caputo. Esta derivada es frecuentemente utilizada porque permite especificar las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales fraccionarias de manera clásica.

En 1974 se lleva a cabo en la Universidad de New Heaven, la primera conferencia específica sobre la teoría y aplicación del cálculo fraccionario. El mismo año, Oldham y Spanier (72) publicaron el primer libro sobre calculo fraccionario. Después de este instante, fueron publicados una gran cantidad de libros entre los cuales destacan los de Miller y Ross (77), Samko et al. (78), Podlubny (76), Hilfer (79), y más recientemente los publicados por Kilbas et al. (80), Magin (81) y Mainardi (82). Finalmente, en 1998, tubo lugar la primera publicación en la revista "Fractional calculus and applied analysis", que se encarga de publicar exclusivamente aquellos trabajos que tienen que ver con la teoría del cálculo fraccionario y sus aplicaciones.

A partir de estos desarrollos, las definiciones matemáticas de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov han sido utilizadas como base para crear nuevas definiciones mediante su modificación y adaptarlas a la realidad física, pero siempre basándose en las definiciones básicas. Por ejemplo, Caputo reformuló la definición clásica de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con el objetivo de utilizar condiciones iniciales consistentes con sentido físico a la hora de resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Resaltar que los cuatro trabajos principales de las últimas décadas son los de Hilfer (79), Podlubny (76), Miller y Ross (77) y Oldham y Spanier (72). Para más detalles acerca de la evolución del cálculo fraccionario a lo largo de la historia y los últimos progresos también se debe acudir a las siguientes publicaciones: (83; 84; 85; 86; 87).

#### **2.4.1. Aplicación del cálculo fraccionario en el modelado de diferentes comportamientos físicos y mecánicos**

Hay diferentes libros dedicados al cálculo fraccionario en los cuales se pueden encontrar aplicaciones prácticas de la utilización de este tipo de operadores. En el caso del libro escrito por Oldham y Spanier en 1974 (72) se realiza un resumen de diferentes aplicaciones realizadas hasta ese momento. Entre ellas se encuentran la difusión de calor, problemas de fluidos viscosos, la migración de neutrones, fluidos a través de un medio poroso o problemas de líneas de transmisión eléctricas.

De la misma manera, en uno de los capítulos del libro publicado por Podlubny (76), se dedica un capítulo entero a las aplicaciones más importantes del momento, que iban desde el comportamiento de metales, hasta la teoría de control, pasando por áreas de conocimiento tan diferentes como la biología o la química.

Más recientemente, en 2009, J.A. Tenreiro Machado publicó un artículo divulgativo (87) en el cual realizaba una introducción al cálculo fraccionario para aquellas personas ajenas a este campo, así como un ejemplo de aplicación, y diferentes referencias a publicaciones que contenían casos prácticos en los cuales había participado hasta 2008. Estos casos prácticos cubrían un gran espectro de conocimiento como son el modelado estadístico, robótica, análisis de sistemas mecánicos, algoritmos genéticos, electromagnetismo, control, sistemas inteligentes de transporte, osciladores, sistemas térmicos, sistemas vivos, procesos electrolíticos.

Si atendemos al campo de la mecánica de sólidos, la evolución más importante se ha realizado en el campo de la viscoelasticidad. Bagley y Torvik (88) publicaron una serie de artículos en los cuales se incluían las bases de los modelos reológicos fraccionarios para el modelado de los comportamientos viscoelásticos. Las derivadas fraccionarias proporcionan la propiedad de la memoria, que se observa en el comportamiento viscoelástico (89; 90). Dentro de este tipo de fenómenos, también se ha modelado el fenómeno de relajación dentro del marco de los procesos termodinámicos irreversibles dentro del rango lineal (91).

#### 2.4.2. Coste computacional de los operadores fraccionarios

Finalmente, se debe de incidir en que la evaluación numérica de derivadas fraccionarias, requiere un gran coste computacional debido a la necesidad de todo el histórico de valores obtenidos en los pasos anteriores. Debido a que los sistemas cuentan con una cantidad elevada grados de libertad, el coste numérico y de almacenamiento es excesivo.

Actualmente no hay muchos trabajos dedicados a esta temática. Entre estos trabajos se encuentran los de Schmidt y Gaul (89; 90), Singh (92) y Yuan (93). Estos autores han trabajado en la reducción del tiempo de cálculo de problemas que contienen operadores fraccionarios. En cada uno de los trabajos se presentan diferentes conceptos para evaluar numéricamente las derivadas fraccionarias, basándose en la definición de Grünwald-Letnikov.

Debido a la falta de trabajos en los que se trabaje el tiempo de cálculo de los operadores fraccionarios, se ha decidido utilizar un técnica que ha sido ampliamente utilizada en el campo de la ingeniería mecánica, como es la POD. En la siguiente sección se hace un resumen de varios de los trabajos en los que se ha empleado dicha técnica.

## 2.5. Proper Orthogonal Decomposition

La POD es un método poderoso que logra aproximaciones de bajo orden de sistemas de datos de dimensiones elevadas. Esta técnica se basa en la proyección del sistema sobre otros subespacios y permite obtener la información principal de sistemas de alto orden dimensional mediante la captura de los componentes principales que forman una parte de la solución total del sistema (94), simplificando el cálculo de esta manera.

La POD ha sido utilizada en diferentes disciplinas como puede ser el análisis de fluidos turbulentos (95), análisis estructural (96), análisis térmico transitorio (97) o sistemas micromecánicos (98). Generalmente, en este tipo de aplicaciones, la POD se utiliza con el objetivo de analizar datos experimentales y poder extraer la información principal o patrones principales de comportamiento.

Teniendo en cuenta que la aplicación de la POD en diferentes campos de investigación ha sido satisfactoria, se ha considerado el utilizarla con el objetivo de investigar si es capaz de reducir la complejidad de la evaluación de los operadores fraccionarios.

El objetivo de la POD es extraer la información más valiosa de un problema dado. Por ejemplo, si se tiene una estructura compuesta por vigas donde una fuerza arbitraria es aplicada, dependiendo de los valores de la fuerza, los resultados obtenidos de desplazamientos serán diferentes.

Al realizar diferentes cálculos para diferentes cargas, es posible obtener una matriz en la que cada vector represente una solución para cada carga. Si se aplica el método de la POD a esta matriz, da como resultado un problema de autovalores y autovectores. La suma de estos autovectores multiplicados por sus correspondientes autovalores, proporciona la solución total del problema previamente calculado.

Hay algunos casos, en los que es posible obtener una buena aproximación de la solución utilizando únicamente una pequeña cantidad de autovectores, por lo que es posible reducir el tamaño del problema.

## 2.6. Revisión crítica del estado del arte

El análisis crítico del estado del arte se lleva a cabo teniendo en cuenta el objetivo principal de este trabajo, que no es otro que ser capaces de simular de manera precisa el comportamiento de un FML que cuenta con capacidad de morphing gracias a la utilización de SMAs. Para ello es necesario contar con modelos de SMA capaces de reproducir con precisión el comportamiento de los SMAs.

Durante el análisis de la bibliografía no se ha podido encontrar ningún modelo que sea capaz de simular los bucles internos del SMA de una manera suficientemente precisa.

Debido a la falta de existencia de este tipo de modelos, se desea desarrollar un nuevo tipo de modelo de SMA basado en operadores fraccionarios que permita la reproducción de la no linealidad que se produce en los bucles internos del material.

Por otra parte, dado que los operadores fraccionarios cuentan con un elevado coste computacional, en el presente trabajo se trata de abrir una nueva vía en la resolución de operadores fraccionarios basándose en las características proporcionadas por la POD. De esta manera es posible precalcular diferentes soluciones y interpolarlas en tiempo real para poder realizar cálculos más rápidos.

Finalmente también se ha observado que no existe una gran cantidad de ensayos experimentales en lo referido a compuestos que cuentan con actuadores SMA en forma de placa que trabajen a flexión, por lo que se desea plantear ensayos con diferentes cargas y determinar el comportamiento del conjunto.



## Capítulo 3

# Objetivos

El objetivo principal de esta tesis, consiste en el desarrollo de herramientas de simulación con las cuales se puedan diseñar estructuras con capacidad de morphing que contengan SMAs. A continuación se especifican los objetivos que se desean alcanzar mediante la consecución del presente trabajo:

1. Estudio experimental de los bucles internos del material para determinar su comportamiento no lineal.
2. Comparación de los resultados experimentales con los modelos clásicos de simulación de SMAs.
3. Desarrollo de un modelo fraccionario capaz de representar los bucles internos que se observan durante la caracterización del material.
4. Desarrollar un método que permita acelerar el tiempo de cálculo de los operadores fraccionarios para poder hacerlos más competitivos frente a los modelos clásicos.
5. Estudio de un compuesto que contiene un actuador de SMA como actuador en forma de viga a flexión.



## Capítulo 4

# Caracterización del SMA

En el presente capítulo se detallan las técnicas experimentales empleadas en la tesis. Por un lado se ha realizado la caracterización térmica del material mediante calorimetría diferencial de barrido (DSC - *Differential Scanning Calorimetry* del inglés), y por otro lado, se ha llevado a cabo la caracterización del comportamiento mecánico, donde mediante un ensayo de tracción se han estudiado la estabilización del material, los límites de transformación y el comportamiento de los bucles internos. El material estudiado se trata de una aleación NiTi en forma de hilo de 0,5 mm de diámetro cuyo comportamiento a temperatura ambiente es superelástico.

Se ha optado por una aleación equiatómica de níquel titanio comercial con propiedades superelásticas a temperatura ambiente, referencia NT09, obtenida a través del proveedor (AMT) @medical technologies. Las propiedades termomecánicas ofrecidas por el fabricante quedan resumidas en las Tabla 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1  
Propiedades mecánicas del SMA (23°C).

Tensión de transformación directa mínima (Para el 4 % de deformación)	450 MPa
Tensión de rotura mínima	1200 MPa
Deformación permanente máxima (Tras 8 % de deformación)	0.4 %
Deformación a la rotura mínima	10 %

Tabla 4.2  
Propiedades térmicas del SMA.

Calor específico	$490 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
J kg-1 K-1 Entalpía de transformación	$20.000 \text{ Jkg}^{-1}$
$A_s$	$-20^\circ\text{C}$
$M_s$	$-30^\circ\text{C}$

#### 4.1. Determinación de las temperaturas de transformación

Como se ha comentado en el Capítulo 2, las Aleaciones con Memoria de Forma o SMAs, cuentan con dos fases diferentes. Por un lado se encuentra la fase martensítica, y por otra la austenítica. Es cierto que el fabricante suministra ciertas características, pero muchas veces suelen ser orientativas, por lo que es preciso ensayar el material para conocer con certeza cuales son las propiedades del material que tenemos en nuestras manos. El tener una fase u otra depende del nivel de tensión y de la temperatura a la que se encuentre el material. Para altas temperaturas y bajas tensiones el material se encuentra en fase austenítica, mientras que para altas tensiones y bajas temperaturas, el material se encuentra en fase martensítica.

Para poder determinar estas temperaturas en la que comienzan y finalizan las transformaciones de fase a tensión cero, se ha llevado a cabo un estudio calorimétrico utilizando para ello un calorímetro Mettler Toledo, que permite determinar las citadas temperaturas. Sabiendo que la transformación martensítica directa es un proceso exotérmico y la transformación reversa es un proceso endotérmico, se obtiene el resultado que se muestra en la Figura 4.1 y en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3  
Temperaturas de transformación.

$M_f$	$M_s$	$A_s$	$A_f$
$-51,9^\circ\text{C}$	$-31,4^\circ\text{C}$	$-24,6^\circ\text{C}$	$-6,4^\circ\text{C}$

Para poder determinar las temperaturas de transformación del SMA, se dibujan las tangentes a las líneas rectas que preceden y suceden a las transformaciones, así como las tangentes a los picos de la transformación, siendo el punto de corte entre estas curvas el que define los inicios y finales de las temperaturas de transformación. De esta manera las temperaturas obtenidas se presentan en la Tabla 4.3:

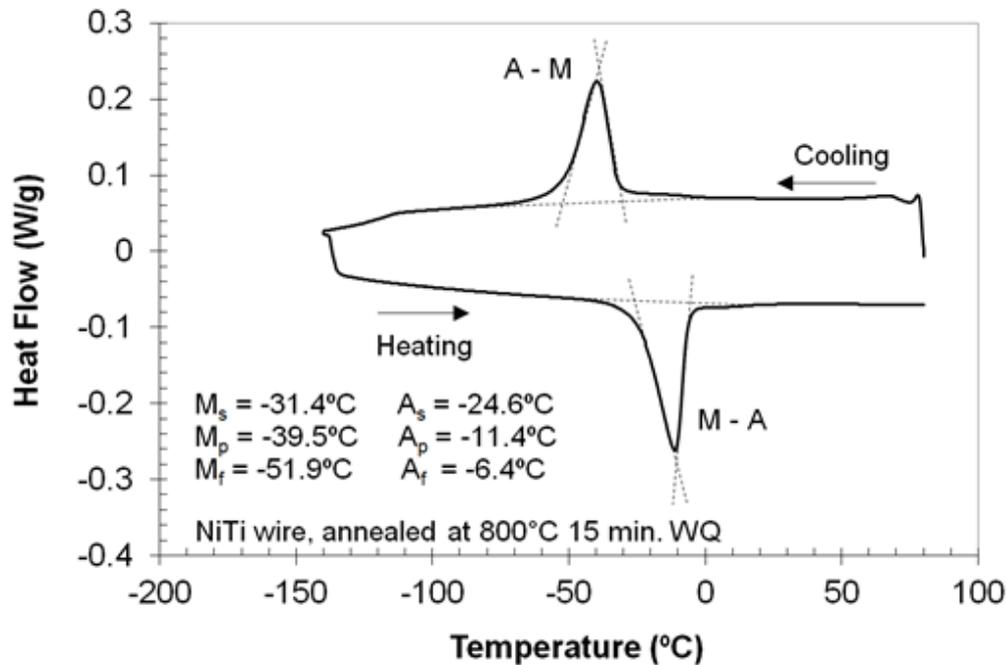


Figura 4.1. Análisis calorimétrico del SMA.

Como ya indicaba en la ficha técnica suministrada por el fabricante, se observa que las temperaturas de transformación de esta aleación de SMA se encuentran muy por debajo de 0 °C, por lo que a temperatura ambiente siempre contaremos con una fase austenítica en el SMA. Por otra parte, como indican los resultados de la caracterización térmica, el material cuenta con temperaturas de transformación ligeramente diferentes a las que aparecen en la ficha técnica, y aunque en el transcurso de la presente tesis no tiene una gran influencia, siempre conviene realizar un estudio calorimétrico sencillo que determine las temperaturas con exactitud.

## 4.2. Estabilización del material

El estudio de la estabilización del material es importante ya que las propiedades mecánicas del SMA evolucionan a lo largo de los ciclos termo-mecánicos (99). Este trabajo se centra en el análisis del comportamiento de los SMAs de manera estable, por lo que

para obtener los datos necesarios de la caracterización se ha estabilizado el material siguiendo los pasos que se describen a continuación.

Los ensayos de tracción realizados a bajas velocidades de deformación han sido llevados a cabo en la máquina de ensayos universales INSTRON 40206. La medición de la fuerza ha sido realizada con una célula de carga de 50kN, mientras que la deformación ha sido obtenida a partir del desplazamiento del cabezal controlando la velocidad del mismo. La fuerza, el desplazamiento y la temperatura han sido monitorizados *in situ* utilizando para ello un sistema de adquisición de National Instruments. Las probetas utilizadas para los ensayos cuentan con una longitud calibrada de 50 mm, y la velocidad a la que se ha llevado a cabo el ensayo es de 10 mm/min.

Las aleaciones metálicas convencionales tienen un comportamiento repetitivo en el rango elástico. Para el caso de los SMAs no sucede exactamente lo mismo. Esto es debido a que a pesar de que la transformación martensítica se encuentra dentro del rango elástico del material, la deformación plástica inducida por transformación martensítica (TRIP) (100) aumenta en cada ciclo. Este aumento de la deformación plástica disminuye a medida que aumenta el número de ciclos al que se ve sometido el material, hasta alcanzar un punto de estabilización, en el cual, a pesar de que aparezca una gran histéresis durante la transformación martensítica, la deformación plástica del material no evoluciona, y las propiedades mecánicas de material se mantienen constantes. Visto que el comportamiento termo-mecánico de los SMAs es variable a lo largo del número de ciclos, es necesario determinar el punto de estabilidad del material, así como conocer su comportamiento evolutivo a la hora de diseñar componentes que contengan SMAs.

En la Figura 4.2, se presenta el comportamiento variable del SMA a lo largo de los 100 ciclos de carga y descarga que se le han aplicado. Como se observa en la imagen, el inicio de cada ciclo se aleja del punto inicial del ensayo y las tensiones de transformación directas y reversas son cada vez más bajas a lo largo del tiempo, para finalmente estabilizarse alrededor de los 100 ciclos.

En la figura 4.3 se observa cómo esta deformación llega prácticamente a una asíntota horizontal, y que sus parámetros no varían, con lo que concluye que el material ha sido estabilizado.

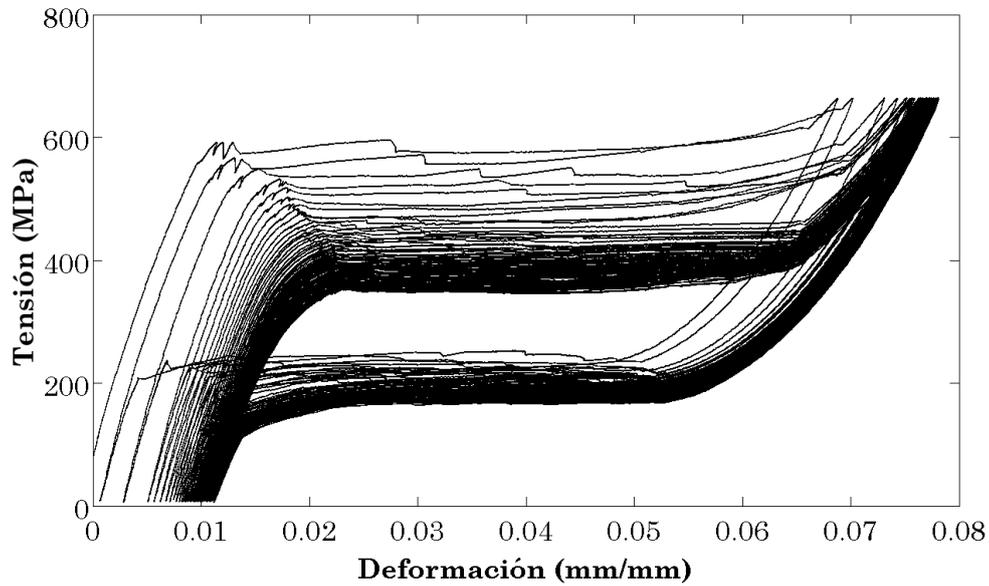


Figura 4.2. Carga cíclica inducida para la estabilización del hilo de SMA.

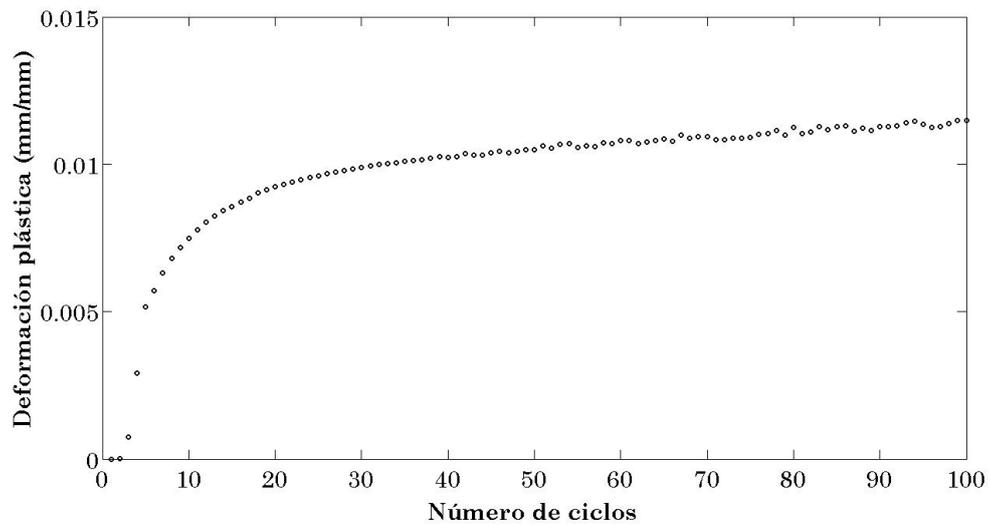


Figura 4.3. Deformación plástica inducida por la transformación martensítica del material.

En la Figura 4.4 se muestra el comportamiento un ciclo completo del SMA. En la Tabla 4.4 se presentan los valores de las propiedades mecánicas del hilo de SMA que se ha caracterizado. Estas propiedades pertenecen al ciclo final de estabilizado que se ha llevado a cabo, y serán las propiedades que se utilicen para alimentar los modelos que se verán en el siguiente capítulo.

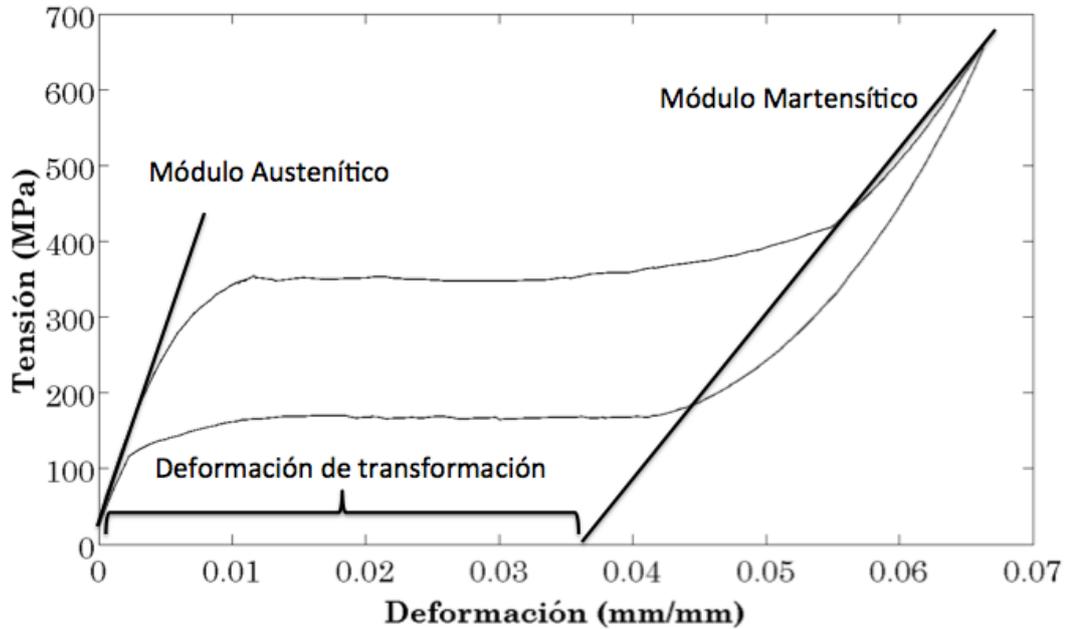


Figura 4.4. Comportamiento del SMA tras la estabilización.

Tabla 4.4

Parámetros del material.

Módulo Austenítico ( $E_A$ )	Módulo Martenítico ( $E_M$ )	Def. Transformación ( $\varepsilon_{tr}$ )
$47,74 \pm 1,25$ GPa	$24,37,74 \pm 7,39$ GPa	3,6 %

### 4.3. Análisis de los bucles internos

Los modelos fenomenológicos tradicionales, tratan la parte elástica de los SMAs de manera lineal. Eso supone que a día de hoy, no existen modelos adecuados para su implementación en elementos finitos que sean capaces de reproducir el comportamiento interno de los SMAs de una manera adecuada. Con el objetivo de proponer un modelo que permita definir el comportamiento interno mencionado, en el presente trabajo se ha llevado a cabo la caracterización de los bucles internos, para su posterior modelado mediante modelos basados en operadores fraccionarios.

Los ensayos se han llevado a cabo de la siguiente manera. En un primer paso se ha determinado la forma de la curva de un ciclo completo en el cual se produce una

transformación martensítica completa, tanto directa como reversa. A continuación, y sin soltar las probetas, se han realizado diferentes procesos de carga y descarga del material. En concreto, la deformación máxima de cada uno de los ciclos ha ido aumentando un 1 % hasta llegar a una deformación máxima del 6 %. Las descargas se han realizado hasta tensiones de 300, 250, 200 y 190 MPa respectivamente. Como se puede apreciar en las figuras, las curvas tiene una precarga en la parte lineal con la intención de evitar el ruido inicial de la carga.

En el primero de los casos, aquel en el que la descarga se produce hasta alcanzar un valor de la tensión de 300 MPa como se muestran en la Figura 4.5, se puede ver como el área que queda entre la carga y la descarga del material es prácticamente despreciable. A pesar ello, es evidente que durante el comienzo de la descarga elástica del material, además del proceso elástico, se produce un proceso de transformación reversa donde la martensita disminuye dentro del material.

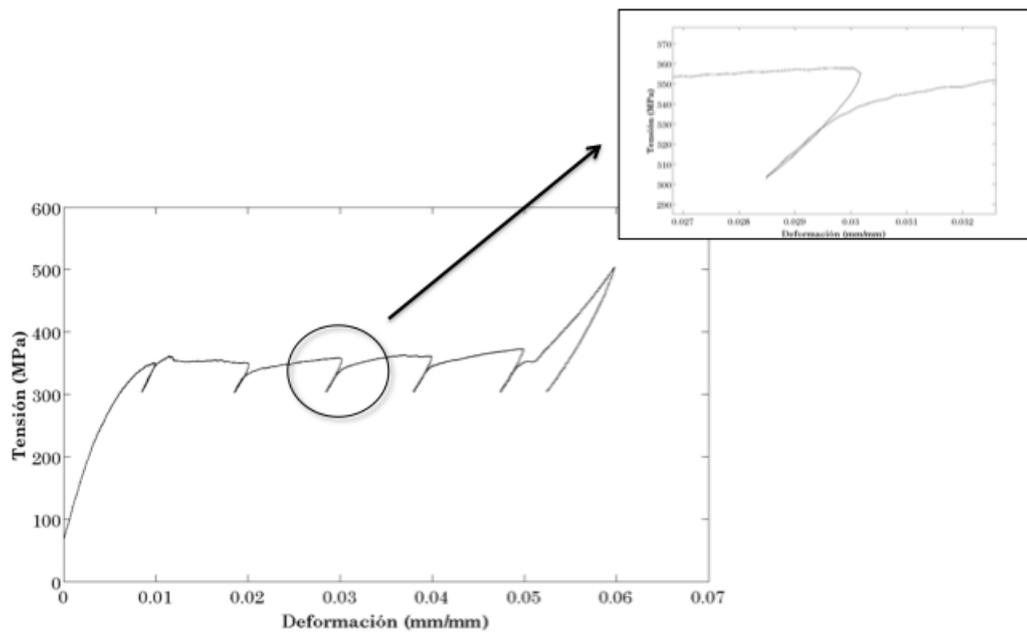


Figura 4.5. Bucles internos con una descarga hasta 300 MPa.

Para el caso que se representa en la Figura 4.6, se puede observar como a medida que disminuye la tensión de inicio del nuevo ciclo, el área interna que queda entre la descarga y la carga del material se hace cada vez más significativa. Esta histéresis es mayor para los bucles que se producen al comienzo de la transformación, y disminuyen su tamaño a partir del tercer ciclo.

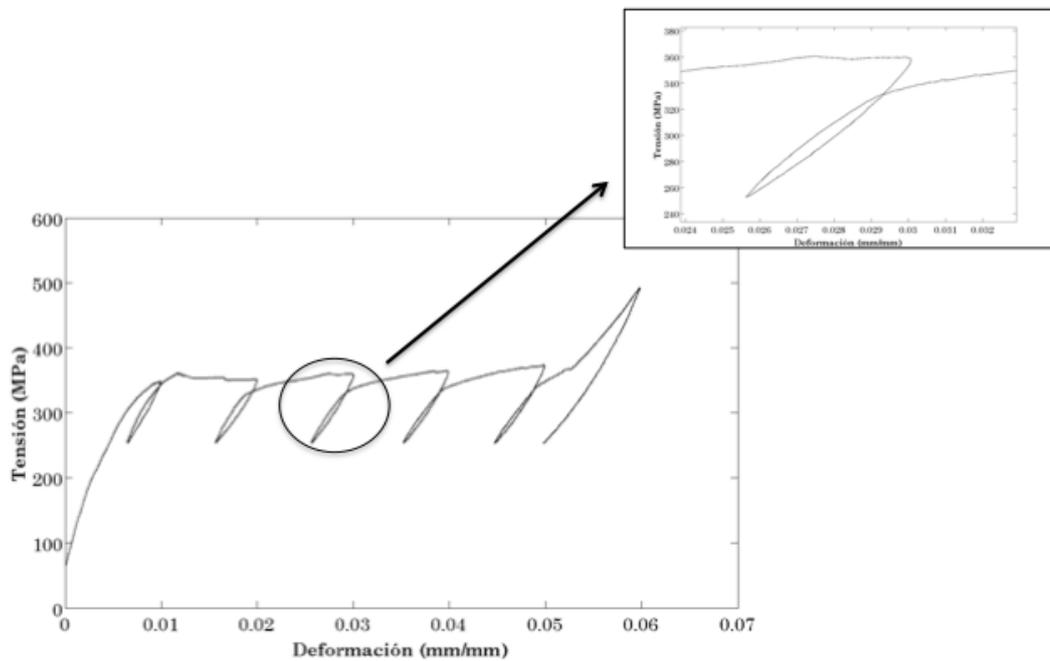


Figura 4.6. Bucles internos con una descarga hasta 250 MPa.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se puede observar como el cuarto bucle es aquel en el que se produce mayor histéresis. Tras ver estos resultados, se puede decir que la amplitud del bucle está directamente relacionada con la cantidad de martensita que se convierte en austenita en la transformación reversa que se produce al descargar el material.

Finalmente, se debe de comentar que en los casos representados en las Figuras 4.5 y 4.6, a pesar de que los bucles tiene un comportamiento elástico, se observa cierta histéresis debida a la disipación de energía por parte del material. Esto hace pensar que en la parte que considerada elástica, también se produce una ligera transformación martensítica, que se tendrá en cuenta en el modelo que se propone más adelante en este trabajo.

Por otra parte, en esta serie de curvas se ha podido observar como dependiendo del punto de la transformación en el que se encuentre, así como del nivel de tensión aplicada, la rigidez con la que se carga el material es diferente. Así mismo, en el caso de las descargas se ha podido comprobar que no sucede lo mismo, teniendo una misma rigidez de descarga para cualquier punto de la transformación martensítica.

En la figura 4.9 se muestran la rigidez correspondiente al inicio de la carga de los bucles internos del SMA. Como se puede observar en la primera parte de la imagen, los módulos varían en función de dos parámetros. Por una parte se encuentra el porcentaje

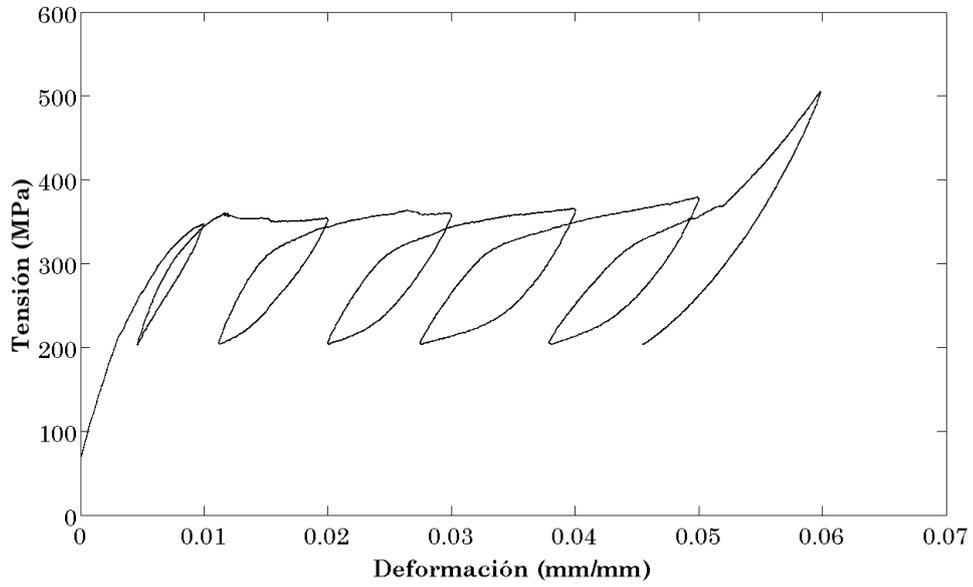


Figura 4.7. Bucles internos con una descarga hasta 200 MPa.

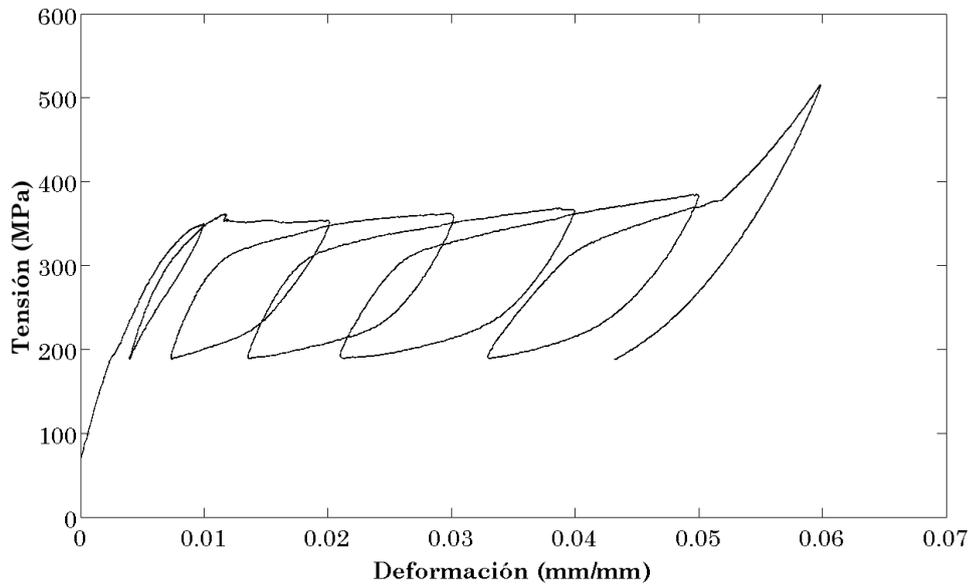


Figura 4.8. Bucles internos con una descarga hasta 190 MPa.

de martensita que contengan en el momento de ser traccionados, y por otra está la tensión de inicio de la que parte el material en ese mismo instante.

En cambio, al aumentar la cantidad de martensita, el modulo deja de depender del punto de tensión de partida, para depender únicamente de la cantidad de martensita que se ha transformado en la probeta. Además, la rigidez tiende a un valor asintótico de 25 GPa.

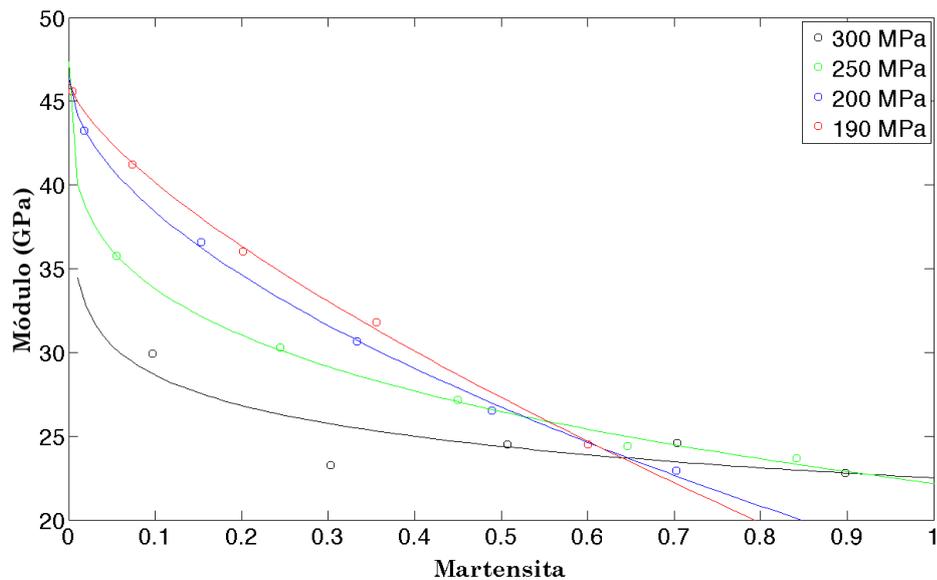


Figura 4.9. Módulos de carga dependiente de la tensión de inicio de carga.

El caso del módulo de descarga es diferente. Como se puede apreciar en la figura 4.10, el valor del módulo es independiente al nivel de martensita del que parte la descarga del material, encontrándose su valor medio entorno a los 33 GPa.

Como se puede observar de los ensayos de bucles internos realizados, el comportamiento varía en función del nivel de carga del que parte el material, así como de la cantidad de martensita que se encuentre transformada en ese instante. Estos resultados son importantes a la hora de plantear un modelo que trate de modelar el comportamiento interno del material.

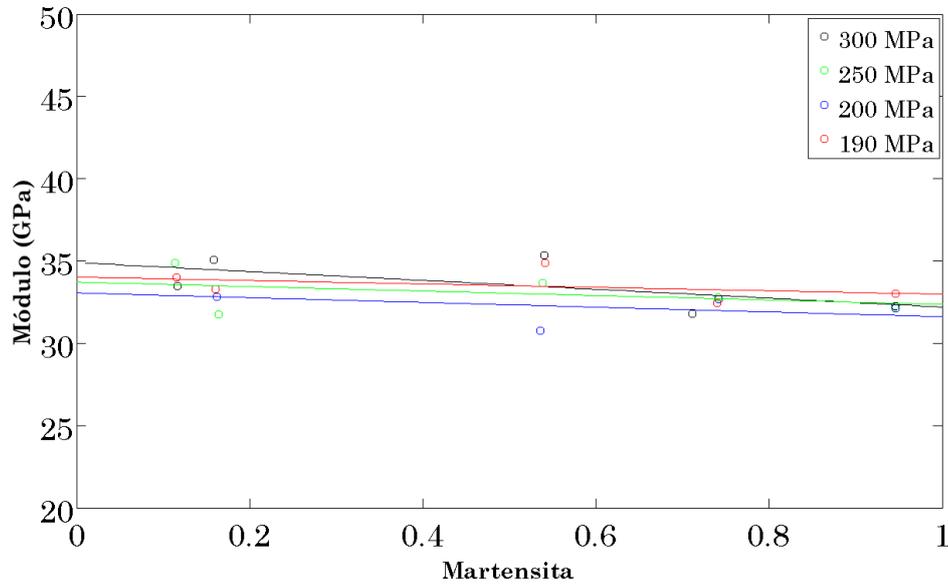


Figura 4.10. Módulos de descarga.

#### 4.4. Conclusiones

Los bucles internos de los SMAs varían dependiendo el nivel de descarga al que sean sometidos durante el proceso de caracterización. Como se ha podido observar en los diferentes resultados, cuanto mayor es la descarga, mayor es el bucle obtenido. Por otra parte los bucles más grandes se alcanzan al descargar el SMA en la zona intermedia de la transformación martensítica, lo cual hace pensar que la repartición de la transformación no es homogénea.

Por otra parte, se ha podido concluir que el comportamiento durante la carga y la descarga es diferente para aquellos casos en los que el material se encuentre en un estado intermedio de transformación. Mientras que para el caso de la descarga, el módulo de Young se puede considerar constante para cualquier valor de martensita, para el caso de la carga, este depende del punto del inicio de la carga del material, así como del nivel de la transformación.



## Capítulo 5

# Simulación de bucles con modelos tradicionales

En este capítulo se presentan dos de los modelos fenomenológicos más empleados en la simulación de SMAs mediante elementos finitos (1; 101), lo cual es debido a su simplicidad y robustez a la hora de ser implementados en código. El objetivo del presente capítulo es identificar sus limitaciones para poder determinar si los modelos fraccionarios resuelven dichos problemas.

### 5.1. Mecánica de medios continuos

Con el objetivo de realizar un análisis desde la base en la que se plantean los modelos del presente capítulo, en el presente apartado se realiza una introducción a la mecánica de medios continuos sobre la que están basados los modelos que se presentarán a continuación.

Los tres componentes básicos de la mecánica de medios continuos son la cinemática, las leyes de conservación (balance) y las ecuaciones constitutivas. La cinemática describe el movimiento de la geometría de un cuerpo continuo, sin considerar la causa del movimiento o la deformación. Las leyes de conservación indican la influencia de los efectos externos sobre el movimiento de un cuerpo continuo. Finalmente, las ecuaciones constitutivas, describen matemáticamente las características principales del comportamiento del material que sólo pueden ser entendidos y/o predichos a través de observaciones experimentales.

### 5.1.1. Cinemática de los SMAs

Asumiendo que un cuerpo de material SMA en una configuración deformada ocupa una región  $\Omega$ , en el instante  $t$ , con una superficie de contorno  $\partial\Omega$ . La posición de un punto material de SMA en la configuración deformada con respecto al mismo punto material de la configuración de referencia se indica mediante el campo vectorial de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , donde  $\mathbf{X}$  es la posición de referencia del punto material. La relación de los desplazamientos de los puntos materiales pueden ser definidos mediante el *tensor gradiente de deformación*,  $\mathbf{F}$ , definido como

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{1} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{1}$  es un tensor identidad de segundo orden y  $\nabla \mathbf{u}$  es el *gradiente del desplazamiento*. El tensor simétrico de segundo orden de *Green-Lagrange*, el cual es invariante a la rotación y desplazamiento de un sólido rígido en la configuración deformada, puede ser definido en términos del *tensor gradiente de deformación* como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}] \quad (5.2)$$

La expresión del tensor de deformación de Green-Lagrange se puede reescribir en función de  $\nabla \mathbf{u}$  de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T + ((\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}))] \quad (5.3)$$

La manera de elegir la configuración de referencia para los SMAs, es más complicada que para el caso de otros materiales más convencionales. Esto es debido a que hay dos configuraciones naturales de referencia, la fase austenítica y la martensítica libres de carga externa. Aunque depende de cada autor, generalmente se utiliza la fase austenítica como configuración de referencia y la transición de austenita a martensita se tendrá en cuenta mediante la introducción de una variable de estado interna. Cuando el tensor gradiente de deformación,  $\mathbf{F}$ , se acerca al tensor identidad  $\mathbf{1}$ , o equivalentemente para gradientes infinitesimales de desplazamiento, el termino cuadrático de la ecuación 5.3 es despreciable. Esta asunción conduce al *tensor de deformación infinitesimal* de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (5.4)$$

### 5.1.2. Leyes de Conservación (Balance)

Las leyes básicas de conservación en MMC son las siguientes:

- Conservación de la masa.
- Conservación del momento lineal.
- Conservación del momento angular.
- Conservación de la energía.

### Conservación de la Masa

El principio de conservación de la masa afirma que la masa total de un cuerpo continuo no puede cambiar en función del tiempo o la deformación. Considerando que la masa de un cuerpo de SMA se relaciona con la densidad  $\rho$ , mediante

$$M = \int_{\Omega} \rho dV \quad (5.5)$$

el principio de conservación de la masa se puede escribir de la forma

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega} \rho dV \right) = 0 \quad (5.6)$$

donde  $\frac{D}{Dt}$  es la derivada temporal material. Tras operar, se puede obtener la forma local de la ecuación de conservación de masa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.7)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del punto material.

### Conservación del Momento Lineal

El principio de conservación del momento lineal afirma que la variación en el tiempo del momento lineal de un cuerpo continuo es igual a la suma total de las fuerzas de superficie e internas que se le apliquen a este. La forma integral de la conservación del momento lineal viene definida como

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b} dV \quad (5.8)$$

donde  $\mathbf{t}$  es el vector de tracción superficial, y  $\mathbf{b}$  es la fuerza vectorial interna del cuerpo. La forma local del principio de conservación del momento lineal viene dada por

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (5.9)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy. La aceleración del punto material es  $\dot{\mathbf{v}}$  donde  $\dot{(\ )}$  indica la derivada material respecto del tiempo.

### Conservación del Momento Angular

El principio de conservación del momento angular afirma que la variación en el tiempo de momento angular de  $n$  cuerpo continuo es igual a la suma de los momentos derivados de las fueras superficiales e internas. La forma integral de la conservación del momento angular viene definida por:

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV \quad (5.10)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de un punto material. La forma local de la conservación de momento angular demuestra que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (5.11)$$

### Conservación de la Energía - Primer Principio de la Termodinámica

El principio de conservación de la energía afirma que la cantidad de cambio de la energía total respecto del tiempo de un cuerpo continuo es igual al cambio de la cantidad de trabajo mecánico externo que se realiza sobre el cuerpo, más el cambio de energía que se le impone mediante un flujo de calor ( $\mathbf{q}$ ), o focos de calor ( $r$ ).

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega} \rho u dV \right) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho r dV \quad (5.12)$$

donde  $u$  es la *energía interna específica*. La forma local de conservación de energía es

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}(\mathbf{q}) + \rho r \quad (5.13)$$

donde  $\dot{u}$  y  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  son las derivadas materiales respecto del tiempo de la energía interna específica y del tensor de deformación infinitesimal respectivamente.

### Principio de Inigualdad de la Entropía - Segundo Principio de la Termodinámica

El principio de desigualdad de la entropía afirma que la producción de entropía interna es siempre mayor o igual a cero. El segundo principio de la termodinámica puede expresarse matemáticamente como

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \text{div}(\mathbf{q}) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (5.14)$$

donde  $s$  es la *entropía específica*. La forma local de la desigualdad de Clausius-Duhem viene dada por

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (5.15)$$

Basándose en las observaciones experimentales de que el calor solo fluye espontáneamente de un punto material más caliente hacia uno menos caliente, se puede asumir que el término  $-\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T$  será siempre mayor o igual a cero. Por lo tanto, la forma fuerte del segundo principio se reduce a

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (5.16)$$

que es conocida también como la desigualdad de Clausius-Planck.

## 5.2. Modelo constitutivo de Auricchio

El modelo que se presenta a continuación, se trata de un modelo termodinámicamente admisible basado en la teoría de la plasticidad. Este modelo en concreto ha sido desarrollado por Auricchio *et al.* (58) para poder simular el comportamiento a flexión de vigas de SMA.

A continuación se describe el potencial de energía libre de Helmholtz, del cual parten las ecuaciones constitutivas del modelo que se describe de la siguiente manera:

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^{tr}, T) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 + \tau_m(T)|\varepsilon^{tr}|_2 + \frac{1}{2}h|\varepsilon^{tr}|_3^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(|\varepsilon^{tr}|_1) \quad (5.17)$$

donde la deformación  $\varepsilon$  y la temperatura  $T$  son las variables observables y la deformación de transformación  $\varepsilon^{tr}$  es la variable interna del modelo.

A pesar de que el presente modelo tiene un gran parecido con los modelos clásicos utilizados en el modelado de comportamiento plásticos, el SMA cuenta con un comportamiento bielástico, lo cual quiere decir, que a diferencia de los modelos de plasticidad, la transformación tiene un límite, y debe de preceder a otro incremento elástico producido por la martensita. Para poder satisfacer el criterio de transformación  $|\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L$ , se utiliza la siguiente función:

$$\mathcal{I}_{\varepsilon_L}(|\varepsilon^{tr}|_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\varepsilon^{tr}|_1 \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{para el resto} \end{cases} \quad (5.18)$$

Los parámetros que tienen en cuenta la relación que hay entre la temperatura y las tensiones de transformación se describen de la siguiente manera:

$$\tau_m(T) = \begin{cases} \beta(T - T^*) & \text{if } T > T^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.19)$$

donde  $\tau_m$  es una constante que multiplica a la temperatura y está relacionada con la ecuación de Clausius-Clapeyron.

A continuación, las ecuaciones constitutivas del modelo se obtienen de derivando el potencial de energía respecto de las variables observables e internas:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \quad (5.20)$$

$$X = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \tau_m(T) \frac{\partial |\varepsilon^{tr}|_2}{\partial \varepsilon^{tr}} - h |\varepsilon^{tr}|_3 \frac{\partial |\varepsilon^{tr}|_3}{\partial \varepsilon^{tr}} - \gamma \frac{\partial |\varepsilon^{tr}|_1}{\partial \varepsilon^{tr}} \quad (5.21)$$

siendo  $\sigma$  la tensión y  $X$  la fuerza termodinámica asociada a la deformación de transformación  $\varepsilon^{tr}$ .

El control de la evolución de la variable interna  $\varepsilon^{tr}$ , se realiza mediante la introducción de la función de transformación martensítica definida como

$$F(X) = |X| - R(T) \quad (5.22)$$

donde el radio  $R(T)$  controla la anchura del ciclo de histéresis.

En el presente modelo, considera un marco asociativo, por lo que la función de fluencia de la variable interna es de la forma

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\xi} \frac{\partial F}{\partial X} = \dot{\xi} \frac{X}{|X|} \quad (5.23)$$

Como se puede apreciar es un modelo muy parecido a los modelos de plasticidad más sencillos y conocidos. Esta característica hace que el modelo sea de gran interés para su uso en aplicaciones ingenieriles.

### 5.3. Modelo constitutivo de Lagoudas

Para el caso del modelo de cinética de transformación asumida, el potencial de energía libre de Gibbs propuesto por Lagoudas (1), tiene en cuenta las energías de las fases austenítica y martensítica, así como la debida a la interacción entre las fases. La deformación total se descompone en la suma de la deformación elástica y la deformación de

transformación como se muestra a continuación:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{tr} \quad (5.24)$$

La forma explícita en la que se propone la energía libre de Gibbs es la siguiente:

$$G(\boldsymbol{\sigma}, T, \varepsilon^{tr}, \xi) = -\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} [T - T_0] + c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] - s_0 T + u_0 + \frac{1}{\rho} f(\xi) \quad (5.25)$$

donde  $T_0$  es la temperatura de referencia. Los parámetros del material  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $c$ ,  $s_0$  y  $u_0$  son el tensor de flexibilidad, el tensor de expansión térmica de segundo orden, el calor específico efectivo, la entropía específica efectiva en el estado de referencia, y la energía interna específica efectiva del estado de referencia, respectivamente. La función  $f(\xi)$  es la función de endurecimiento de la transformación.

En este trabajo, se ha trabajado con la simplificación unidimensional del modelo que se ha presentado en la ecuación 5.26. Por lo tanto el modelo se puede reescribir de la siguiente manera:

$$G(\sigma, T, \varepsilon^{tr}, \xi) = -\frac{1}{2\rho} S \sigma^2 - \frac{1}{\rho} \sigma \alpha [T - T_0] + c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] - s_0 T + u_0 + \frac{1}{\rho} f(\xi) \quad (5.26)$$

Las propiedades efectivas del material,  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $c$ ,  $s_0$  y  $u_0$ , se pueden definir de la siguiente manera:

$$S(\xi) = S^A + \xi (S^M - S^A) = S^A + \xi \Delta S \quad (5.27)$$

$$\alpha(\xi) = \alpha^A + \xi (\alpha^M - \alpha^A) = \alpha^A + \xi \Delta \alpha \quad (5.28)$$

$$c(\xi) = c^A + \xi (c^M - c^A) = c^A + \xi \Delta c \quad (5.29)$$

$$s_0(\xi) = s_0^A + \xi (s_0^M - s_0^A) = s_0^A + \xi \Delta s_0 \quad (5.30)$$

$$u_0(\xi) = u_0^A + \xi (u_0^M - u_0^A) = u_0^A + \xi \Delta u_0 \quad (5.31)$$

donde los superíndices  $A$  y  $M$  representan las fases austenítica y martensítica respectivamente.

Las ecuaciones constitutivas se obtienen nuevamente derivando el potencial de energía libre de Gibbs respecto de las variables internas. A continuación se muestran las ecuaciones constitutivas que gobernarán el comportamiento del modelo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}(\xi) : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}(T - T_0) + \boldsymbol{\varepsilon}^{tr} \quad (5.32)$$

$$s = -\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} + c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0(\xi) \quad (5.33)$$

La relación entre la evolución de la deformación de transformación y la evolución de la fracción volumétrica de transformación durante las transformaciones directas y reversas se puede escribir como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\xi} \boldsymbol{\Lambda}^{tr} \quad (5.34)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}$  es el tensor de transformación, el cual determina la dirección de la transformación, y se asume que tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{tr} = \begin{cases} \Lambda_{fwd}^{tr} = H^{cur}(\bar{\sigma}) \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\bar{\sigma}} & ; \dot{\xi} < 0 \\ \Lambda_{rev}^{tr} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}}{\xi^r} & ; \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

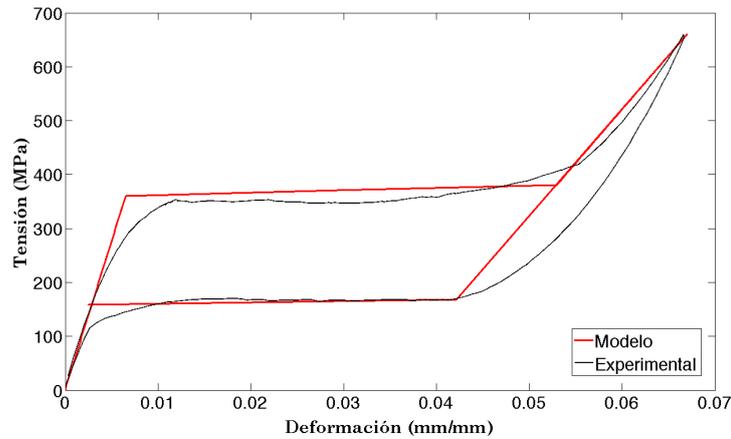
donde  $H^{cur}$  es un parámetro del material asociado a la deformación de transformación máxima.

## 5.4. Resultados

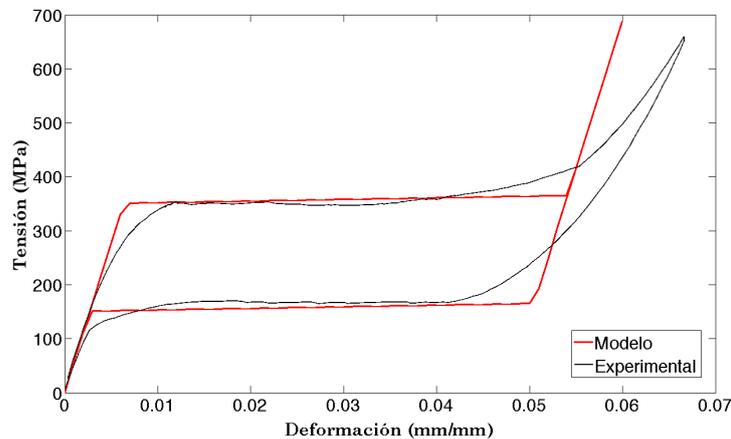
A continuación se presentarán los ajustes obtenidos de las curvas experimentales al utilizar los modelos fenomenológicos. Por una parte se encuentran los resultados de los ciclos completos de carga y descarga, y por otro el de los bucles internos. Los modelos descritos en las secciones anteriores han sido programados en el programa comercial *Matlab*.

### 5.4.1. Modelado del ciclo completo

El primer trabajo consiste en comparar los resultados de ambos modelos con el trabajo experimental obtenido. En este caso, el ajuste se realizará para una curva que ha sido completamente transformada, con su consiguiente descarga y transformación reversa. El objetivo es observar hasta qué punto reproducen los modelos el comportamiento del material observado experimentalmente. Los ajustes que se muestran en la Figura 5.1 han sido obtenidos utilizando los parámetros mostrados en el apartado de la caracterización del material.



(a)



(b)

Figura 5.1: Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Transformación completa).

El área englobada por la curva durante la transformación martensítica y posterior descarga se ha calculado que con el modelo de Lagoudas se comete un 13,2% de error, mientras que con el modelo de Auricchio se comete un 9,7%. Por otra parte, se observa como los modelos tampoco son capaces de predecir las partes elásticas del comportamiento del material. Esto es debido a que los modelos consideran lineal la parte elástica del SMA, pero como se muestra en ambas figuras el comportamiento mecánico en estos tramos es no-lineal. Por lo tanto, si se desea simular el comportamiento de un actuador de SMA para predecir su posicionamiento, se puede decir que ninguno de los dos modelos cuentan con la capacidad suficiente como para proporcionar resultados fiables.

### 5.4.2. Modelado de los bucles internos

Una vez analizado el comportamiento global de los modelos de SMA, se procede al análisis de la capacidad que tienen estos mismos modelos a la hora de representar los bucles internos que se observan en los SMAs cuando las transformaciones no son completas. A continuación se muestran la comparación entre los resultados obtenidos experimentalmente y los modelos descritos en las secciones anteriores. Se ha llevado a cabo una comparación para dos tipos de bucles, los que tienen un comportamiento prácticamente elástico y los que tienen una gran histéresis.

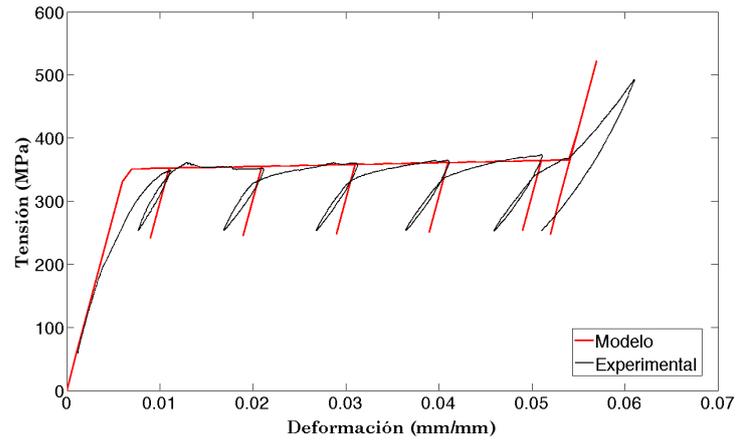
En la Figura 5.2 se observa que el modelo de Auricchio no tiene en cuenta el cambio de rigidez que se produce al aumentar la transformación martensítica del material, y por lo tanto no es capaz de acercarse al comportamiento mecánico del SMA.

Por el contrario, el modelo de Lagoudas es capaz de predecir de una manera más precisa la realidad mostrada experimentalmente. Esto se debe a que a pesar de representar una descarga elástico-lineal, tiene en cuenta el cambio de la rigidez a medida que se produce la transformación martensítica, por lo que es capaz de representar la tendencia del material de una manera adecuada.

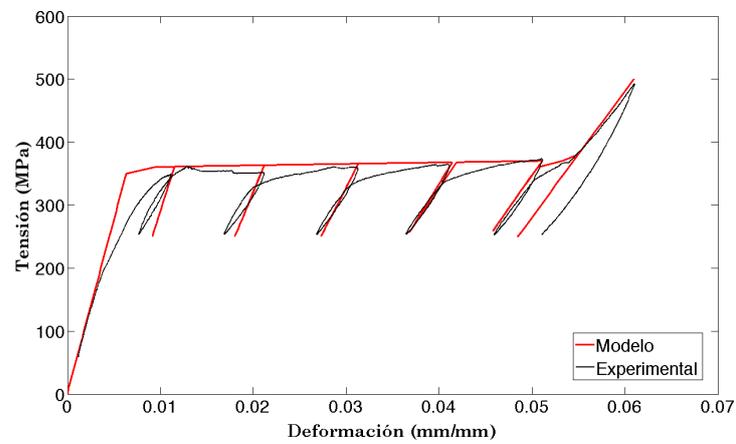
Por lo tanto, se puede decir que el comportamiento del modelo de Lagoudas es adecuado para simular el comportamiento de los pequeños bucles cuando no se precisa de una gran precisión y se desean realizar cálculos que tengan un bajo coste computacional. A pesar de no ser capaz de representar la histéresis, las diferencias entre el modelo numérico y el resultado experimental son muy pequeñas.

En cambio, para el caso en el que se desea modelar los bucles internos que cuentan con histéresis pronunciada (Figura 5.3) se observa que ninguno de los dos modelos tiene la capacidad de representar correctamente el comportamiento mecánico observado experimentalmente.

Como se observa en las Figura 5.3, ninguno de los dos modelos es capaz de acercarse al comportamiento de la parte interior de los ciclos que se producen en el SMA al no transformar por completo el material. Por lo tanto, y al analizar los resultados que se han obtenido en este apartado, se propone desarrollar modelos que tengan capacidad de predecir el comportamiento de los bucles internos.

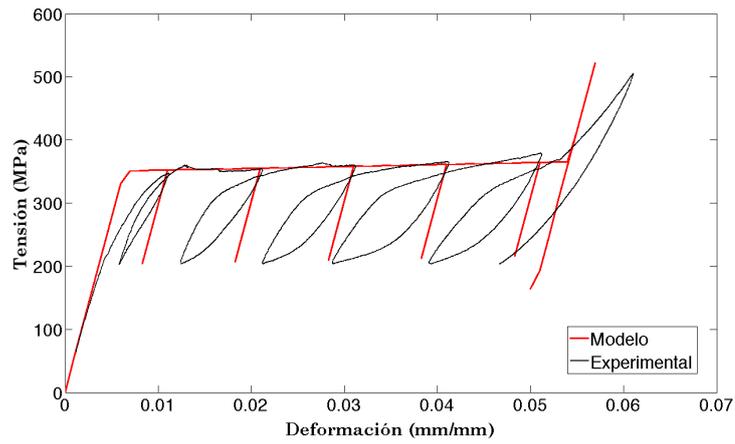


(a)

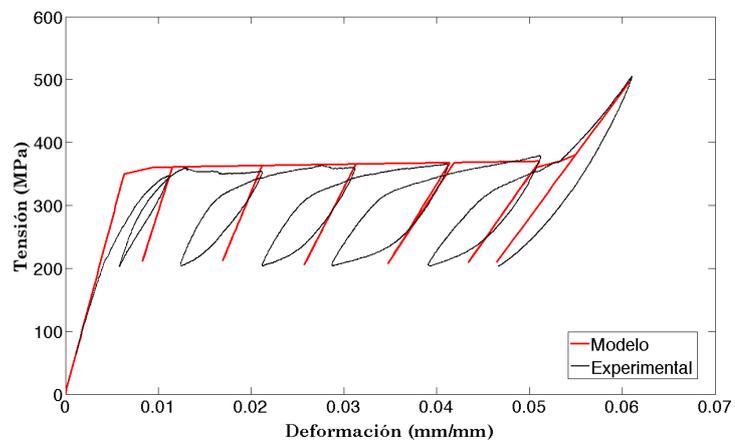


(b)

Figura 5.2: Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Descarga a 250 MPa).



(a)



(b)

Figura 5.3: Comparación entre el modelo de Lagoudas (a), el modelo de Auricchio (b) y el resultado experimental (Descarga a 200 MPa).

## 5.5. Conclusiones

Como se ha podido observar en los resultados, el ajuste de ambos modelos es muy parecido por lo que a la hora de modelar componentes que contengan SMAs se podría utilizar cualquiera de los dos con resultados parecidos.

Para los casos en los que el resultados tengan que ver con la absorción de energía del material, se ha podido ver que ambos modelos son válidos.

En cambio, para aquellos casos en los que se necesite simular el posicionamiento y actuación de una pieza, los modelos no son capaces de cumplir con los criterios, ya que el error durante la descarga es considerable.

Es por ello, que viendo que los modelos fraccionarios han sido capaces de reproducir comportamientos no lineales de manera correcta, se optará por esta solución para intentar obtener mejores resultados numéricos.



## Capítulo 6

# Modelo Fraccionario

### 6.1. Introducción

En el presente capítulo se presentan los fundamentos básicos de los operadores fraccionarios utilizados en el cálculo fraccionario. Para comenzar se presentan las definiciones de derivadas e integrales fraccionarias más utilizadas en la actualidad, y a continuación se plantean las definiciones numéricas de estas, así como sus simplificaciones. Posteriormente se desarrolla un modelo para los SMAs, que es la principal contribución del capítulo.

### 6.2. Función Gamma

En cálculo fraccionario, la función Gamma  $\Gamma(z)$  es una función fundamental definida por una integral de Euler de segundo tipo:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (6.1)$$

Esta función está definida en todo el plano complejo excepto para los valores enteros negativos y el cero. Integrando por partes la ec. 6.1 se obtiene como resultado la siguiente relación:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (6.2)$$

Obteniendo  $\Gamma(1) = 1$  en la ec.6.1, la ec. 6.2 proporciona la generalización del factorial  $z!$ :

$$\Gamma(z + 1) = z! \quad (6.3)$$

Por lo tanto, la función Gamma de Euler generaliza el operador factorial  $z!$  y extiende su uso también para valores reales e incluso complejos.

### 6.3. Definición de los operadores fraccionarios

Como se ha explicado anteriormente, el calculo fraccionario es la generalización de los operadores derivada e integral para valores de orden real, a los cuales nos referiremos en este trabajo como operadores integro-diferenciales. La notación que se utilizará en el presente trabajo es la propuesta por Harold T. Davis (102) que define el operador integro-diferencial de la función  $f(x)$  como:

$${}_aD_x^\alpha f(x) \quad (6.4)$$

donde los subindices  $a$  y  $b$  determinan respectivamente los limites inferior y superior de la integral. En general, el uso de subindices es esencial para evitar ambigüedades, y solo en caso de que no haya ninguna ambigüedad serán omitidos, como se verá más tarde en este trabajo.

El operador integro-diferencial tiene la definición de una derivada fraccionaria para valores positivos de  $\alpha$ , mientras que para valores negativos, da como resultado la definición de una integral fraccionaria. Para este caso la notación a utilizar es la siguiente:

$${}_aI_x^\alpha f(x) \quad (6.5)$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente relación:

$${}_aD_x^{-\alpha} f(x) = {}_aI_x^\alpha f(x) \quad (6.6)$$

Los operadores fraccionarios cumplen las siguientes propiedades:

**Propiedad 1.** Si  $f(x)$  es una función analítica de la variable real o compleja  $z$ , la derivada  ${}_aD_z^\alpha f(z)$  es una función analítica de  $\alpha$  y  $z$ .

**Propiedad 2.** La derivada fraccionaria  ${}_aD_z^\alpha f(z)$  debe de proporcionar el mismo resultado que una derivada ordinaria para valores de  $\alpha$  enteros positivos y lo mismo para el caso de integrales de orden  $n$  con valores de  $\alpha$  enteros negativos.

**Propiedad 3.** Si la derivada o integral es de orden cero, la función se mantiene igual:

$${}_aD_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (6.7)$$

**Propiedad 4.** *Los operadores fraccionarios son lineales:*

$${}_a D_x^\alpha \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^N a_i {}_a D_x^\alpha f_i(x) \quad (6.8)$$

**Propiedad 5.** *La regla de composición de integración para valores arbitrarios es:*

$${}_a I_x^\beta ({}_a I_x^\alpha f(x)) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x) = {}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^\beta f(x)) \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (6.9)$$

o alternativamente,

$${}_a D_x^{-\beta} ({}_a D_x^{-\alpha} f(x)) = {}_a D_x^{-\alpha-\beta} f(x) = {}_a D_x^{-\alpha} ({}_a D_x^{-\beta} f(x)) \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (6.10)$$

**Propiedad 6.** *La regla de composición para derivadas e integrales de orden arbitrario es:*

$${}_a D_x^\beta ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^{\beta-\alpha} f(x) \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (6.11)$$

Por lo tanto, si  $\beta = \alpha$ , se cumple:

$${}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^\alpha f(x)) = f(x), \quad {}_a I_x^\alpha ({}_a D_x^\alpha f(x)) \neq f(x) \quad \alpha \geq 0 \quad (6.12)$$

**Propiedad 7.** *La regla de composición para la derivada de valores arbitrarios no se mantiene generalmente, pero para el caso de derivadas híbridas con  $n$  siendo un valor entero positivo y  $\alpha$  un valor real, se mantiene la siguiente propiedad:*

$${}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^n f(x)) = {}_a D_x^{n+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha-n} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \quad \alpha, n \geq 0 \quad (6.13)$$

$${}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^n f(x)) = {}_a D_x^{n+\alpha} f(x) \quad \alpha, n \geq 0 \quad (6.14)$$

### 6.3.1. Integro-derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov

Los trabajos de Grünwald (74) y Letnikov (72), llevados a cabo de manera independiente, daban con la definición de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. Esta definición se alcanza tras generalizar la expresión de derivadas de orden entero (Ecuación 6.15), como se aprecia a continuación:

$$D^1 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (6.15)$$

la segunda como

$$D^2 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (6.16)$$

la tercera como

$$D^3 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{\Delta t^3} \quad (6.17)$$

y así sucesivamente, por lo que la derivada de orden  $n$  satisface

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( (\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right) \quad (6.18)$$

donde

$$N = \frac{t}{\Delta t} \quad (6.19)$$

y se emplea el binomial de Newton

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (6.20)$$

Si se aplica la función gamma considerando que

$$-1^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (6.21)$$

la ecuación 6.18 será transformada en

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( (\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} f(t - j\Delta t) \right) \quad (6.22)$$

Si en esta ecuación se sustituye el orden  $n$  por cualquier orden real  $\alpha$ , la definición para derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov será

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(t - j\Delta t) \right) \quad (6.23)$$

De la ecuación 6.23 se puede observar que para calcular la derivada fraccionaria, se debe de tener en cuenta todo el histórico de la función  $f(t)$ , lo cual refleja el carácter no local de los operadores fraccionarios, al contrario del comportamiento local que tiene los operadores de ordenes enteros.

### 6.3.2. Integro-derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

La definición de la integro-derivada de Riemann-Liouville se basa en la integral repetida de la fórmula de Cauchy:

$$\frac{d^{-1}f}{dt^{-1}} = \int_0^t f(y)dy = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t [t-y]^n f(y)dy \quad (6.24)$$

al integrarla (n-1) veces se logra la fórmula de Cauchy para integración repetida:

$$\frac{d^{-n}f}{dt^{-n}} = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [t-y]^n f(y)dy \quad (6.25)$$

La definición de Riemman-Liouville se utiliza generalmente para órdenes de integración de orden real. Por lo tanto, si se sustituye  $n$  por la derivada de orden real  $\alpha$ , para  $\alpha < 0$  y siendo cero el límite inferior de la integral, la ecuación 6.25 queda como

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-y)^{-\alpha-1} f(y)dy \quad (6.26)$$

donde  $\Gamma(z)$  es la función gamma de un argumento real  $z$ , definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy \quad (6.27)$$

Esta función representa la generalización de la función factorial, satisfaciendo

$$z! = \Gamma(z+1) \quad (6.28)$$

la cual coincide con la definición clásica de factorial si  $z$  es un número entero. Por ejemplo, para el caso en el que  $-1 < \alpha < 0$ , la aplicación de la ecuación 6.26 para la función  $t^q$  es

$$D^\alpha t^q = \frac{d^\alpha t^q}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-\alpha)} t^{q-\alpha} \quad (6.29)$$

## 6.4. Métodos numéricos para operadores fraccionarios integro-diferenciales

En esta sección, se analiza el esquema numérico que se ha utilizado en el presente trabajo para la evaluación de operadores integro-diferenciales. Los algoritmos de tipo G se basan en la definición de la derivada de Grünwald-Letnikov. A continuación se describe el algoritmo utilizado para este caso, que se trata del algoritmo G1.

**Algoritmos G1**

Una de las definiciones más simples es en la que el coeficiente de Grünwald  $A_{j+1}$  se define como (74):

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} \quad (6.30)$$

Teniendo en cuenta que  $\Delta t = (t - a)/N$ , la Ecuación 6.30 se convierte en:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{t - a}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f \left( t - j \frac{t - a}{N} \right) \quad (6.31)$$

Si se aproxima la suma infinita de términos de la Ecuación 6.31 por una finita, el algoritmo G1 se convierte en:

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \left( \frac{t - a}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f \left( t - j \frac{t - a}{N} \right) \quad (6.32)$$

Con el objetivo de evitar la evaluación de la función Gamma de Euler en cada iteración se obtiene el próxima ecuación recursiva:

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = \frac{(j - \alpha - 1)\Gamma(j - \alpha - 1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j)} = \frac{j - 1 - \alpha}{j} A_j \quad (6.33)$$

$$|A_{j+1}| < |A_j| \quad (6.34)$$

donde con el objetivo de evitar problemas durante el proceso recursivo, se define  $A_1 = 1$ . Por otra parte la Ecuación 6.34 implica que los términos  $A_{j+1}$  decrecen a medida que evoluciona  $j$ . Cuando  $t \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta la definición de la función Gamma de Euler, el coeficiente de Grünwald evoluciona de la siguiente manera:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_{j+1} = 0 \quad (6.35)$$

Lo que muestra la Ecuación 6.35, es que los puntos más lejanos al punto donde se está calculando la derivada, tienen una menor influencia en el valor de las derivadas fraccionarias. Por lo tanto, este hecho justifica que no se utilicen un número infinito de puntos de manera que finalmente se obtiene la siguiente expresión del operador numérico de la derivada fraccionaria:

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \left( \frac{t}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{nt} A_{j+1} f \left( t - j \frac{t}{N} \right) \quad (6.36)$$

Los algoritmos G1 constituyen un vía simple para poder reducir el coste computacional y poder evaluar ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante códigos de elementos finitos (89). En cambio, es posible que la solución obtenida no sea la adecuada si no se escoge un número suficiente de términos.

### 6.4.1. Algoritmos R-L

Mientras que los algoritmos desarrollados en la sección anterior están basados en la definición de las derivadas e integrales de Grünwald-Letnikov, los algoritmos R-L se basan en la definición de Riemann-Liouville. Los algoritmos R se utilizan para calcular integrales fraccionarias, mientras que los algoritmos L son para las derivadas.

#### Algoritmos R

Utilizando la Ecuación 6.26 que se ha definido anteriormente y transformandola en un sumatorio se obtiene la siguiente ecuación:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\frac{t}{N}}^{(j+1)\frac{t}{N}} \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{j\frac{t}{N}}^{(j+1)\frac{t}{N}} \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau \quad (6.37)$$

El algoritmo R1 se obtiene mediante la siguiente aproximación de la integral definida en la Ecuación 6.37:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\frac{t}{N}}^{(j+1)\frac{t}{N}} \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau \approx \frac{f(t-j\frac{t}{N}) + f(t-(j+1)\frac{t}{N})}{2} \int_{j\frac{t}{N}}^{(j+1)\frac{t}{N}} \tau^{\alpha-1} d\tau \quad (6.38)$$

Tras realizar la integral y realizar algunas manipulaciones, se obtiene el algoritmo R1 partiendo de la Ecuación 6.38 para valores de  $\alpha > 0$ :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{(t/N)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(t-j\frac{t}{N}) + f(t-(j+1)\frac{t}{N})}{2} [(j+1)^\alpha - j^\alpha] \quad (6.39)$$

Existen también otro tipo de aproximaciones como puede ser el algoritmo R2 (72), el cual no ha sido utilizado en este trabajo, que es más complejo de implementar pero más preciso.

### Algoritmos L

Como se ha comentado, los algoritmos R permiten la evaluación de integrales fraccionarias. Para el caso de las derivadas fraccionarias se obtiene la siguiente ecuación:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{-\alpha} \left( \frac{df(t-\tau)}{d\tau} \right) d\tau \quad (6.40)$$

que se debe de convertir en el siguiente sumatorio:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j \frac{t}{N}}^{(j+1) \frac{t}{N}} \tau^{-\alpha} \left( \frac{df(t-\tau)}{d\tau} \right) d\tau \quad (6.41)$$

Mediante la utilización de la discretización recursiva se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{j \frac{t}{N}}^{(j+1) \frac{t}{N}} \tau^{-\alpha} \left( \frac{df(t-\tau)}{d\tau} \right) d\tau \approx \frac{f(t - j \frac{t}{N}) - f(t - (j+1) \frac{t}{N})}{t/N} \int_{j \frac{t}{N}}^{(j+1) \frac{t}{N}} \tau^{-\alpha} d\tau \quad (6.42)$$

que tras realizar la integral y ciertas manipulaciones, finalmente se obtiene el algoritmo final L para derivadas fraccionarias de orden  $0 \leq \alpha \leq 1$ :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{(t/N)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{1-\alpha}{N^\alpha f(0)} + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ f(t - j \frac{t}{N}) - f(t - (j+1) \frac{t}{N}) \right] \left[ (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha} \right] \right] \quad (6.43)$$

Para valores de  $\alpha$  mayores de la derivada fraccionaria, se deben de desarrollar algoritmos de una manera similar a la indicada en el presente apartado. En el presente trabajo, el rango de los valores e encuentra en  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

## 6.5. Selección del método numérico a utilizar

De entre los diferentes métodos numéricos presentados, el algoritmo G1 y el algoritmo R han sido programados y estudiados utilizando el programa comercial *Matlab*. Este trabajo se ha llevado a cabo con la intención de definir cual de los dos modelos cuenta con un coste computacional menor y de esta manera utilizarlo en el desarrollo del modelo fraccionario que se presenta con la intención de simular los bucles internos del material. El tiempo de cálculo del algoritmo G1 es un 27% más rápido que el algoritmo R, por lo que será utilizado en la evaluación de la derivada fraccionaria del modelo.

## 6.6. Modelo

Como se ha podido observar en el capítulo anterior, la capacidad que tienen los modelos clásicos para representar el comportamiento interno del SMA no es óptima. Por ello, visto que los modelos basados en operadores fraccionarios han sido utilizados en muchos materiales que cuentan con comportamientos no lineales, se ha optado por esta técnica para plantear un modelo que represente el comportamiento no lineal de los bucles internos.

En este caso, se ha optado por un modelo de Maxwell generalizado como el que se muestra en la Figura 6.1 (103). La selección de este modelo se debe al deseo de representar el comportamiento de manera sencilla. A continuación se muestra la representación gráfica del modelo utilizado para este caso:

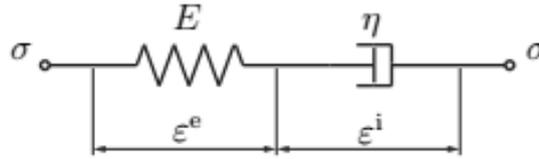


Figura 6.1. Modelo de Maxwell.

Este modelo se plantea en base a lo observado en los resultados experimentales, en los cuales se ve como el SMA, además de disipar energía durante la transformación martensítica, también disipa una parte de energía en la parte elástica que precede al comienzo de la transformación. Esto hace suponer que durante la carga elástica del bucle se produce transformación martensítica. Por ello, en el presente modelo se plantea la hipótesis de que la deformación total del material está compuesta por una deformación elástica y una deformación de transformación en todo momento. La repartición de la deformación total es de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{tr} \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{tr} \quad (6.44)$$

La ecuación que relaciona la tensión y la deformación elástica del material se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} \rightarrow \dot{\sigma} = E_1\dot{\varepsilon}_{el} \rightarrow \dot{\varepsilon}_{el} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (6.45)$$

mientras que para el caso que relaciona la tensión con la deformación de transformación

del material se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sigma = E_2 \dot{\varepsilon}_{tr} \rightarrow \dot{\varepsilon}_{tr} = \frac{\sigma}{E_2} \quad (6.46)$$

Una vez despejados los incrementos de las deformaciones elástica y de transformación se introducen en la Ecuación 6.44 se manera que se logra la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2} \quad (6.47)$$

y generalizando esta se obtiene la ecuación diferencial fraccionaria que se debe de resolver para obtener la respuesta tensión deformación del sistema:

$$\frac{1}{E_1} \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} + \frac{\sigma}{E_2} = \frac{d^\beta \varepsilon}{dt^\beta} \quad (6.48)$$

Sustituyendo los operadores fraccionarios por la expresión numérica de Grünwald-Letnikov se obtiene la expresión que se muestra a continuación.

$$\frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=-1}^n w_j \sigma_j + \frac{\sigma_n}{E_2} = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=-1}^n w_j \varepsilon_j \quad (6.49)$$

El valor de la tensión que se desea resolver es el  $\sigma_n$ , por lo que despejamos ese valor de la siguiente manera,

$$\frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=-1}^{n-1} w_j \sigma_j + \left( \frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_n = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=-1}^n w_j \varepsilon_j \quad (6.50)$$

$$\left( \frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_n = \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=-1}^n w_j \varepsilon_j - \frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=-1}^{n-1} w_j \sigma_j \quad (6.51)$$

Finalmente, el valor de  $\sigma$  para cada incremento de tiempo tiene la forma:

$$\sigma_n = \frac{1}{\left( \frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} + \frac{1}{E_2} \right)} \left[ \frac{1}{(\Delta t)^\beta} \sum_{j=-1}^n w_j \varepsilon_j - \frac{1}{E_1} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=-1}^{n-1} w_j \sigma_j \right] \quad (6.52)$$

Tras resolver la ecuación diferencial presentada se obtienen los resultados que se muestran en la sección de resultados que se presenta a continuación.

## 6.7. Resultados

En esta sección se presentan los resultados del ajuste obtenido por el modelo fraccionario propuesto. Los resultados se dividen en dos partes, por un lado se ha analizado el comportamiento del modelo para una transformación completa del material y por otro los bucles que se producen cuando se realizan transformaciones parciales.

### 6.7.1. Modelado de la parte exterior del SMA

Como se ha podido observar experimentalmente, las cargas y las descargas referidas a las partes elásticas austenítica y martensítica no se comportan de manera lineal. Al representar la parte elástica mediante un muelle y un amortiguador, es posible reproducir la no-linealidad y la disipación de energía asociada al proceso elástico. Para ajustar los parámetros del modelo se ha utilizado la función *fmincon* del programa comercial *Matlab*. A continuación se presentan los parámetros del ajuste obtenidos:

Tabla 6.1

Parámetros del modelo fraccionario.

$E_1$	$E_2$	$\alpha$	$\beta$
44,37GPa	27,97GPa	0,987	0,996

El modelado de la parte elástica ha sido combinado con modelo de Lagoudas. Gracias a ello se ha obtenido como resultado el comportamiento que se observa en la Figura 6.2. En la imagen se sobreponen el modelo propuesto y los datos experimentales.

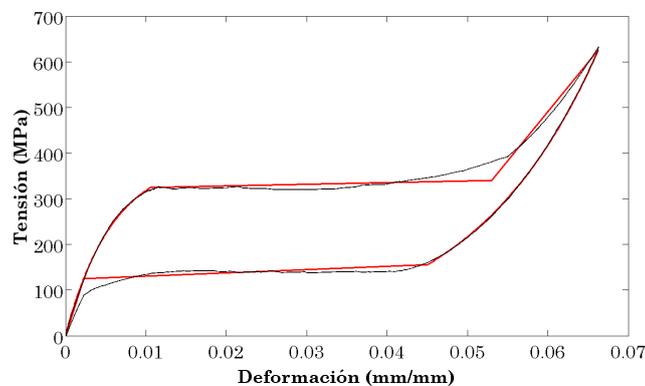


Figura 6.2. Comparación entre el resultado experimental y el modelo fraccionario propuesto.

Se puede decir que la utilización del modelo fraccionario a la hora de reproducir la carga y la descarga de las partes austenítica y martensítica es adecuado para este caso. El modelo reproduce de manera precisa ambos procesos. El ajuste de la transformación no es perfecto, esto es debido al comportamiento lineal definido en el modelo de Lagoudas (1), en el cual se propone una transformación martensítica lineal del material. El error máximo de la diferencia entre el modelo fraccionario y el comportamiento elástico del material es de menos de un 2 %.

### 6.7.2. Modelado de los bucles internos del SMA

Una vez analizada la capacidad del modelo para representar el comportamiento externo del SMA, se presentan los resultados referidos al modelado de los bucles internos del SMA, que a su vez es el objetivo principal del modelo. Como se ha observado en el apartado anterior, el modelo es capaz de representar el comportamiento no-lineal de manera precisa, lo cual nos da una pista de la habilidad que puede tener a la hora de reproducir los bucles internos.

Como en el caso anterior, el ajuste de los parámetros del modelo se ha realiza mediante la función *fmincon* del programa comercial *Matlab*. El resultado alcanzado por el modelo propuesto es capaz de reproducir de manera muy realista el comportamiento observado experimentalmente. Los errores máximos obtenidos se encuentran nuevamente por debajo del 2 % en cada uno de los bucles, lo cual indica la gran capacidad que tienen este tipo de modelos fraccionarios a la hora de reproducir el comportamiento de un material como el SMA.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para los diferentes bucles analizados. En la Figuras 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6, se presentan los ajuste realizados por el modelo fraccionario para diferentes tensiones de descarga. Como ya se ha explicado en el capítulo de la caracterización, son 5 los bucles internos que se han caracterizado, separados entre sí al 1 % de deformación. Cada una de las figuras presenta una tensión de descarga diferente, siendo estas de 300, 250, 200 y 190 MPa respectivamente.

Los bucles que alcanzan un tensión de descarga de 300 MPa se pueden observar en la Figura 6.3. Como se puede ver en la imagen, el modelo es capaz de reproducir de manera precisa el comportamiento para este nivel de descarga. Se observa como a pesar de que las descargas de los bucles sean prácticamente lineales, el modelo fraccionario presentado tiene la capacidad de ajustarse al comportamiento experimental. Por otra parte y como era de prever, también es capaz de reproducir la carga no lineal que se da durante la carga que se produce en los bucles.

La capacidad del modelo propuesto para representar el comportamiento obtenido

experimentalmente es elevada. Como se puede observar en las figuras, el modelo es capaz de representar con gran precisión el comportamiento de los bucles internos del material.

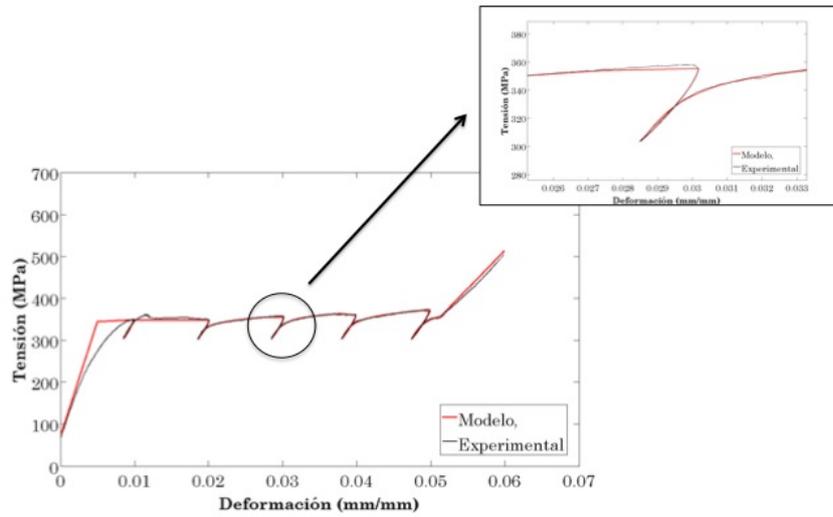


Figura 6.3. Modelado de los bucles para una descarga hasta 300 MPa.

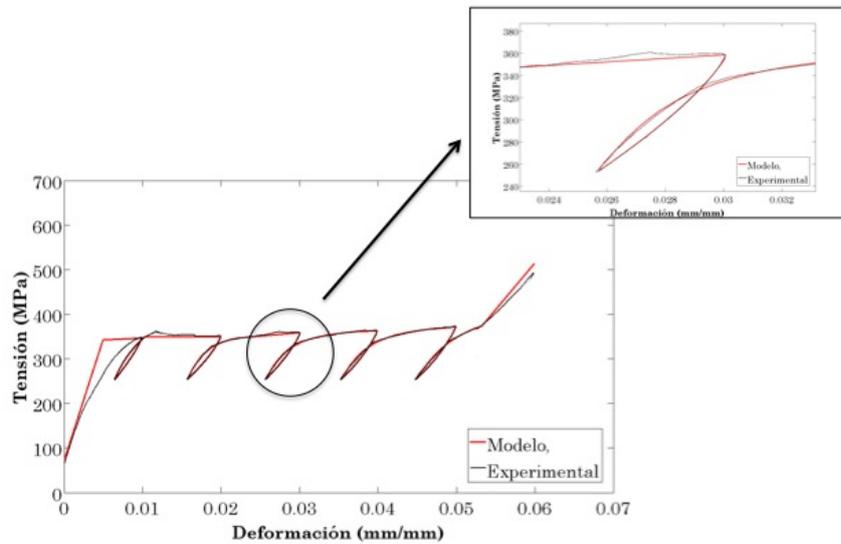


Figura 6.4. Modelado de los bucles para una descarga hasta 250 MPa.

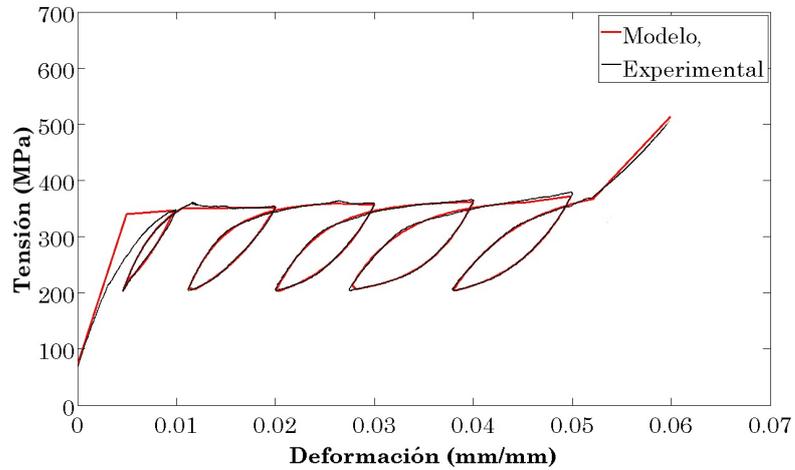


Figura 6.5. Modelado de los bucles para una descarga hasta 200 MPa.

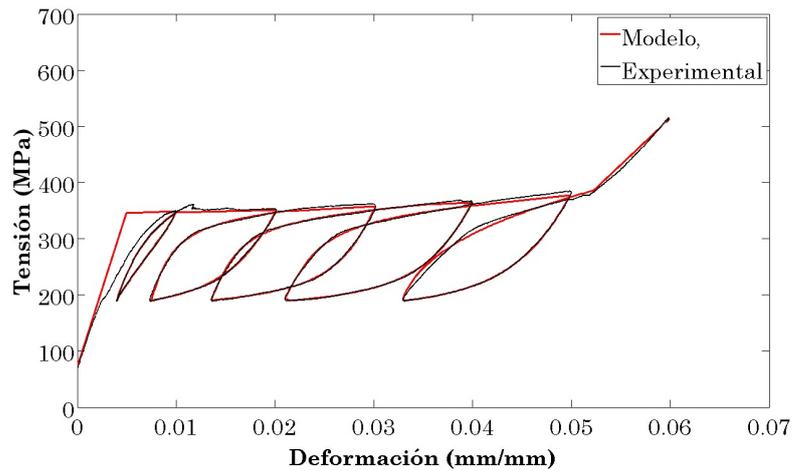


Figura 6.6. Modelado de los bucles para una descarga hasta 190 MPa.

### 6.7.3. Error de aproximación del modelo

Para determinar los errores máximo y medio que comete el modelo fraccionario a la hora de reproducir los bucles se han definido los estimadores que se muestran a continuación.

$$error_{max} = \max\left(\frac{\sigma_c - \sigma_m}{\sigma_c}\right) \quad (6.53)$$

siendo  $\sigma_c$  y  $\sigma_m$  las tensiones experimental y del modelo respectivamente de un intervalo definido. Para el caso del error medio se propone la siguiente expresión:

$$error_{med} = \frac{1}{n} \left( \sum_1^n \frac{\sigma_c - \sigma_m}{\sigma_c} \right) \quad (6.54)$$

siendo  $n$  el número de puntos del intervalo especificado.

A continuación, en las Tablas 6.2 y 6.3 se muestran los errores máximos y relativos del modelo fraccionario que reproduce los bucles internos del SMA:

Tabla 6.2

Error máximo de aproximación del modelo en los bucles.

	Bucle 1	Bucle 2	Bucle 3	Bucle 4	Bucle 5
300 MPa	3.71±0.32 %	3.10±0.12 %	2.75±0.22 %	3.83±0.42 %	2.81±0.26 %
250 MPa	3.91±0.72 %	4.03±1.02 %	3.99±0.53 %	4.71±1.30 %	4.11±0.83 %
200 MPa	2.74±0.23 %	2.21±0.79 %	3.01±0.44 %	2.61±0.32 %	2.87±0.62 %
190 MPa	3.32±0.42 %	3.11±0.12 %	3.01±0.71 %	3.09±0.17 %	3.41±0.21 %

Tabla 6.3: Error medio de aproximación del modelo en los bucles.

	Bucle 1	Bucle 2	Bucle 3	Bucle 4	Bucle 5
300 MPa	0.97±0.15 %	0.81±0.32 %	0.86±0.24 %	0.81±0.12 %	0.74±0.32 %
250 MPa	0.86±0.12 %	0.87±0.43 %	0.81±0.12 %	0.78±0.20 %	0.67±0.25 %
200 MPa	0.98±0.34 %	0.77±0.12 %	0.71±0.42 %	0.85±0.23 %	0.71±0.33 %
190 MPa	0.98±0.22 %	0.92±0.32 %	0.88±0.10 %	0.76±0.37 %	0.88±0.13 %

Como se ha podido observar en ambas tablas, los valores tanto del error máximo como del error promedio son bajos. Para el caso del error máximo estos valores se encuentran por debajo del 5%, mientras que para el caso del valor medio este valor desciende por debajo de 1%.

Estos resultados indican que el modelo fraccionario propuesto en este capítulo tiene una gran capacidad a la hora de reproducir el comportamiento tanto externo como interno de los SMAs. En este caso, se ha utilizado un modelo híbrido, utilizando por una parte el citado modelo fraccionario en conjunto con el modelo de Lagoudas. En un futuro sería interesante desarrollar un único modelo basado únicamente en los operadores fraccionarios.

#### 6.7.4. Constantes del modelo

Finalmente en la Figura que van de la 6.7, se presentan los parámetros que se han obtenido para los bucles de los diferentes niveles de descarga.

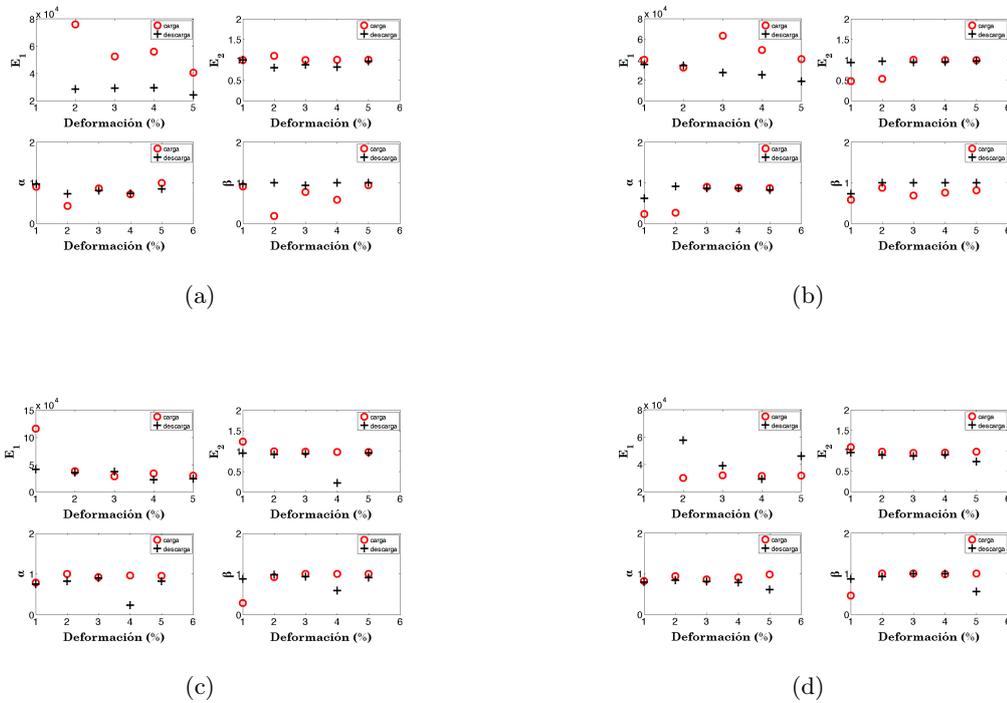


Figura 6.7: Valores de las constantes obtenidas mediante los ajustes para diferentes bucles.

En estas figuras se puede ver como para las constantes  $E_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  los valores se mantienen constantes en los diferentes bucles analizados. El parámetro  $E_1$  por el contrario, varía un poco más que los otros casos. Estas variaciones pueden ser debidas a la temperatura que se induce durante la transformación martensítica y que dependiendo del nivel de descarga puede ser diferente. Por ello, con el objetivo de determinar la tendencia de las constantes de manera más ajustada, se plantea en un futuro, realizar una caracterización del material controlando la temperatura.

## 6.8. Conclusiones

En el presente capítulo se ha podido observar como los operadores fraccionarios cuentan con una gran capacidad a la hora de reproducir diferentes comportamientos experimentales de los SMAs. Se puede decir que la utilización de modelos basados en operadores fraccionarios permite modelar de manera más adecuada el comportamiento mecánico observado experimentalmente, obteniendo errores que se encuentran por debajo del 5 % en lo referido al error máximo, y al 1 % en lo que se refiere al error medio.

La utilización de un modelo de Maxwell generalizado mediante derivadas fraccionarias permite reproducir los bucles que se dan en las transformaciones incompletas utilizando para ello únicamente 4 parámetros. En cambio el tiempo de cálculo es elevado en comparación un modelo de Maxwell convencional, lo cual es un inconveniente cuando se desea introducir en un código de elementos finitos.



## Capítulo 7

# Reducción del coste computacional de derivadas fraccionarias utilizando la POD

En el capítulo anterior se ha analizado la capacidad que tienen los modelos basados en operadores fraccionarios para poder modelar las cargas y descargas de los bucles internos de los SMAs. Se ha podido concluir que su correcta utilización permite una mejor reproducción de la alcanzada por otro tipo de modelos hasta este momento. En cambio, estos modelos de material desarrollados, deben de poder implementarse en un código de elementos finitos para que puedan ser utilizados en la resolución de problemas de ingeniería (104) que requieran de este tipo de materiales. Es por esta razón, que el coste computacional es un requisito indispensable, y debe de ser lo menor posible. Por ello, y como se podrá observar más adelante en el presente capítulo, el principal problema con el que cuentan los modelos fraccionarios es el de tener un coste computacional elevado, debido a que es necesario evaluar la función que se está resolviendo en todos los incrementos de tiempo previos.

### 7.1. Definición de la problemática

Las derivadas fraccionarias han sido satisfactoriamente utilizadas a la hora de modelar el comportamiento de los bucles internos del SMA. Dos de los ejemplos más sencillos son la utilización de los modelos de Maxwell o Kelvin-Voigt a la hora de representar ciertos procesos de relajación y fluencia. El ajuste de estos dos sencillos modelos únicamente es buena para casos sencillos. Para casos más complicados, se utilizan complejos sistemas de muelles y amortiguadores con el objetivo de representar de una manera más

cercana a la realidad ciertos tipos de materiales. El problema es que a mayor número de elementos reológicos, mayor cantidad de constantes a identificar, lo cual hace que la caracterización se convierta en una tarea complicada. Para poder solucionar este problema, Koeller (103) demostró que es posible representar diferentes comportamientos complejos utilizando operadores fraccionarios que denominó *spring-pot*, como se observa en las siguientes ecuaciones:

$$\sigma = f(\epsilon, t) \quad (7.1)$$

$$\sigma(t) = E \frac{d^0 \epsilon(t)}{dt^0} = E \epsilon(t) \quad (7.2)$$

$$\sigma(t) = c \frac{d\epsilon(t)}{dt} = c \dot{\epsilon}(t). \quad (7.3)$$

$$\sigma(t) = k \frac{d^\alpha \epsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (7.4)$$

Al variar el valor de  $\alpha$ , se varía el comportamiento físico del modelo. Esto se puede observar en la Fig. 7.1, donde se las diferentes  $\alpha$  componen una superficie que comienza en  $\alpha = 0$ , que representa el comportamiento de un muelle elástico, hasta  $\alpha = 1$  que reproduce el comportamiento de un amortiguador convencional.

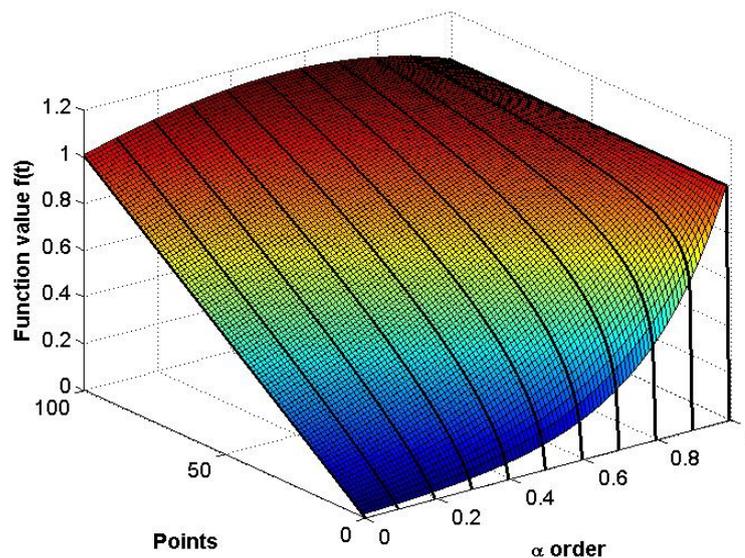


Figura 7.1: Derivada fraccionaria de la función  $t$ .

## 7.2. Discretización del operador fraccionario

Cuando los operadores fraccionarios son evaluados numéricamente, la exactitud de la solución que se obtiene depende del número de puntos que se utiliza a la hora de realizar el cálculo. Debido a que se desea observar únicamente el error que se produce debido a la utilización de la POD, en este apartado se realizará un estudio comparativo en el que se analizará cuántos puntos hacen falta mínimamente para que la solución numérica y la solución analítica coincidan de manera que el error introducido en la POD sea el mínimo posible.

La discretización del operador fraccionario se realiza utilizando la definición numérica de Grünwald-Letnikov (GL) que se ha definido anteriormente y que se vuelve a mostrar a continuación en la Ecuación 7.5.

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n_t} A_{j+1} f\left(t - j\frac{t}{N}\right) \quad (7.5)$$

En la Figura 7.2 se observa la representación gráfica de la Ecuación 7.5 para el valor de  $m = 5$ .

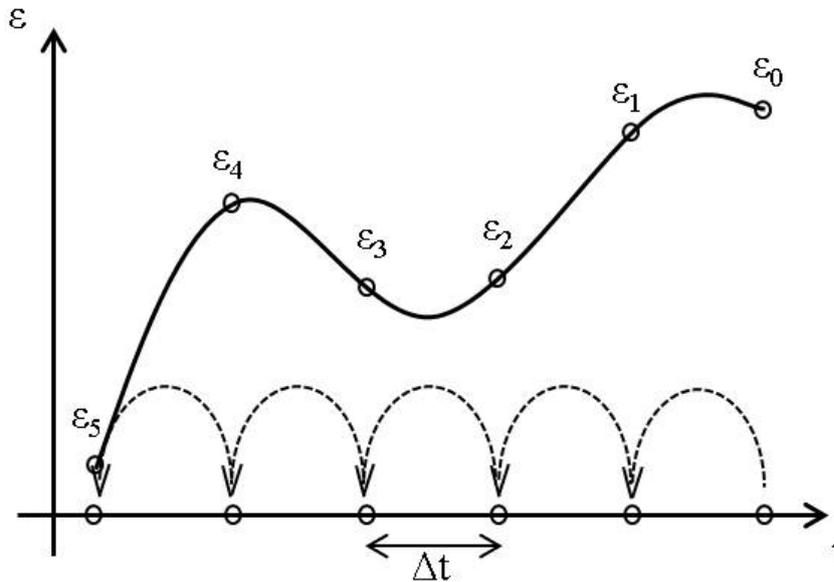


Figura 7.2: Esquema de la evaluación numérica de un operador fraccionario en un instante de tiempo  $t$ .

Para poder implementar el método de la POD, es necesario calcular el resultado numérico de la derivada fraccionaria correspondiente para diferentes valores de  $\alpha$  que se

encuentran entre 0 y 1. Con el objetivo de minimizar el valor del error inducido por la evaluación numérica de la derivada fraccionaria, se comparan las soluciones numérica 7.5 y analítica (Eq. 7.6).

$$D^\alpha e^q(t) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-\alpha)} e^{q-\alpha}(t). \quad (7.6)$$

En la Figura 7.3, se muestra el error relativo que se obtiene de la diferencia entre las soluciones obtenidas por los resultados analítico y numérico. De acuerdo a los resultados que se han obtenido, se puede decir el error relativo entre ambas respuestas, alcanza un valor asintótico cuando la definición numérica G1 (Ec. 7.5) se discretiza utilizando 100 incrementos. Por lo tanto, el número de puntos que se utilizará para evaluar la derivada fraccionaria, y que también se introducirá en la POD sera de  $M = 100$ .

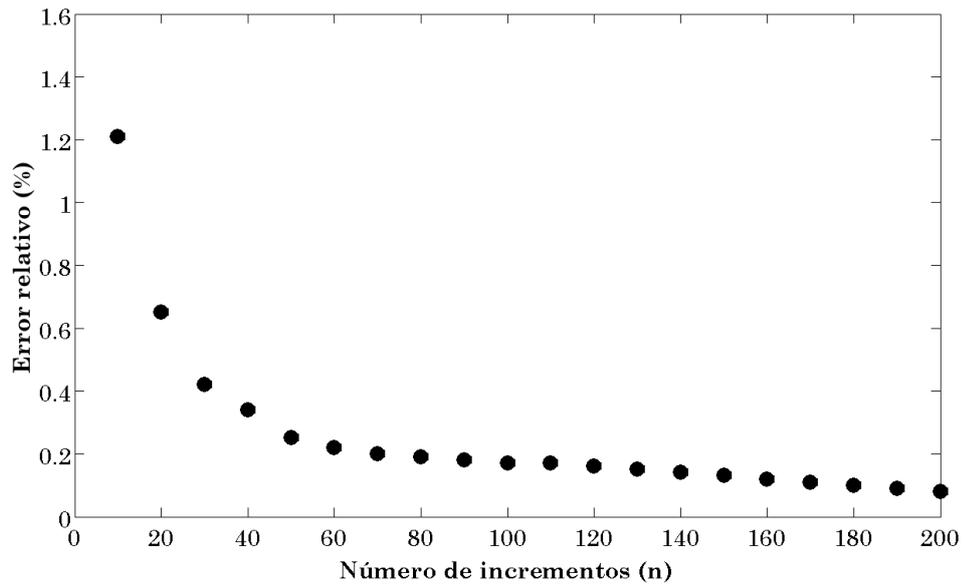


Figura 7.3: Error relativo dependiendo del numero de incrementos utilizados en la evaluación numérica del operador fraccionario.

### 7.3. Aplicación de la POD

El método de la POD es aplicado a una serie de soluciones de los operadores fraccionarios previamente calculadas. Para ello, estos operadores son evaluados para  $n$  valores diferentes de  $\alpha$ , que se encuentran en un rango entre  $\alpha > 0$  y  $\alpha < 1$ . Una vez calculados los resultados para los diferentes valores de  $\alpha$ , las diferentes soluciones son introducidas

en la matriz de resultados  $\mathbf{U}$ , definida como:

$$\mathbf{U}_{ij} = D^{\alpha_j} \epsilon(t_i), \quad (7.7)$$

donde  $i$  y  $j$  son el numero de puntos en los que se a evaluado el operador y el numero de  $\alpha$  utilizados respectivamente.

El objetivo de la PAC es encontrar las soluciones aproximadas más precisas de los operadores fraccionarios precalculados, en algún subespacio  $\mathbf{U}_{num}$ , con una dimensión  $K < N$ . Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_K$  son las bases ortonormales de  $\mathbf{U}_{num}$ , cada uno de los vectores del conjunto original se puede escribir como

$$\mathbf{u}_i \approx \sum_{j=1}^K a_{ij} \cdot \varphi_j = \bar{\Phi} \cdot a_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.8)$$

siendo  $a_{ij}$  las amplitudes correspondientes al  $i$ ésimo vector del nuevo subespacio  $\mathbf{U}_{num}$ , y  $\bar{\Phi}$  es la matriz que recoge todas las bases ortonormales del subespacio  $\varphi_j$ .

A continuación el error de aproximación  $L^2$  se define como

$$E = \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^K a_{ij} \cdot \varphi_j \right\|^{L^2}. \quad (7.9)$$

Una vez que el error es definido, el objetivo es encontrar un conjunto de bases ortonormales  $\varphi_j$  que lo minimice. Desarrollando la expresión del error se obtiene

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \cdot \left( \sum_{j=1}^K a_{ij} \cdot \varphi_j \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K a_{ij}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K a_{ij} \mathbf{u}_i^T \varphi_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K a_{ij}^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Con el objetivo de minimizar la función que define el error, esta es derivada respecto de las incógnitas el problema:

$$\frac{\partial E}{\partial a_{lm}} = -2 \mathbf{u}_l^T \varphi_m + 2 a_{lm}. \quad (7.11)$$

De la Ecuación Eq. 7.11 se obtiene

$$a_{lm} = \mathbf{u}_l^T \varphi_m \quad (7.12)$$

y sustituyendo la Ecuación 7.12 dentro de la Ecuación 7.10 se convierte en

$$E = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (\mathbf{u}_i^T \varphi_j) \mathbf{u}_i^T \varphi_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (\mathbf{u}_i^T \varphi_j)^2 \quad (7.13)$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos vectores cumple que (Ec. 7.14),

$$\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{u}_i \quad (7.14)$$

el término de la mitad de la Ecuación 7.13 se puede describir como

$$2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j) \mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j. \quad (7.15)$$

y el último término como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j)^T (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j \quad (7.16)$$

Substituyendo las Ecuaciones 7.15 y 7.16 en la Ecuación 7.10, el error total que debe de ser minimizado se obtiene como (Ec. 7.17),

$$E = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varphi}_j^T \left( \sum_{j=1}^K \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|^2 - \sum_{j=1}^K \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (7.17)$$

donde  $\mathbf{C}$  es la conocida como matriz de covarianza definida como

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T. \quad (7.18)$$

Substituyendo la matriz de covarianza dentro de la función del error, la forma final que se obtiene es

$$E = \beta - \sum_{j=1}^K \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (7.19)$$

donde el valor escalar  $\beta$  es una constante que depende del conjunto de vectores originales. Hay que recalcar que el objetivo marcado era el de encontrar un conjunto de bases nuevas más reducidas que pudiesen minimizar el error de la aproximación para una dimensionalidad dada  $K$ , y que la selección de las nuevas bases no tiene influencia sobre el valor escalar  $\beta$ . Por lo tanto, con el objetivo de minimizar el error, el segundo término de la Ecuación 7.19 debe de ser maximizado

$$\text{máx} \left( \sum_{j=1}^K \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j \right) \quad (7.20)$$

bajo la restricción de ortogonalidad de las nuevas bases

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 1 \quad j = 1, \dots, K. \quad (7.21)$$

Para poder resolver este problema de maximización con restricciones se utilizan los multiplicadores de Lagrange:

$$\max \left( \sum_{j=1}^K \varphi_j^T \mathbf{C} \varphi_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j (\varphi_j^T \varphi_j - 1) \right) \quad (7.22)$$

Derivando la Ecuación 7.22 respecto de  $\varphi_j$  e igualando a cero, se obtiene la Ecuación 7.23:

$$\frac{d}{d\varphi_j} \left( \sum_{j=1}^K \varphi_j^T \mathbf{C} \varphi_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j (\varphi_j^T \varphi_j - 1) \right) = 2\mathbf{C}\varphi_j - 2\lambda_j \varphi_j = 0 \quad (7.23)$$

Finalmente, la última ecuación se satisface siempre que  $\varphi_j$  y  $\lambda_j$  sean los correspondientes autovalores y autovectores de la matriz  $\mathbf{C}$ . Por lo tanto, el problema de minimizado se convierte en un problema de autovalores y autovectores de la forma

$$\mathbf{C}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad (7.24)$$

donde el autovector  $\varphi_j$  define las formas principales del conjunto de soluciones. La nueva solución  $\mathbf{U}_{num}$  se obtiene mediante combinación lineal. La influencia de cada uno de los autovectores sobre la respuesta aproximada final depende del valor de los correspondientes autovalores. Contra mayor sea el autovalor, mayor será la influencia del autivector.

Si únicamente se escoge el autovector correspondiente al mayor de los autovalores, los valores de los coeficientes  $a_i$  para cada una de los diferentes valores de  $\alpha$  se evalúan de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_{num} = a_j \varphi. \quad (7.25)$$

La exactitud de la solución aproximada depende de la cantidad de autovectores que se utilicen a la hora de construirla.

## 7.4. Resultados y discusión

En esta sección, se analizan y discuten los resultados obtenidos una vez aplicado el método de la POD para diferentes valores del orden de derivación  $\alpha$ . Se puede apreciar como la exactitud de la solución numérica obtenida de la evaluación de la derivada fraccionaria, depende de la cantidad de valores de  $\alpha$  diferentes que se utilicen para aplicar el método de la POD. La consecuencia a esta circunstancia es, que a mayor cantidad de incrementos y valores de  $\alpha$  a la hora de evaluar la derivada fraccionaria, mayor es el coste computacional. Se debe de remarcar, que el objetivo de este capítulo no es facilitar

una solución óptima derivada de la POD, sino mostrar que combinando las derivadas fraccionarias con el método de la POD es posible reducir el coste computacional de las simulaciones.

#### 7.4.1. Influencia de la cantidad de valores de $\alpha$ en la exactitud de la solución de la POD

En esta sección se muestran los resultados obtenidos del estudio de la influencia que la cantidad de valores de  $\alpha$  seleccionados tiene sobre la respuesta aproximada final. El rango de los valores de  $\alpha$  que ha sido analizado se encuentra entre  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ . Ninguno de los dos valores ha sido utilizado para llevar a cabo las operaciones, ya que el valor de  $\alpha = 0$  corresponde al comportamiento elástico-perfecto de un muelle y el valor de  $\alpha = 1$  pertenece al de un amortiguador, los cuales tienen un comportamiento lineal, a diferencia de los resultados intermedios que se obtienen cuando  $\alpha$  es diferente de estos dos valores. Es por tanto que el rango de valores utilizado es de  $0 < \alpha < 1$ .

Una vez definido el rango en el que se van a realizar los cálculos, se ha analizado la influencia que la cantidad de valores de  $\alpha$  ( $n_\alpha$ ) tiene sobre los valores y vectores propios del sistema. La información que transmiten los valores propios del sistema tiene que ver con la influencia que los vectores propios correspondientes tienen sobre la forma final del resultado. En la Tabla 7.1, se muestra la influencia de los tres primeros valores propios para los diferentes valores de  $\alpha$  seleccionados.

Tabla 7.1  
Lista de autovalores.

Incremento $\alpha$	autov. 1	autov. 2	autov. 3	autov. 4
0.5	159.67	16.34	0	0
0.1	665.05	16.35	0.31	0
0.01	6371.10	142.80	2.52	0.04

De estos resultados, se puede apreciar como independientemente de  $n_\alpha$  utilizados en la POD, el primer valor propio predomina sobre los siguientes, o lo que es lo mismo, su valor es mucho mayor que el de los siguientes. Lo que indica este resultado es, que una gran parte de la forma final que se obtendrá, puede aproximarse con la forma del primer

vector propio de cada uno de los sistemas respectivamente. Para este caso particular que se está estudiando, el primer vector propio es capaz de reproducir de manera precisa todas las formas de las derivadas fraccionarias que se encuentran entre  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ , siendo  $\lambda_i$  el  $i$ -ésimo valor propio y  $\Delta\alpha$  el incremento de  $\alpha$  dentro del rango fijado.

Tras determinar la cantidad de autovectores que se utilizarán para formar la solución simplificada que permitirá la reducción del coste computacional, se resuelve la ecuación 7.25, obteniendo de esta manera las amplitudes  $a_i$  correspondientes a cada uno de los diferentes valores de  $\alpha$ .

En la figura 7.4 se muestra la exactitud de la aproximación obtenida que depende del valor de  $n_\alpha$  obtenida mediante la POD. Analizando la figura con detenimiento se puede observar como el error relativo entre la aproximación y la solución analítica llega a un valor asintótico alrededor de  $n_\alpha = 9$ .

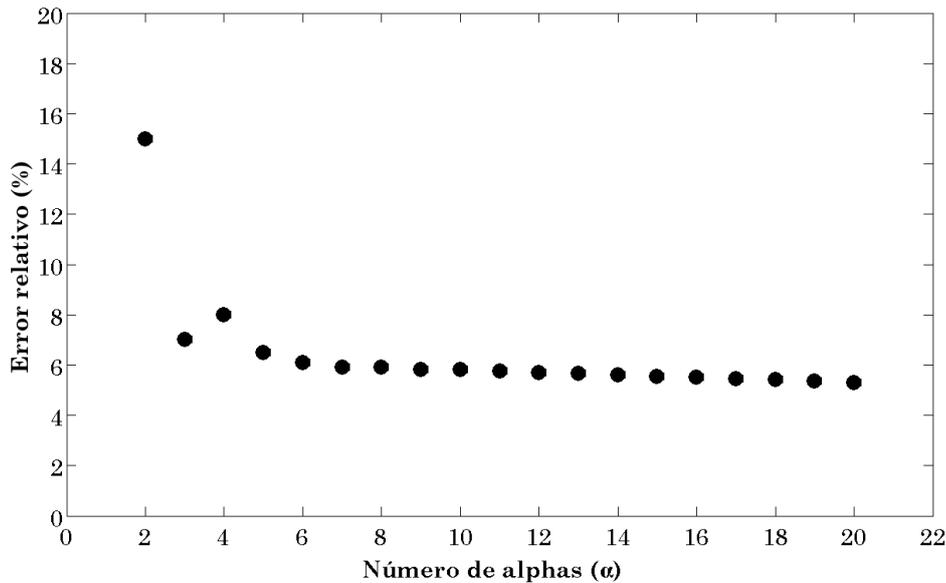


Figura 7.4: Error relativo dependiendo del número de alfas seleccionado.

Tras realizar el análisis de influencia, se han seleccionado aquellos valores que reduzcan el error relativo entre los resultados numéricos aproximados y analíticos. Los parámetros seleccionados son  $n_\alpha = 9$ , siendo el primer y el último valor de  $\alpha$  0,1 y 0,9 respectivamente. Por otro lado, el número de puntos en los cuales se evaluará la derivada fraccionaria son  $m = 100$ .

Utilizando estos parámetros y una vez obtenida la solución simplificada, se han obtenido los resultados numéricos aproximados mediante la POD para los valores de  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$  and  $\alpha = 0,75$ , que se pueden observar en la figura 7.5. A la vista de los resul-

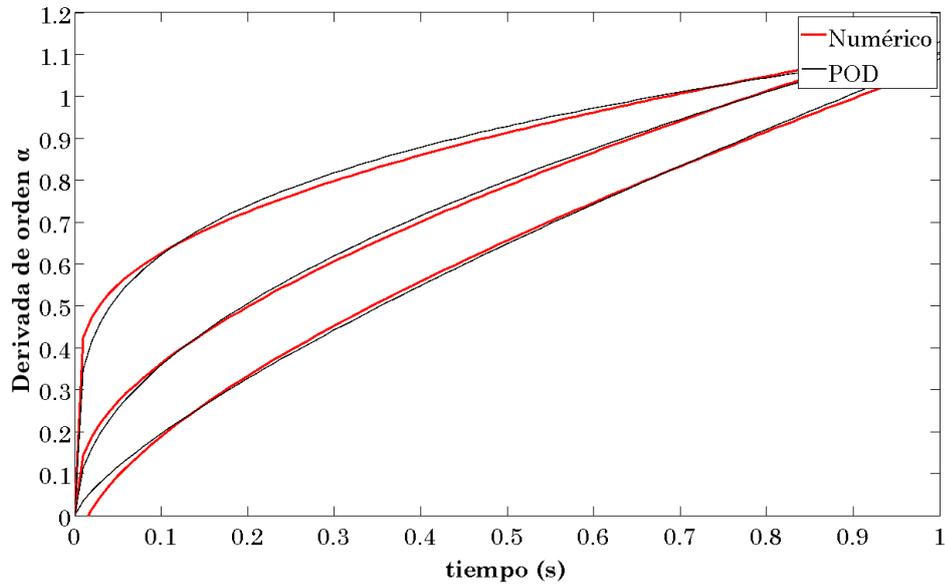


Figura 7.5: Comparación de los resultados entre la POD y la respuesta numérica.

tados, es posible decir que la aproximación obtenida tiene una buena correlación con el resultado obtenido analíticamente.

Con el objetivo de cuantificar la diferencia entre las dos soluciones, se han calculado tanto el error máximo entre funciones como el error medio para diferentes valores de  $\alpha$ , cuyos valores se muestran en la figura 7.6. El error medio de todas las aproximaciones, se mantiene en general por debajo del 1% en valor relativo. Poniendo la atención en el máximo error cometido para algún punto de la función, el valor del error relativo se coloca entorno al 10%, siendo al comienzo de la función donde más se aprecia la diferencia entre ambos resultados, numérico y analítico.

Observando los resultados, se puede llegar a la conclusión de que las aproximaciones obtenidas son bastante cercanas a los resultados analíticos. Es evidente que el resultado aproximado no va a ser tan bueno como el analítico, pero en este caso lo que se busca es la reducción del tiempo de cálculo, que será lo que se analice en la siguiente sección, y de esta forma determinar si la reducción en el coste computacional TERMINAR

#### 7.4.2. Reducción del coste computacional

Tras analizar los errores que se obtienen una vez que se ha aplicado la POD, se pasa a cuantificar la reducción del tiempo de cálculo utilizando el método descrito.

Una vez que los vectores propios principales han sido calculados, la composición de una nueva solución es muy rápida, como se podrá ver a continuación. Como se muestra

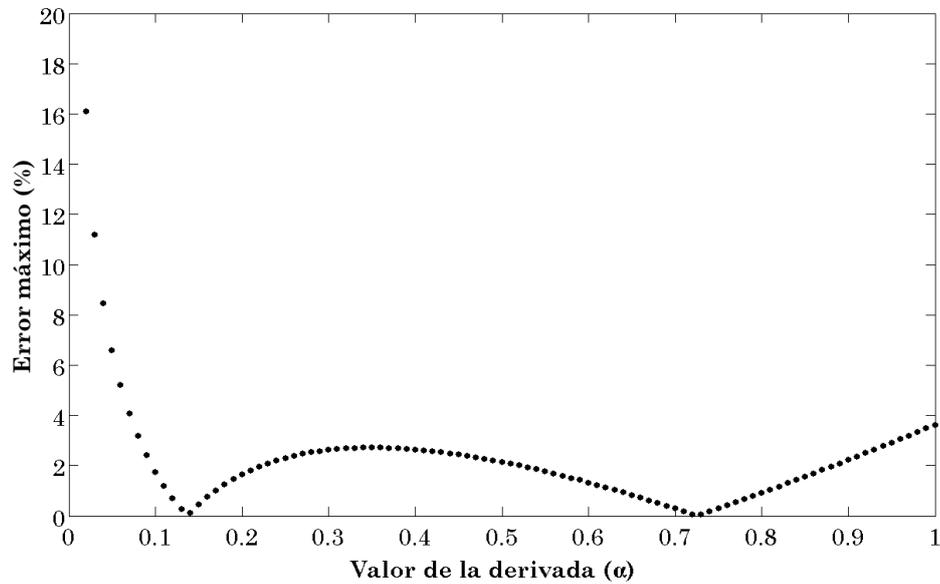


Figura 7.6: Errores máximo y relativo dependientes del orden de la derivada.

en la figura 7.7, para un valor constante de  $\alpha$ , la diferencia de tiempo aumenta a medida que aumenta el número de puntos de integración donde una derivada fraccionaria deba de ser evaluada. Este efecto es mayor cuando cuando el valor  $\alpha$  evoluciona en el tiempo. El motivo del comportamiento observado, tiene que ver con que en el primer punto que se calcula utilizando la POD, se calculan las derivadas correspondientes al rango  $0 < \alpha < 1$ , con un coste computacional de 0.13 segundos. Pero una vez aplicada la POD, el tiempo de evaluación de las nuevas derivadas se mantiene casi constante. Esta propiedad es muy interesante para aquellos problemas en los que se desee resolver ecuaciones diferenciales que contengan derivadas fraccionarias mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), donde hace falta evaluar esa ecuación diferencial en muchos puntos diferentes para cada incremento.

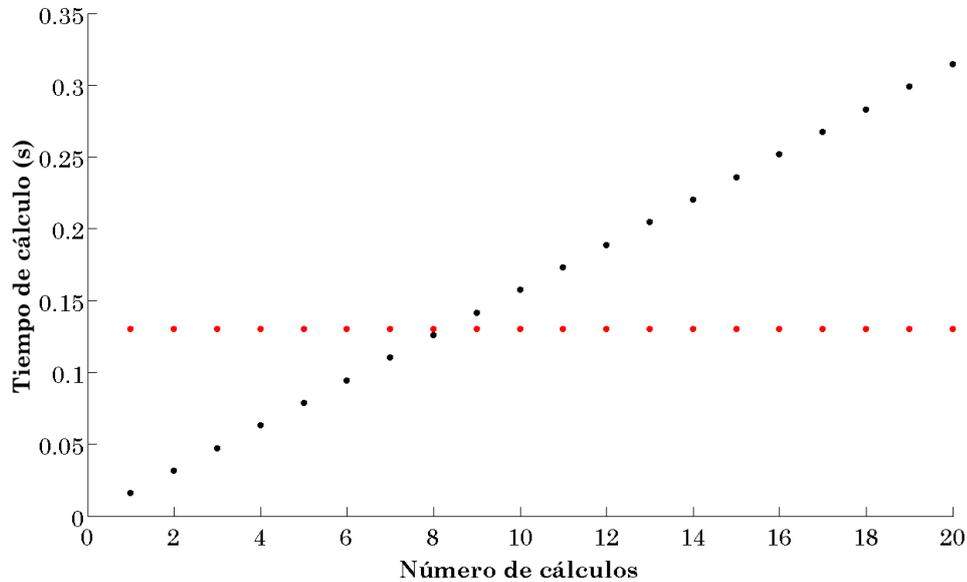


Figura 7.7: Coste computacional dependiente del número de puntos evaluados.

## 7.5. Conclusiones

Las derivadas fraccionarias muestran buenas cualidades al reproducir el comportamiento de algunos fenómenos físicos. En cambio, cuentan con un coste computacional elevado. Debido a la limitación de tiempo que suele haber en las empresas, las simulaciones deben de ser rápidas, por lo que el uso de modelos fraccionarios depende de la mejora en el tiempo de evaluación de estos.

Se ha observado que, seleccionando los parámetros adecuados, los resultados obtenidos mediante la POD son muy cercanos a la respuesta analítica. El error medio relativo se coloca alrededor de 1%, lo cual demuestra la exactitud de la POD para el problema planteado.

Finalmente, se ha analizado el coste computacional, y se ha podido observar que el tiempo de cálculo se reduce de manera significativa viéndose afectado de una manera mínima la solución del problema. El resultado principal en este caso es, que mientras para el caso precalculado el tiempo de evaluación se mantiene casi constante, el tiempo de cálculo aumenta incremento tras incremento para el caso en el que la derivada fraccionaria se evalúa numéricamente utilizando el esquema numérico de GL.

## Capítulo 8

# Morphing de estructuras de material compuesto

En este capítulo se describen los pasos llevados a cabo para la obtención de un compuesto con capacidad de morphing a flexión. El primer paso consiste en describir el tratamiento termomecánico que se le a dado a la viga de SMA para su entrenamiento y a continuación se detallan el proceso de fabricación y los ensayos que se han llevado a cabo.

### 8.1. Determinación de las temperaturas de transformación

El historial térmico de las aleaciones con memoria de forma es determinante en el comportamiento mecánico de este tipo de materiales. Por ello antes de nada, el material recibido de fabrica es tratado térmicamente, de manera que se asegura la obtención de una única fase a temperatura ambiente. Se introduce el material como se ha recibido dentro de un horno que se encuentra a una temperatura de 660 °C. Tras mantener el material durante 30 minutos a esa temperatura, se saca del horno y se introduce dentro del agua de manera que se temple. Al templarlo, se obtiene una única fase, que en este caso es la martensítica.

A continuación, una vez que se ha llevado a cabo este proceso térmico, se realiza un análisis calorimétrico con el objetivo de determinar las temperaturas de transformación del SMA, para lo que nuevamente se utiliza el calorímetro Mettler Toledo. Las temperaturas de transformación obtenidas para esta aleación de SMA se pueden observar en la Tabla 8.1.

Las temperaturas que se han obtenido para este caso son diferentes a las que se obtuvieron en el caso del hilo de SMA. Esto es debido a que la composición química del

material es diferente, por lo que las fases tienen diferentes temperaturas de transformación. Los ensayos de laboratorio en los que se estudiará el *morphing* se realizan para una temperatura ambiente que se encuentra entre los 20 °C y los 25 °C, por lo que el material cuenta con una fase martensítica, lo cual permite utilizar el SMA como actuador.

Tabla 8.1  
Temperaturas de transformación.

$M_f$	$M_s$	$A_s$	$A_f$
28.1 °C	48.9 °C	68.3 °C	90.7 °C

## 8.2. Desarrollo del TWSME

Hay dos maneras diferentes de utilizar un SMA como actuador. La primera de ellas es utilizarlo con el Efecto de Memoria de Forma Simple, que como se ha explicado en el Capítulo 2, consiste en coger un pieza de SMA que tiene una misma forma tanto a baja como a alta temperatura y deformarlo para pegarlo a la pieza que se quiera deformar. Al deformar el SMA, se produce una transformación por tensión, que como se ha indicado con anterioridad, es capaz de recuperar al ser calentado, volviendo a la forma inicial (sin deformar) nuevamente. Una vez adheridos ambos componentes del conjunto, se calienta, de manera que el SMA obliga a deformarse al compuesto de fibra. Cuando se desea volver a la configuración inicial, el SMA es enfriado y el compuesto deforma el SMA gracias a la energía elástica que tiene acumulada el compuesto. Este proceso cuenta con un problema, y es que el compuesto debe de ser lo suficientemente rígido como para transformar el SMA una vez termine de actuar, lo que por el contrario impide que se alcancen grandes deformaciones cuando el SMA actúa.

La segunda posibilidad es la de utilizar el TWSME, que consiste en que el SMA tiene diferentes formas a alta y a baja temperatura, con diferentes formas intermedias entre ambas gracias a un tratamiento termomecánico. Esto supone que al pegar el actuador al compuesto de fibra y calentar el actuador, este tira del compuesto deformándolo, y al enfriarse, vuelve a la posición inicial junto con el compuesto. Se debe de tener en cuenta que para conseguir deformaciones significativas, es necesario que el compuesto de fibra no sea extremadamente rígido, ya que en ese caso sería inútil tratar de utilizar ningún actuador.

Antes de darle un tratamiento termo-mecánico al material, es necesario obtener la forma que desee cuando el SMA esté caliente. La forma caliente se obtiene al introducir el material en un molde rígido, que a su vez se introduce en el horno a una temperatura de 550 °C durante 30 minutos. Una vez pasado este tiempo, se introduce en un baño que se encuentra por debajo de la  $M_f$ .

A continuación, se describe el ciclo termomecánico que se lleva a cabo para poder inducir el efecto de doble memoria de forma. Para el caso de las probetas a flexión se ha realizado el estudio deformando las probetas sobre un cilindro de diámetro 50 mm:

- Paso 1: La forma de la pieza es la deseada a alta temperatura. La probeta se encuentra a 25°C.
- Paso 2: La probeta es deformada hasta la forma que se desee tener a baja temperatura. La probeta se encuentra a 25°C.
- Paso 3: La probeta es introducida en el horno sin ninguna restricción. La probeta se calienta hasta que alcance los 50°C por encima de la  $A_f$ . La probeta habrá recuperado prácticamente por completo la forma inicial.
- Paso 4: Introducir la probeta en un baño que se encuentre por debajo de la  $M_f$ . La probeta tenderá a encontrar la posición a la que ha sido deformada en el paso 2.
- Paso 5: Comienza de nuevo el paso 1.

Este ciclo se debe de repetir hasta que el desplazamiento que se produce de la forma caliente a la fría deje de variar y se estabilice.

## 8.3. Metodología experimental

### 8.3.1. Probetas

El material compuesto ha sido fabricado por infusión, un proceso tradicionalmente empleado en la fabricación de piezas grandes y con geometrías complicadas como barcos de recreo o palas de aerogeneradores. En el caso de esta tesis, el empleo de este método de fabricación ha posibilitado la obtención de placas de espesores uniformes y porcentajes de fibra medio-altos (durante el proceso todo el material está sometido a una presión uniforme de una atmosfera), con una baja inversión inicial (el coste de la bomba de vacío) y a través de un proceso simple y reproducible (no es necesario el control de variables de proceso como presiones o temperaturas de procesado que pueden afectar al comportamiento mecánico del material resultante).

En el proceso de infusión las capas de refuerzo secas se colocan dentro de una cavidad, formada por un molde inferior y una bolsa de vacío que actúa como molde superior. El refuerzo se impregna por la resina en estado líquido al ser obligada a pasar a través de la cavidad del molde al aplicarle vacío Figura 8.1.

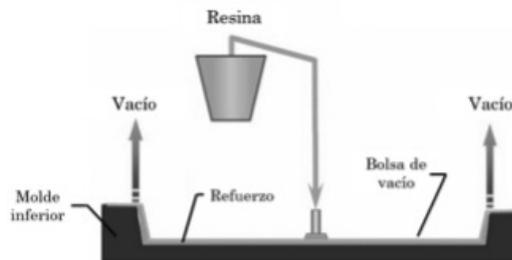


Figura 8.1. Diagrama esquemático del proceso de infusión.

La infusión de placas planas se ha llevado a cabo empleando como molde inferior un vidrio templado y decantado de  $1200 \times 900$  mm, sobre el que se pueden fabricar por infusión laminados de hasta  $1000 \times 750$  mm. El proceso que se emplea es el siguiente:

*Preparación del molde inferior y colocación del refuerzo.* Se delimita el molde inferior, una superficie aproximadamente 100 mm más larga y ancha que la placa a fabricar, con cinta adhesiva sobre el vidrio templado. Esta superficie es impregnada con cera desmoldeante (Abel 34 D) para facilitar la tarea de desmoldeo una vez realizada la infusión (Figura 8.2).



Figura 8.2. Vidrio templado sobre el que se realiza la infusión (perímetro exterior) y molde inferior delimitado por cinta adhesiva (perímetro interior).

Se cortan las capas de refuerzo a las dimensiones de la placa final y se posicionan sobre el molde inferior; el refuerzo se posiciona sobre el borde del molde en el que se colocará la entrada de la resina (borde superior en la Figura 8.3) quedando alejado de la zona de la salida de resina (borde inferior).

*Colocación de los elementos auxiliares (peel-ply, conductos de entrada/salida y malla de distribución de la resina).* Se cubren las capas de refuerzo con el peel-ply o tejido pelable (Airtech Econostitch 50), que facilita el desmoldeo de la placa en su cara superior y permite eliminar la malla y los tubos de distribución de resina del laminado una vez

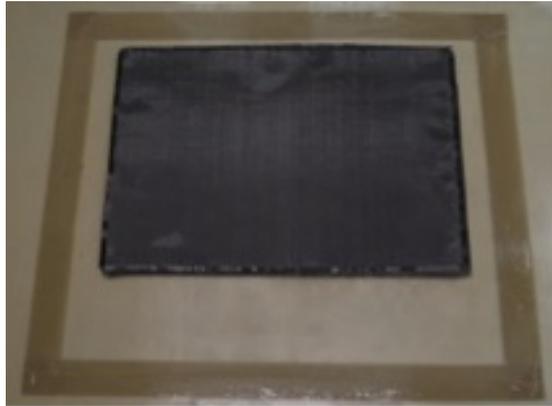


Figura 8.3. Capas de refuerzo sobre el molde inferior (delimitado por la cinta adhesiva).

curado. El *peel-ply* se coloca cubriendo toda la superficie del molde (Figura 8.4), y se fija mediante cinta adhesiva para evitar que se mueva durante la colocación de la bolsa.

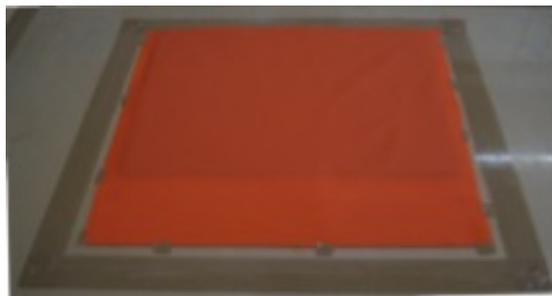


Figura 8.4. Colocación del peel-ply sobre el refuerzo.

Se retira la cinta adhesiva que delimita el borde del molde y se fijan las entradas y salidas de la resina sobre el *peel ply* y los bordes del propio molde. El conducto de entrada de la resina se coloca sobre el borde superior del molde y el conducto de salida en el borde opuesto (Figura 8.5). Ambos conductos se unen a sendos tubos espirales, que evitan que la bolsa obstruya el paso de la resina, garantizan el reparto uniforme de la resina a lo largo de la anchura de la placa y facilitan la evacuación del aire al sistema de vacío. Por último, se coloca la malla de distribución de la resina entre el tubo espiral del conducto de entrada y el *peel ply*; esta malla controla el flujo de la resina, permitiendo su circulación por el exterior del laminado antes de que penetre hacia el refuerzo.

*Colocación de la bolsa de vacío.* La bolsa de vacío (Airtech Econolon 225) se coloca, empleando una cinta de sellado (Airtech AT 200 Y) para garantizar su estanqueidad, sobre el perímetro del molde donde antes estaba la cinta adhesiva y no se ha aplicado desmoldeante. Se crean pinzas, pliegues en la bolsa, a la altura de los conductos de entrada y salida de la resina y de ambos tubos espirales para que la bolsa tenga mayor

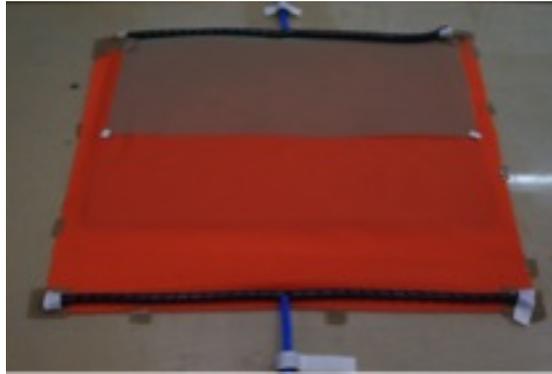


Figura 8.5. Colocación de los conductos de entrada (superior) y salida (inferior) de la resina.

libertad a la hora de reproducir la geometría de la placa (Figura 8.6). Se conecta la bomba de vacío al conducto de salida y se cierra la entrada con una llave de presión; mientras se vacía el molde, la bolsa coloca de manera que se hacen coincidir sus pliegues con las pinzas y los conductos de entrada y salida de resina. Antes de realizar la infusión es necesario asegurar que el perímetro este bien sellado; para ello se apaga la bomba y se controla que no haya pérdidas de vacío durante un tiempo aproximado de 20 minutos.

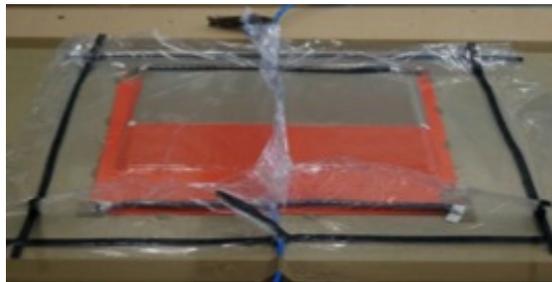


Figura 8.6. Molde cerrado y listo para el proceso de infusión.

*Infusión de la resina, curado y desmoldeo.* La resina se mezcla en un depósito abierto y se desgasifica, introduciendo durante 10 minutos mezcla y deposito dentro de una cámara de vacío (AppliedVacuum DP-8-00). El conducto de entrada se introduce en el depósito de resina y el conducto de salida se conecta a un contenedor que recoge el sobrante de la misma (Figura 8.7) evitando que llegue a la bomba. Se abre el paso de la resina dando comienzo a la infusión y se espera hasta que la resina impregne completamente el área del refuerzo. Una vez impregnado el refuerzo, se cierran ambos conductos mediante llaves de presión, primero el de entrada y después el de salida, de manera que el molde queda cerrado.

La placa, dentro del molde y conservando el vacío, se somete a un proceso de curado de 24 h temperatura ambiente y 24 h a 40 °C en un horno (Digitronic 081921). Después

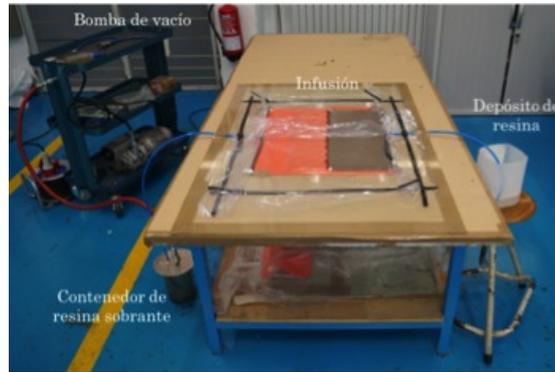


Figura 8.7. Imagen general del proceso de infusión.

del curado de la resina, se procede al desmoldeo: se abre el molde retirando la bolsa de vacío junto con el sellante y se separa la placa del molde inferior. Por último, se retiran tanto el peel-ply, como los conductos de entrada/salida y la malla de distribución adheridos al mismo. La Figura 8.8 muestra una placa de  $500 \times 1000 \text{ mm}^2$  obtenida a partir de este proceso de fabricación.



Figura 8.8. Placa obtenida a través del proceso de infusión.

Una vez curado el compuesto, se pega el SMA utilizando para ello el adhesivo *Araldite Standard*. Al calentar el conjunto para poder poscurar el adhesivo, el SMA tratará de deformarse hasta su temperatura en caliente, lo cual no permitiría realizar la unión entre los dos materiales. Por lo tanto, el compuestos junto con el SMA son introducidos en una bolsa de vacío para que no haya ningún problema durante el proceso de curado del adhesivo. Las dimensiones de las probetas de *morphing* son,  $100 \times 230 \text{ mm}^2$  para el caso del compuesto y  $150 \times 12 \text{ mm}^2$  para el caso del SMA, que como se puede observar en la Figura 8.9 se encuentra adherida en la parte central de la placa.

Finalmente se ha medido el peso del conjunto formado por el compuesto y el actuador de SMA. El peso se sitúa en los 46,99 g. Este peso es interesante de cara a determinar si es capaz o no de recuperar deformaciones impuestas por su propio peso.



Figura 8.9: a) SMA deformado y molde. b) Viga de SMA adherida a la placa de compuesto.

## 8.4. Ensayos

El *set up* experimental que se ha utilizado para la caracterización del comportamiento de la estructura se muestra en la Figura 8.10. El híbrido compuesto por el SMA y el compuesto de fibra de carbono se empotra por el lado que se encuentra el SMA. El actuador se calienta utilizando dos resistencias eléctricas en forma de parches. El desplazamiento de la probeta se monitoriza utilizando para ello un LVDT, mientras que la temperatura se mide utilizando un termopar de tipo K.

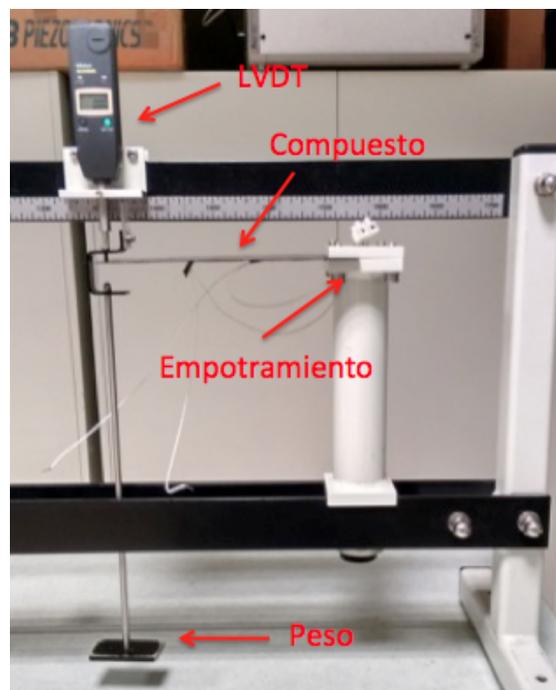


Figura 8.10. *Set-up* del ensayo de *morphing*.

## 8.5. Resultados

En la presente sección se presentan los resultados referidos a la capacidad de morphing del compuesto que contiene SMA. Por una parte se encuentran los resultados referidos al comportamiento en vacío del compuesto, y por otra parte se muestran los resultados obtenidos del comportamiento del compuesto bajo cargas externas.

### 8.5.1. Comparación entre tirar y empujar

El primer resultado se obtiene de observar la diferencia que se produce entre que el compuesto tire del compuesto o lo empuje a la hora de cambiar de forma. El compuesto que contenía el actuador de SMA tirando rompe catastróficamente en cuando el actuador comienza a deformar la estructura completa. El adhesivo seleccionado para este trabajo, no es capaz de soportar las sollicitaciones que se producen en el modo I.

Por el contrario, el actuador de SMA que empuja al compuesto, deforma sin problema la estructura, obteniendo un cambio de forma en todo el conjunto como se podrá observar más adelante. De todas formas, esta estructura termina fallando alrededor de los 30 ciclos. El compuestos y el SMA se separan por la intercara adhesiva, por lo que el análisis de la unión y del adhesivo debe de ser estudiada detenidamente en un futuro.

## 8.6. Comportamiento en vacío

En un primer instante se ha llevado a cabo un ensayo en vacío para determinar la capacidad que tiene el compuesto para variar su geometría. La diferencia entre las posiciones de inicio y fin que se representa en las Figura 8.11 es significativa. En concreto la distancia que separa la punta de la placa en frío y en caliente es de  $\delta = 22$  mm. La temperatura en frío es de 25 °C mientras que la caliente es de 70 °C.

### 8.6.1. Comportamiento bajo carga

Con el objetivos de analizar la capacidad de actuación que tiene la estructura fabricada, se ha realizado un estudio utilizando dos carga de 5 y 10 N respectivamente. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 8.12.

Durante el ensayo, se aplica una carga en la punta del compuesto cuando el SMA se encuentra a temperatura ambiente. Debido a las cargas aplicadas, para cada caso el desplazamiento es de 12 mm y 19 mm respectivamente. Cuando se calienta el SMA, este trata de volver hacia la posición de inicio, levantando consigo la masa que se le ha aplicado. Para el caso de 2,5 N, el conjunto es capaz de volver prácticamente a la posición

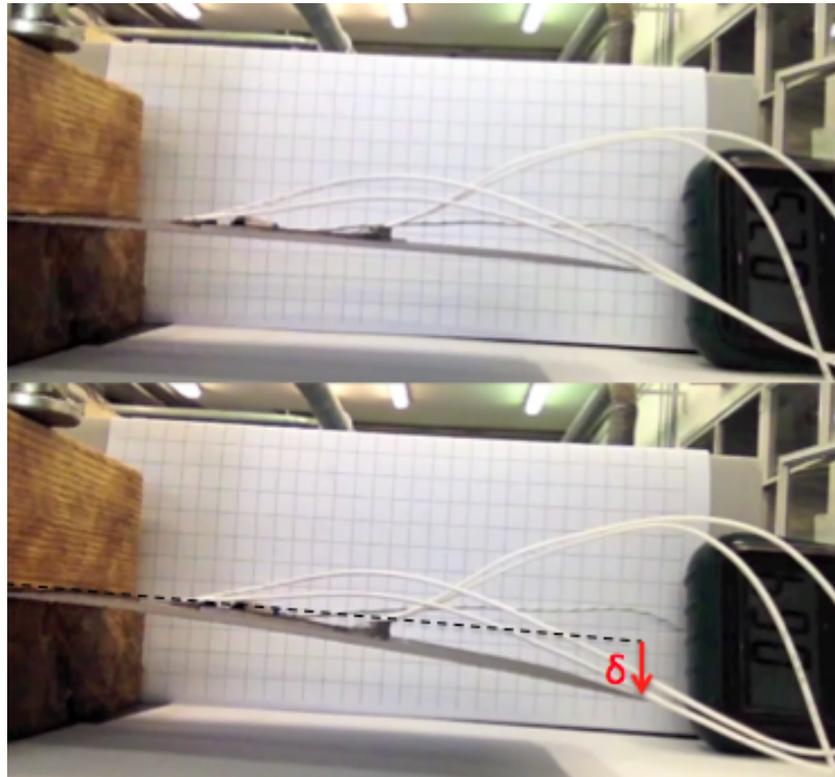


Figura 8.11. Comparación teórico experimental del comportamiento superelástico de un SMA (modelo basado en la cinética de transformación asumida).

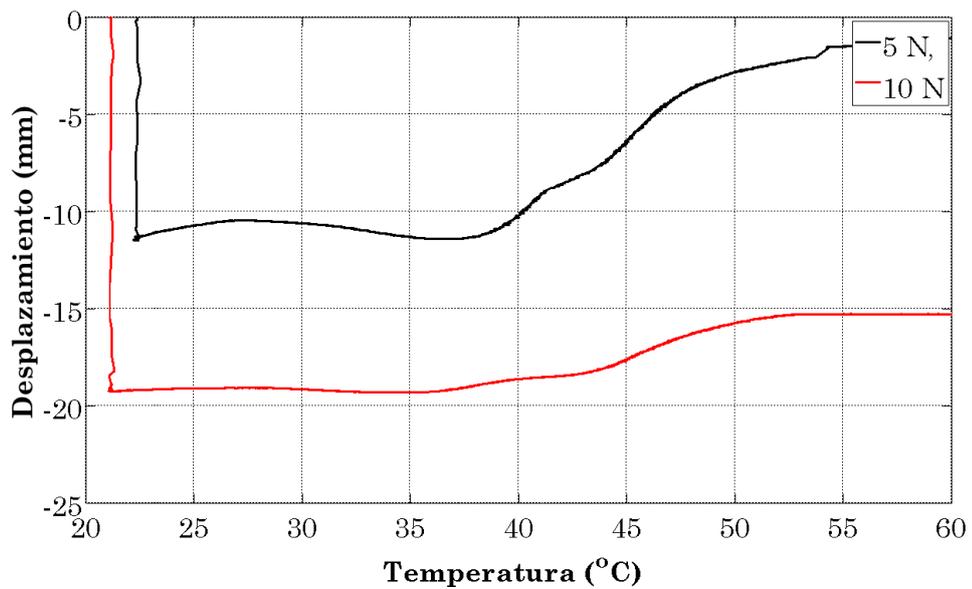


Figura 8.12. Comportamiento del compuesto activo bajo cargas de 5 y 10 N.

de inicio cuando la temperatura alcanza los 55 °C, mientras que para el caso de la carga de 5 N, la estabilización se produce a los 52 °C, y únicamente es capaz de recuperar 3,5 mm de los 19 mm que se ha deformado inicialmente.

Si se ve desde el punto de vista de la rigidez del material, se puede ver que nos encontramos ante estructuras que tienen la capacidad de contar con más de una rigidez dependiendo de la temperatura. Esta característica, permite el estudio y desarrollo de componentes que no siempre tengan la necesidad de contar con una misma rigidez, y que únicamente actúen cuando es necesario. Este concepto permitiría reducir el peso del conjunto, por lo que tendría sentido su implementación en máquinas de mecanizado, de manera que se aligere la estructura para los movimientos en vacío, y sea más rígida a la hora de llevar un trabajo a cabo.

## 8.7. Conclusiones

En este capítulo se ha podido observar que la utilización de SMAs como materiales actuadores en forma de placa pueden ser utilizados para alcanzar cambios geométricos de placas de material compuesto. Por otra parte, se ha visto que la manera en la que se coloque el SMA es determinante a la hora de fabricar una pieza exitosa. Además, es necesario realizar un estudio exhaustivo del adhesivo y los tratamientos superficiales de manera que el actuador y el compuesto no se despeguen a los pocos ciclos.

Por otra parte, como era de esperar, la carga que se le aplique al conjunto es determinante a la hora de que el material sea capaz de recuperar toda su deformación, por lo que se debe de tener muy en cuenta el tipo de aplicación en la cual se quieran implementar este tipo de actuadores.

Finalmente, se puede concluir que la utilización de SMAs en forma de actuador, permite fabricar componentes de rigidez variable que cuentan con un menor peso que los compuestos tradicionales, lo cual los hace interesantes para aplicaciones en sistemas dinámicos.



## Capítulo 9

# Conclusiones y Líneas Futuras

En el presente capítulo se presentan las conclusiones finales de la presente tesis, así como las líneas futuras que se proponen y finalmente se realiza un resumen de los trabajos divulgativos que se han llevado a cabo a lo largo de este trabajo.

### 9.1. Conclusiones

- *Comportamiento de los bucles para transformaciones incompletas.*

Los bucles internos de los SMAs varían dependiendo del nivel de descarga al que sean sometidos para transformaciones incompletas durante el proceso de caracterización. Cuanto mayor es la descarga, mayor es la energía disipada.

La transformación martensítica no es homogénea a lo largo de toda la transformación debido a que los bucles más grandes se alcanzan al descargar el SMA en la zona intermedia de la transformación incompleta.

- *Capacidad de los modelos clásicos para reproducir los bucles internos de los SMAs.*

Los modelos clásicos estudiados tienen la capacidad de cuantificar la cantidad de energía disipada por los SMAs de manera precisa.

Por otra parte, estos mismos modelos no son capaces de reproducir las curvas de tensión/deformación que se observan en la parte experimental del presente trabajo.

- *Modelo fraccionario para la representación del comportamiento del SMA.*

El modelo presentado, basado en derivadas fraccionarias permite modelar de manera adecuada el comportamiento mecánico observado experimentalmente, obteniendo errores que se encuentran por debajo del 5 % en lo referido al error máximo, y al 1 % en lo que se refiere al error medio.

- *Reducción del tiempo de cálculo de los operadores fraccionarios mediante la POD.*

Los resultados obtenidos mediante la POD son muy cercanos a la respuesta analítica. El error medio relativo se coloca alrededor de 1%, lo cual demuestra la exactitud de la POD.

Se ha observado que mediante la utilización de la POD, el tiempo de cálculo de los operadores fraccionarios se reduce de manera significativa manteniendo una buena aproximación de los resultados analíticos.

El resultado principal es que mientras para el caso precalculado el tiempo de evaluación se mantiene casi constante, el tiempo de cálculo aumenta incremento tras incremento para el caso en el que la derivada fraccionaria se evalúa numéricamente utilizando el esquema numérico de GL.

- *Capacidad de morphing de compuestos que contienen SMAs.*

La que se coloque el SMA es determinante a la hora de fabricar una pieza exitosa.

Es necesario realizar un estudio exhaustivo del adhesivo y los tratamientos superficiales de manera que el actuador y el compuesto no se despeguen a los pocos ciclos.

La carga que se le aplique al conjunto es determinante a la hora de que el material sea capaz de recuperar toda su deformación, por lo que se debe de tener muy en cuenta el tipo de aplicación en la cual se quieran implementar.

## 9.2. Líneas Futuras

A continuación se describen las líneas futuras planteadas a raíz del trabajo realizado en la presente tesis:

- Desarrollo de un modelo basado en operadores fraccionarios dependiente de la temperatura.
- Estudio de la unión entre SMA y compuesto.
- Desarrollo de un prototipo funcional con capacidad de morphing.

Desarrollo de un modelo basado en operadores fraccionarios dependiente de la temperatura.

### 9.3. Divulgación

- SMA modelling using fractional operators. J.A. Arakama, M. Mateos, J. Aurrekoetxea - Materials and Design - Under review
- Computational time reduction in the numerical evaluation of viscoelastic fractional models using the Proper Orthogonal Decomposition. J.A. Arakama, M. Mateos, J. Aurrekoetxea - Applied Mathematics and Computation - Under review
- Numerical computation of fractional operators for SMA modeling. J.A. Arakama, M. Mateos, J. Aurrekoetxea - WCCMXI 2014
- Time discretisation method involving fractional operators for hysteretic shear behaviour of fibre-reinforced composites modelling. M. Mateos, J. A. Arakama , L. Gornet, P. Rozycki, J. Aurrekoetxea - WCCMXI 2014
- Diseño de estructuras sFML (smart Fiber Metal Laminate) utilizando aleaciones con memoria de forma. J.A. Arakama, M. Mateos, J. Aurrekoetxea - MATCOMP13
- Modeling of hysteresis of superelastic shape memory alloy wires subjected to low-velocity impact. J. Zurbitu, J.A. Arakama, L. Aretxabaleta, M. Mateos, J. Aurrekoetxea - Euromat 2011



# Bibliografía

- [1] D. Lagoudas, *Shape Memory Alloys: modeling and engineering applications*. Springer US, 1 ed., 2008.
- [2] V. Brailovski, P. Terriault, T. Georges, and D. Coutu, “SMA actuators for morphing wings,” *Physics Procedia*, vol. 10, pp. 197–203, jan 2010.
- [3] W. Gosrich, J. Yu, D. Buckmaster, and A. Padovan, “Morphing Wing Aircraft Using Piezoelectric Actuators,” 2015.
- [4] T. Aoyagi, “Smart Materials,” *Encyclopedia of Polymeric Nanomaterials*, pp. 1–5, 2015.
- [5] I. Agirre-Olabide, J. Berasategui, M. Elejabarrieta, and M. Bou-Ali, “Characterization of the linear viscoelastic region of magnetorheological elastomers,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 25, no. 16, pp. 2074–2081, 2014.
- [6] K. Otsuka and C. Wayman, *Shape memory materials*. Cambridge University Press, 1999.
- [7] R. Lahoz and J. Puértolas, “Training and two-way shape memory in NiTi alloys: influence on thermal parameters,” *Journal of alloys and compounds*, vol. 124, p. 397, 2004.
- [8] D. J. Hartl, D. C. Lagoudas, F. T. Calkins, and J. H. Mabe, “Use of a Ni60Ti shape memory alloy for active jet engine chevron application: I. Thermomechanical characterization,” *Smart Materials and Structures*, vol. 19, p. 015020, jan 2010.
- [9] F. Auricchio, M. Conti, M. De Beule, G. De Santis, and B. Verheghe, “Carotid artery stenting simulation: from patient-specific images to finite element analysis.” *Medical engineering & physics*, vol. 33, pp. 281–9, apr 2011.
- [10] S. Gudmundsson, *General aviation aircraft design: Applied Methods and Procedures*. Butterworth-Heinemann, 1 ed., 2013.

- [11] P. Bettini, A. Airoidi, G. Sala, L. Landro, M. Ruzzene, and A. Spadoni, "Composite chiral structures for morphing airfoils: numerical analyses and development of a manufacturing process," *Composites Part B: Engineering*, vol. 41, pp. 133–147, mar 2010.
- [12] D. Coutu, V. Brailovski, and P. Terriault, "Optimized design of an active extradados structure for an experimental morphing laminar wing," *Aerospace Science and Technology*, vol. 14, pp. 451–458, oct 2010.
- [13] J. A. Balta, J. Simpson, V. Michaud, J. A. E. Manson, and J. Schrootenc, "Embedded shape memory alloys coder aerodynamic profile adaptivity," *Smart Materials Bulletin*, no. December, pp. 8–12, 2001.
- [14] A. Sofla, S. Meguid, K. Tan, and W. Yeo, "Shape morphing of aircraft wing: Status and challenges," *Materials & Design*, vol. 31, pp. 1284–1292, mar 2010.
- [15] D. M. Elzey, A. Y. N. Sofla, and H. N. G. Wadley, "A shape memory-based multifunctional structural actuator panel," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 1943–1955, apr 2005.
- [16] D. A. Neal, M. G. Good, C. O. Johnston, H. H. Robertshaw, W. H. Mason, and D. J. Inman, "Design and wind-tunnel analysis of a fully adaptive aircraft configuration," in *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, no. April, pp. 1–9, 2004.
- [17] T. Georges, V. Brailovski, E. Morellon, D. Coutu, and P. Terriault, "Design of Shape Memory Alloy Actuators for Morphing Laminar Wing With Flexible Extradados," *Journal of Mechanical Design*, vol. 131, no. 9, p. 091006, 2009.
- [18] S. Ozgen, Y. Yaman, M. Sahin, G. Seber, G. Bayram, Y. Uludag, and A. Yilmaz, "Morphing air vehicle concepts," in *Proceedings of the International Workshop on Unmanned Vehicles -UVW2010 46*, pp. 46–51, 2003.
- [19] P. Cortes, W. J. Cantwell, K. S. c. Kuang, and S. T. Quek, "The morphing properties of a smart fiber metal laminate," *Polymer Composites*, vol. 29, Issue, no. 11, pp. 1263–1268, 2008.
- [20] D. J. Hartl, J. T. Mooney, D. C. Lagoudas, F. T. Calkins, and J. H. Mabe, "Use of a Ni60Ti shape memory alloy for active jet engine chevron application: II. Experimentally validated numerical analysis," *Smart Materials and Structures*, vol. 19, p. 015021, jan 2010.

- [21] A. Khandelwal and V. Buravalla, “Models for shape memory alloy behavior : an overview of modeling approaches,” *International Journal of Structural Changes in Solids*, vol. 1, pp. 111–148, 2009.
- [22] D. C. Lagoudas, P. B. Entchev, P. Popov, E. Patoor, L. C. Brinson, and X. Gao, “Shape memory alloys, Part II: Modeling of polycrystals,” *Mechanics of Materials*, vol. 38, pp. 430–462, may 2006.
- [23] E. Patoor, D. C. Lagoudas, P. B. Entchev, L. C. Brinson, and X. Gao, “Shape memory alloys, Part I: General properties and modeling of single crystals,” *Mechanics of Materials*, vol. 38, pp. 391–429, may 2006.
- [24] R. Abeyaratne and J. K. Knowles, “A continuum model of a thermoelastic solid capable of undergoing phase transitions,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, no. 3, pp. 541–571, 1993.
- [25] F. Falk, “Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys,” *Acta Metallurgica*, vol. 28, pp. 1773–1780, 1980.
- [26] F. Falk, “One-dimensional model of shape memory alloys,” *Archives of Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 63–84, 1983.
- [27] Q. Sun and K. C. Hwang, “Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys - I. Derivation of general relations,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, no. 1, pp. 1–17, 1993.
- [28] F. Fischer and E. Oberaigner, “Transformation induced plasticity revised an updated formulation,” *International Journal of Plasticity*, vol. 35, no. 18, pp. 2209–2227, 1998.
- [29] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, A. Reali, and S. Sohrabpour, “A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings,” *International Journal of Plasticity*, vol. 26, pp. 976–991, jul 2010.
- [30] D. Lagoudas, D. Hartl, Y. Chemisky, L. Machado, and P. Popov, “Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys,” *International Journal of Plasticity*, vol. 32-33, pp. 155–183, may 2012.
- [31] D. C. Lagoudas and P. B. Entchev, “Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: constitutive

- model for fully dense SMAs,” *Mechanics of Materials*, vol. 36, pp. 865–892, sep 2004.
- [32] P. Konopka and F. Falk, “Three-dimensional landau theory describing the martensitic phase transformation of shape-memory alloys,” *Materials Science Forum*, vol. 123-125, pp. 113–122, 1993.
- [33] Y. Huo, “A mathematical model for the hysteresis in shape memory alloys,” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 1, pp. 283–303, 1989.
- [34] J. Ortin and A. Planes, “Thermodynamics and hysteresis behaviour of thermoelastic martensitic transformations,” *Journal de Physique IV*, vol. 1, no. C4, pp. 13–23, 1991.
- [35] Y. Ivshin and T. J. Pence, “A constitutive model for hysteretic phase transition behavior,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 32, no. 4, pp. 681–704, 1994.
- [36] A. A. Likhachev and Y. N. Koval, “On the differential equation describing the hysteretic behavior of shape-memory alloys,” *Scripta Metallurgica et Materialia*, vol. 27, no. 1, pp. 223–227, 1992.
- [37] K. Tanaka and S. Nagaki, “A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions,” *Ingenieur-Archiv*, vol. 51, pp. 287–299, 1982.
- [38] C. Liang and C. A. Rogers, “One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials,” *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, vol. 1, pp. 207–234, 1990.
- [39] L. C. Brinson, “One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable,” *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, vol. 4, pp. 229–242, 1993.
- [40] J. G. Boyd and D. C. Lagoudas, “A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloys,” *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 6, pp. 805–842, 1996.
- [41] J. Simo and R. Taylor, “A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 3, pp. 649–670, 1986.

- [42] A. Bertram, "Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys," *Nuclear engineering and design*, vol. 74, no. 2, pp. 173–182, 1983.
- [43] A. C. Souza, E. N. Mamiya, and N. Zouain, "Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, pp. 789–806, 1998.
- [44] F. Auricchio, "A uniaxial model for shape-memory alloys," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, no. 27, pp. 3601–3618, 1997.
- [45] F. Auricchio, R. L. Taylor, and J. Lubliner, "Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 146, pp. 281–312, 1997.
- [46] F. Auricchio and R. L. Taylor, "Shape-memory alloys: modelling and numerical simulations of the finite-strain behavior," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 143, pp. 175–194, 1997.
- [47] F. Auricchio, S. Morganti, A. Reali, and M. Urbano, "Theoretical and Experimental Study of the Shape Memory Effect of Beams in Bending Conditions," *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 20, pp. 712–718, feb 2011.
- [48] S. Govindjee and E. P. Kasper, "Computational aspects of one-dimensional shape memory alloy modeling with phase diagrams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 171, pp. 309–326, apr 1999.
- [49] S. Leclercq, G. Bourbon, and C. Lexcellent, "Plasticity like model of martensite transition in shape memory alloys," *Journal de Physique IV*, vol. 5, no. C2, pp. 513–518, 1995.
- [50] S. Leclercq and C. Lexcellent, "A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, pp. 953–980, jun 1996.
- [51] D. C. Lagoudas and S. G. Shu, "Residual deformation of active structures with SMA actuators," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, pp. 595–619, 1999.
- [52] B. Raniecki and C. Lexcellent, "Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, pp. 185–205, mar 1998.

- [53] B. Raniecki, J. Rejzner, and C. Lexcellent, "Anatomization of hysteresis loops in pure bending of ideal pseudoelastic SMA beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, pp. 1339–1368, may 2001.
- [54] J. Rejzner, C. Lexcellent, and B. Raniecki, "Pseudoelastic behaviour of shape memory alloy beams under pure bending: experiments and modelling," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, no. 4, pp. 665–686, 2002.
- [55] M. Qidwai and D. Lagoudas, "On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material," *International Journal of Plasticity*, vol. 16, pp. 1309–1343, jan 2000.
- [56] C. Lexcellent, A. Vivet, and C. Bouvet, "Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, no. 12, pp. 2717–2735, 2002.
- [57] A. Paiva, M. A. Savi, A. M. B. Braga, and P. M. C. L. Pacheco, "A constitutive model for shape memory alloys considering tensile compressive asymmetry and plasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 3439–3457, jun 2005.
- [58] F. Auricchio, A. Reali, and U. Stefanelli, "A macroscopic 1D model for shape memory alloys including asymmetric behaviors and transformation-dependent elastic properties," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 1631–1637, apr 2009.
- [59] C. Lexcellent and G. Bourbon, "Thermodynamical model of cyclic behaviour of Ti-Ni and Cu-Zn-Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests," *Mechanics of Materials*, vol. 24, pp. 59–73, 1996.
- [60] C. Lexcellent, S. Leclercq, B. Gabry, and G. Bourbon, "The two way shape memory effect of shape memory alloys : an experimental study and a phenomenological model," *International Journal of Plasticity*, vol. 16, pp. 1155–1168, 2000.
- [61] R. Abeyaratne and S.-J. Kim, "Cyclic effects in shape-memory alloys: a one-dimensional continuum model," *International journal of solids and structures*, vol. 34, no. 25, pp. 3273–3289, 1997.
- [62] Z. Bo and D. C. Lagoudas, "Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part IV: modeling of minor hysteresis loops," *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, pp. 1205–1249, jul 1999.

- [63] Z. Bo and D. C. Lagoudas, “Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading , Part III : evolution of plastic strains and two-way shape memory effect,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, pp. 1175–1203, 1999.
- [64] Z. Bo and D. C. Lagoudas, “Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading , Part I : theoretical derivations,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, pp. 1089–1140, 1999.
- [65] K. Tanaka, F. Nishimura, and H. Tobushi, “Phenomenological analysis on subloops in shape memory alloys due to incomplete transformations,” *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, vol. 5, pp. 487–493, 1994.
- [66] M. a. Savi and A. Paiva, “Describing internal subloops due to incomplete phase transformations in shape memory alloys,” *Archive of Applied Mechanics*, vol. 74, pp. 637–647, jun 2005.
- [67] A. P. Baeta-Neves, M. a. Savi, and P. M. Pacheco, “On the Fremonds constitutive model for shape memory alloys,” *Mechanics Research Communications*, vol. 31, pp. 677–688, nov 2004.
- [68] A. Paiva and M. A. Savi, “An overview of constitutive models for shape memory alloys,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2006, no. October 2005, pp. 1–31, 2006.
- [69] D. C. Lagoudas and Z. Bo, “Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, pp. 1141–1173, jul 1999.
- [70] P. Laplace, “Leçons de mathématiques données à l’École normale en 1795,” *Oeuvres complètes de Lapalace. Tome XIV*, 1812.
- [71] J. Fourier, “Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier,” 1822.
- [72] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus*. Academic Press, 1974.
- [73] N. Sonin, “On differentiation with arbitrary index,” *Moscow Matem. Sbornik*, 1869.
- [74] A. Grünwald, “Über begrenzte Derivationen und deren Anwendung,” *Z. Angew. Math. Phys*, 1867.
- [75] A. Letnikov, “Theory of differentiation of fractional order,” *Mat. Sb*, 1868.

- [76] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their*. Academic Press, 1998.
- [77] K. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley-Blackwell, 1993.
- [78] S. Samko, *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications*. 1993.
- [79] R. Hilfer, “Fractional time evolution,” *Applications of fractional calculus in physics*, 2000.
- [80] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. 2006.
- [81] R. Magin, “Fractional calculus in bioengineering,” *Critical Review in Biomedical Engineering*, vol. 32, no. 1, pp. 1–104, 2006.
- [82] F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. 2010.
- [83] B. Paz, J. del Castillo, and A. Kilbas, “Cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias,” 2003.
- [84] Ü. Lepik, “Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 214, pp. 468–478, aug 2009.
- [85] I. Podlubny, “Matrix approach to discrete fractional calculus,” *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000.
- [86] S. Samko, “Approximative approach to fractional powers of operators,” *Proceedings of the Second ISAAC Congress*, 2000.
- [87] J. Tenreiro Machado, A. M. Galhano, A. M. Oliveira, and J. K. Tar, “Approximating fractional derivatives through the generalized mean,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, pp. 3723–3730, nov 2009.
- [88] R. Bagley and P. Torvik, “Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures,” *AIAA journal*, 1985.
- [89] A. Schmidt, M. Lotsch, and L. Gaul, “Implementation of a new method for the computation of fractionally damped structures into discretization,” *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp. 297–306, 2001.

- [90] A. Schmidt and L. Gaul, "Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method," *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp. 297–306, 2002.
- [91] S. Andre, Y. Meshaka, and C. Cunat, "Rheological constitutive equation of solids: a link between models based on irreversible thermodynamics and on fractional order derivative equations," *Rheologica Acta*, vol. 42, pp. 500–515, nov 2003.
- [92] S. Singh and A. Chatterjee, "Galerkin projections and finite elements for fractional order derivatives," *Nonlinear Dynamics*, vol. 45, no. 1-2, pp. 183–206, 2006.
- [93] L. Yuan and O. Agrawal, "A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, no. 2, pp. 321–324, 2002.
- [94] I. T. Jolliffe, *Principal component analysis*. 2nd ed., 2002.
- [95] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley, "The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 25, pp. 539–575, 1993.
- [96] G. Kerschen, F. Poncelet, and J. C. Golinval, "Physical interpretation of independent component analysis in structure dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 4, pp. 1561–1575, 2007.
- [97] R. A. Bialecki, A. J. Kassab, and A. Fic, "Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, no. 6, pp. 774–797, 2005.
- [98] E. S. Hung and S. D. Senturia, "Generating efficient dynamical models for microelectromechanical systems from a few finite-element simulation runs," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, pp. 280–289, 1999.
- [99] K. Gall and H. Maier, "Cyclic deformation mechanisms in precipitated NiTi shape memory alloys," *Acta Materialia*, vol. 50, no. 18, pp. 4643–4657, 2002.
- [100] a. Paradis, P. Terriault, and V. Brailovski, "Modeling of residual strain accumulation of NiTi shape memory alloys under uniaxial cyclic loading," *Computational Materials Science*, vol. 47, pp. 373–383, dec 2009.
- [101] F. Auricchio and A. Mielke, "A rate-independent model for the isothermal quasi-static evolution of shape-memory materials," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 18, no. 1, pp. 125–164, 2008.

- [102] H. Davis, "The theory of linear operators from the standpoint of differential equations of infinite order," *Bloomington, Ind*, 1936.
- [103] R. C. Koeller, "Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 2, pp. 299–307, 1984.
- [104] A. Schmidt and L. Gaul, "FE Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relations Involving Fractional Time Derivatives," *Constitutive models for rubber*, vol. 2, pp. 79–92, 2001.